Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(4), 818-822
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54094

Global Attractor for the Viscous Cahn-Hilliard Equation

Yonghua Ren

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi
Email: renyonghua@tyut.edu.cn

Received: Nov. 12th, 2016; accepted: Nov. 26th, 2016; published: Nov. 30th, 2016

Abstract

We consider the global attractor of the viscous Cahn-Hilliard equation $u_t+\Delta^2 u-\Delta u_t+g(u)=\Delta f(u)$, $(x,t)\in\Omega\times(0,\infty)$ with a nonlinear term. Firstly, it proved the existence of bounded absorbing set, then obtained the existence of global attractor by a new method of obtaining the compactness.

Keywords

Viscous Cahn-Hilliard Equation, Global Attractor, Absorbing Set

粘性Cahn-Hilliard方程的整体吸引子

任永华

太原理工大学数学学院，山西 太原
Email: renyonghua@tyut.edu.cn

收稿日期：2016年11月12日；录用日期：2016年11月26日；发布日期：2016年11月30日

摘 要

本文研究了带有非线性项的粘性Cahn-Hilliard方程 $u_t+\Delta^2 u-\Delta u_t+g(u)=\Delta f(u)$，$(x,t)\in\Omega\times(0,\infty)$ 的整体吸引子。首先验证了该方程有界吸收集的存在性，进而利用紧性方法得到整体吸引子的存在性。

文章引用：任永华. 粘性 Cahn-Hilliard 方程的整体吸引子[J]. 应用数学进展, 2016, 5(4): 818-822.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54094

关键词

粘性Cahn-Hilliard方程，整体吸引子，吸收集

1. 引言

考虑下面的带非线性的粘性 Cahn-Hilliard 方程

$$u_t + \Delta^2 u - \Delta u_t + g(u) = \Delta f(u), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u = \Delta u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

的长时间行为，其中非线性 $g(u) \in C^2(R)$，对于几乎处处 $x \in \Omega$， g 是局部有界可测函数。

1958 年，Novick Cohen 等人为了描述带粘性物质的相互扩散运动，首次提出了粘性 Cahn-Hilliard 方程。这类方程在非牛顿流体力学理论中有着广泛的应用。董超雨等在[1]中采用了一种新的验证紧性的方法讨论了粘性 Cahn-Hilliard 方程全局吸引子的存在性。带有可加白噪音的 Cahn-Hilliard 方程的吸引子在[2]中给出了严密的论证。近几年来，许多学者对于 Cahn-Hilliard 方程产生了浓厚的兴趣，详见[1] [2] [3] [4] [5]。但是，对于较高正则性的研究还没有任何结果。本文在较高的正则性空间中，采用[6] [7] [8]中提到的新的紧性方法，研究了具有非线性项的问题(1)~(3)整体吸引子的存在性。

我们假设非线性项 $g(u)$ 满足下面的条件。

(H1) $g(0) = 0, \quad g(s)s \ge 0$

(H2) $g'(s) > -\lambda_1$，

(H3) $g''(s) \le C_g\left(1 + |s|^q\right)$，

其中 q 满足： $q \ge 0$，当 $n = 1,2$； $0 \le q \le \dfrac{2}{n-2}$， 当 $n \ge 3$ 。

此外，对于非线性项 $f(u)$，我们假设下列条件成立。

(G1) $f'(u) > -K$，

(G2) $F(u) > \sigma$，

(G3) $\left|f'(u)\right| \le K_1\left(1 + |u|^{\alpha+1}\right)$，

(G4) $\left|f''(u)\right| \le K_2\left(1 + |u|^{\beta+1}\right)$

其中 $\alpha, \beta, \sigma, K, K_1, K_2$ 为正常数， $0 < \alpha \le \beta < \infty$， 且 $F(u) = \int_0^u f(s)\,ds$ 。

本文的主要结果是。

定理 1.1 假设 g 满足(H1)~(H3)， f 满足(G1)~(G4)，则问题(1)~(3)对应的解半群在 H^2 中存在吸引子。

全文结构如下：第二部分是文章的预备知识；在第三部分中，我们证明了相应于解半群的吸引子的存在性。

2. 预备知识

下面介绍本文将要用到的一些概念和结论。

让 $|\cdot| = |\cdot|_2$ 和 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ 分别表示 $H = L^2(\Omega)$ 和 $V = H^2(\Omega)$ 中的范数。对于空间 $D(A) = H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$，我们定义 $Au = \Delta^2 u$ 。

引理 2.1 假设 g 满足(H1)~(H3)， f 满足(G1)~(G4)。则对于任意的 $u_0 \in H_0^2$ 和 $t \ge 0$ 问题(1)~(3)存在唯一解

$$u \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \cap C(0,T;H).$$

该引理利用 Faedo-Galerkin 方法可证，参见[5]，进而由定理 1.1 定义了一个连续的算子半群 $\{S(t)\}_{t\ge 0}$，即： $S(t)u_0 = u(t)$。

