Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(1), 45-53
Published Online January 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2017.61006

Hans汉斯

Shadowing Property of Continuous Maps in Y Space

Yalin Tang[1], Ridi Huang[1], Chengbo Ye[1], Gengrong Zhang[1,2*]

[1]School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi
[2]College of Mathematics and Computational Science, Hunan First Normal University, Changsha Hunan
Email: *18152853519@163.com

Received: Jan. 1st, 2017; accepted: Jan. 17th, 2017; published: Jan. 22nd, 2017

Abstract

The shadowing property study that whether or not arbitrary orbits of perturbation system (*i.e.* pseudo orbits of this system) exist actual orbits, which satisfy that error of single step between them is within the designated scope in the time synchronization. It has a close connection with the stability of a system, and plays a significant role in the qualitative theory of dynamical systems. This paper extends conclusion of Gedeon and Kuchta to prove the necessary and sufficient condition of the shadowing property of continuous maps in Y space into itself.

Keywords

Y Space, Continuous Maps, Shadowing Property

Y 空间连续自映射的伪轨跟踪性

唐亚林[1]，黄日娣[1]，叶成博[1]，张更容[1,2*]

[1]广西大学，数学与信息科学学院，广西 南宁
[2]湖南第一师范学院 数学与计算科学学院，湖南 长沙
Email: *18152853519@163.com

收稿日期：2017年1月1日；录用日期：2017年1月17日；发布日期：2017年1月22日

*通讯作者。

文章引用: 唐亚林, 黄日娣, 叶成博, 张更容. Y 空间连续自映射的伪轨跟踪性[J]. 应用数学进展, 2017, 6(1): 45-53.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2017.61006

摘　要

伪轨跟踪性研究的是一个系统中任意扰动系统的轨道(即该系统的轨道)是否存在真正轨道使得在时间同步的意义下该轨道与伪轨的单步误差在指定范围内。它与系统的稳定性有着密切的联系，在动力系统的定性理论中起着重要的作用。本文扩展Gedeon和Kuchta的结论给出了 Y 空间的连续自映射具有伪轨跟踪性的充分必要条件。

关键词

Y 空间，连续自映射，伪轨跟踪性

1. 引言

1992 年，Gedeon 和 Kuchta 证明了区间上连续自映射具有伪轨跟踪行的充分必要条件。到目前为止，已有学者研究伪轨跟踪性本身的若干性质，以及伪轨跟踪性与动力系统其他性质之间的关系[1]。本文将在这些结论的基础上结合近年来一些学者对树上连续自映射的 Sarkovskii 定理，Baldwin 定理以及 Li-Yorke 混沌等性质的研究[2]，扩展文献[3]的结论到 Y 空间。

2. 预备知识

设 $n \in N$，称任意一个与集合 $X_n = \{z \in C : z^n \in [0,1]\}$ （C 表示复数集合)同胚的树为 $n-$星，记为 X_n。当 $n=3$ 时，称与 X_3 同胚的树为 $Y-$星，记为 Y。设 O 为 Y 的分支点，记 $Y-\{O\}=\bigcup_{i=1}^{3} I_i$，称 I_1, I_2, I_3 为 Y 的分支。

对 Y 的任一子集 A，用 $[A]$ 表示 Y 上包含 A 的最小子树。对于任意的 $x, y \in Y$，用 $[x,y]$ 表示 $[\{x,y\}]$，记 $(x,y] = [x,y]-\{x\}$，$(x,y) = (x,y]-\{y\}$。若 $x \neq y$，用 $Y_x(y)$ 表示 $Y-\{x\}$ 含 y 的连通分支。Y 上的度量 d 定义为：对任意 $x, y \in Y$，$\mathrm{d}(x,y)$ 表示 $[x,y]$ 的长度。

设 $e \in E(Y)$ （$E(Y)$ 表示 Y 的端点)，若 $x \in [e,y]$ 且 $x \neq y$，我们称 x, y 满足偏序关系 $<_e$，记作 $x <_e y$。

设 $f \in C^0(Y)$，记 $\{x, f(x), f^2(x), \cdots\}$ 为 x 的轨道。记 $f_\delta(x) = \{y : \mathrm{d}(y, f(x)) < \delta\}$。

任给 $\delta > 0$，x 的 $\delta-$链或者 x 的 $\delta-$伪轨为序列 $X_\delta = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$，其中 $x_{i+1} \in f_\delta(x_i), x_0 = x$。记 $P(f)$ 表示 f 的周期点集，$F(f)$ 表示 f 的不动点集。

若 $\mathrm{int}(J) \cap \{O\} = \varnothing$ 且存在一个同胚映射 $h : I \to J$，其中 I 为 $[0,1], (0,1], [0,1)$ 或 $(0,1)$，称 $J \subset Y$ 为一个区间。

若 $\forall n \in N, \mathrm{d}(x_n, f^n(y)) < \varepsilon$，我们称 $\delta-$链 X_δ 被 y 的轨道 ε 跟踪。

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.}$ 任意 $\delta-$链 X_δ 都可被某个 $y \in Y$ 的轨道 ε 跟踪，则称 f 具有伪轨跟踪性。

在本文中我们假设 $P(f) = F(f)$ 且 $F(f)$ 无处稠密。

引理 1　设 $f \in C^0(T)$ （T 表示树)，则下列条件等价:

1) 对任意 $x \in T, \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛；

2) $P(f) = F(f)$；

3) 若 $f(x) \neq x$，则对任意 $n \in N, f^n(x) \in T_x(f(x))$。

证明详情请见孙太祥等[4]编著的《树映射的动力学》引理 2.1。□

引理 2 设 $f\in C^0(Y)$ 且 $P(f)=F(f)$。任取 $x\in Y$，若 $f(x)\neq x$，则对任意 $y\in[x,f(x)]$，我们有 $f(y)\in Y_x(f(x))$。

证明： 若 $\exists y\in[x,f(x)],\text{s.t.}\, f(y)\notin Y_x(f(x))$。

$$\because f([x,y])\supset[f(x),f(y)]\supset[x,y]，\ \therefore \exists e_1\in[x,y],\text{s.t.}\, f(e_1)=e_1。$$

不妨设 $[x,e_1]\cap F(f)=\varnothing$，由 $f([x,e_1])\supset[e_1,f(x)]\supset[e_1,y]$，

$$\therefore \exists x_1\in[x,e_1],\text{s.t.}\, f(x_1)=y, f^2(x_1)=f(y)。$$

由引理 1 的(3)得 $f^2(x)\in Y_x(f(x))$，$\therefore f^2([x,x_1])\supset[f^2(x),f^2(x_1)]\supset[x,x_1]$，

$$\therefore \exists e_2\in[x,x_1],\text{s.t.} f^2(e_2)=e_2，\text{即 } e_2\in P(f)=F(f)。$$

由 $f(e_2)\in f([x,x_1]), f([x,x_1])\cap[x,x_1]=\varnothing$，$\therefore e_2\notin F(f)$，与 $P(f)=F(f)$ 矛盾。□

引理 3 设 $f\in C^0(Y)$ 且 $P(f)=F(f)$。任取 $n_1,n_2,n_3\in N, n_1<n_2<n_3$。任取 $x\in Y$，若 $f^{n_3}(x)\neq f^{n_2}(x)$，则 $f^{n_1}(x)\notin[f^{n_