引理 2.2 集合 $B_0 = \bigcup_{t\ge 0} S(t) B_{\rho_0}$，

其中 B_{ρ_0} 是 H^1 中以 0 为中心以 ρ_0 为半径的球，是 $S(t)$ 在 H^1 中的有界吸收集。即对于任意的 $t \ge 0$ 均成立，且对于任意的有界集 $B \subset H^1$，存在 $t_0 \ge 0$，使得对于每一个 $t \ge t_0$，有 $S(t)B \subset B_0$。

证明：将 u 与(1)式做内积，可得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2 + |\Delta u|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla u|^2 + \left(g(u),u\right) = \left(\Delta f(u),u\right), \tag{4}$$

用(H1)~(H3)及 Poincare 不等式，可得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla u|^2 + \lambda|\nabla u|^2 \le \left(\Delta f(u),u\right),$$

再由(G1)~(G4)，

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla u|^2 + \lambda|\nabla u|^2 \le -\int_\Omega f'(u)(\nabla u)^2\,\mathrm{d}x \le K\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = K|\nabla u|^2, \tag{5}$$

整理得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla u|^2 + (\lambda - K)|\nabla u|^2 \le 0. \tag{6}$$

根据 Gronwall 不等式，可得：

$$|\nabla u|^2 \le |\nabla u_0|^2\,\mathrm{e}^{-2(\lambda-K)t}. \tag{7}$$

故而，存在 $t_0 \ge 0$，使得对于一切的 $t \ge t_0$，有 $|\nabla u| \le \rho_0$。

本文运用参考文献[9]中新的验证紧性的方法，证明了半群 $S(t)$ 的整体吸引子是一个紧的不变集 A。

定义 2.1 [9] Banach 空间 X 中的连续半群 $S(t)$ 满足条件 C，是指对于任意 $\varepsilon > 0$ 及 X 中任何的有界集 B，存在 $t(B) > 0$ 和一个有限维的子空间 H^1，使得 $\|PS(t)B\|$ 是有界的，并且 $\|(I-P)S(t)x\| \le \varepsilon,\ \forall t \ge t(B)$， $x \in B$， $P: X \mapsto X_1$ 是一个规范投影。

定理 2.1 [9] 设 $S(t)$ 是 Hilbert 空间 X 中的连续半群，如果下面条件成立，

1) $S(t)$ 在 X 中存在有界吸收集 $B \subset X$；

2) $S(t)$ 满足条件 C。

那么 $S(t)$ 在 X 中存在整体吸引子 $A = \omega(B)$，且 A 吸引 X 中的一切有界集。

3. 整体吸引子的存在性

3.1. H^2 中有界吸收集的存在性

将 $V = u_t + \varepsilon u$ 和(1)式做内积，得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta u|^2 + |V|^2 - \varepsilon(u,V) + \varepsilon|\Delta u|^2 + |\nabla V|^2 + \varepsilon(\Delta u,V) + \left(g(u),V\right) = \left(\Delta f(u),V\right), \tag{8}$$

由于

$$-\varepsilon(u,V)\geq -\frac{\varepsilon}{2}|u|^2-\frac{\varepsilon}{2}|V|^2\geq -\frac{\varepsilon}{2}|\Delta u|^2-\frac{\varepsilon}{2}|V|^2,$$

$$\varepsilon(\Delta u,V)\geq -\frac{\varepsilon^2}{4}|\nabla u|^2-|\nabla V|^2\geq -\frac{\varepsilon^2\lambda}{4}|\nabla u|^2-|\nabla V|^2.$$

可得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta u|^2+C_2|V|^2+C_3|\Delta u|^2+|\nabla V|^2+(g(u),V)=(\Delta f(u),V), \tag{9}$$

其中：

$$C_2=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right),\quad C_3=\left(\varepsilon-\frac{3\varepsilon}{4}\lambda^2\right),$$

用(H1)~(H3)，可得：

$$\left|\int_\Omega g(u)u_t\mathrm{d}x\right|\leq\frac{1}{2}|u_t|^2+C_4\left(|u|^2+|u|_{H^1}^{2(q+1)}\right),$$

再由(G1)~(G4)，

$$(\Delta f(u),V)\leq\frac{1}{C_2}|\Delta f(u)|^2+C_2|V|^2\leq\frac{C_4}{C_2}\left(|\Delta u|^2+\varepsilon|\Delta u|^2+C_\varepsilon\right)+C_2|V|^2,$$

整理得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta u|^2+\mu|\Delta u|^2\leq C_\varepsilon. \tag{10}$$

取适当的 ε $(\varepsilon>0)$，使得 $C_\varepsilon>0,\mu>0$，根据 Gronwall 不等式，可得：

$$|\Delta u|^2\leq|\Delta u_0|^2\mathrm{e}^{-\mu t}+\frac{C_\varepsilon}{\mu}. \tag{11}$$

所以，对于任意的 $|u_0|\leq R$, 存在 $t_1=\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{R^2\mu}{2C_3}\right)$，使得对于一切的 $t\geq t_1$，有 $|\Delta u|\leq\rho_1=\frac{2C_\varepsilon}{\mu}$。

定理 3.1 假设 g 满足(H1)~(H3)，f 满足(G1)~(G4)。以 ρ_1 为半径的球 $B_{\rho_1}(0,\rho_1)$ 是问题(1)~(3)生成的解半群 $S(t)$ 在 H^2 中的有界吸收集，即对于任意的有界集 $B\subset H^2$，存在 $t_1\geq 0$，使得当 $t\geq t_1$ 时，$S(t)B\subset B_{\rho_1}$。

3.2. H^2 中整体吸引子的存在性

本节，记 λ_i $(i=1,2,\cdots)$ 为 A 的特征值，$e_i(i=1,2,\cdots)$ 为对应于 λ_i 的特征向量，当 $i\to\infty$ 时，$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_i\to\infty$，且 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 构成了 $H^2(\Omega)$ 的正交基，令 $W_n=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，$W'=W_n^\perp$，记 $P_i:V\to W_n$ 为标准投影。

将 $V_2=u_{2t}+\varepsilon u_2$ 和(1)式做内积，得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta u_2|^2+C_2|V_2|^2+C_3|\Delta u_2|^2+(g(u),V_2)\leq\left(f''(u)(\nabla u)^2,V_2\right)+\left(f''(u)(\Delta u)^2,V_2\right), \tag{12}$$

易知 H_0^2 是紧嵌入 H^1 和 L^∞ 中的，所以对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 δ，使得：

$$\left|(I-P_n)V\right|_\infty=\left|V_2\right|_\infty\le\varepsilon,$$
$$\left|(I-P_n)V\right|_1=\left|V_2\right|_1\le\varepsilon.$$

因此，有

$$\left|\left(f''(u)(\nabla u)^2,V_2\right)\right|\le C\left(\lambda\varepsilon+C_\varepsilon\rho_0^{m+1}\varepsilon\right)=C\varepsilon.$$

同理可得：

$$\left|\left(f'(u)(\Delta u)^2,V_2\right)\right|\le C\varepsilon.$$

综上，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\Delta u\right|^2+2C_3\left|\Delta u\right|^2\le 2C\varepsilon. \tag{13}$$

取适当的 $\varepsilon(\varepsilon>0)$，使得 $C_3>0,$，根据 Gronwall 不等式，可得：

$$\left|\Delta u_2\right|^2\le\left|\Delta u_{02}\right|^2\mathrm{e}^{-2C_3t}+\frac{2C\varepsilon}{C_3}. \tag{14}$$

所以存在 $T_0=\max\left\{\frac{1}{2C_3}\ln\left(\frac{\rho_1^2}{\varepsilon}\right),t_0,t_1\right\}$，使得对于一切的 $t\ge T_0$，有 $\left|\Delta u_2\right|^2\le\left(1+\frac{2C\varepsilon}{C_3}\right)$.

定理 3.2 假设 g 满足(H1)~(H3)， f 满足(G1)~(G4)。对于 $u_0\in H^2$，问题(1)~(3)在 H^2 中存在整体吸引子 A。这里 A 在 H^2 的范数下吸引了 H^2 中的一切有界集。

基金项目

山西省自然科学基金资助项目(2014011005-4；2015011006)，太原理工大学教育教学改革研究项目。

参考文献 (References)

[1] 董超雨，姜金平，张晓明．粘性 Cahn-Hilliard 方程全局吸引子的存在性[J]．湖北大学学报, 2014, 36(4): 385-388.

[2] 黄青霞，李扬荣，曾雪萍．带有可加白噪音的 Cahn-Hilliard 方程的吸引子[J]．西南大学学报, 2007, 29(11): 1-6.

[3] 何春燕，张法勇．Cahn-Hilliard 方程的拟谱逼近的长时间性态[J]．黑龙江大学自然科学学报，2006，23(6): 779-786.

[4] 刘转玲．一类非经典扩散方程在强拓扑空间中的指数吸引子[J]．应用泛函分析学报, 2013, 15(3): 287-290.

[5] Yang, Z.J. (2009) Global Attractor for a Nonlinear Wave Equation Arising in Elastic Waveguide Model. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **70**, 2132-2142. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.02.114

[6] 荼丽芳，林国广．耗散 Camassa-Holm 方程的整体吸引子[J]．云南大学学报, 2009, 31(S2): 348-353.

[7] Yang, Z.J. and Li, X. (2011) Finite-Dimensional Attractors for the Kirchhoff Equation with a Strong Dissipation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **375**, 579-593. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.09.051

[8] Yang, Z.J. (2011) A Global Attractor for the Elastic Waveguide Model. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **74**, 6640-6661. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.06.045

[9] Ma, Q.F., Wang, S.H. and Zhong, C.K. (2002) Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Global Attractors for Semigroup and Application. *Indiana University Mathematics Journal*, **51**, 1541-1559. https://doi.org/10.1512/iumj.2002.51.2255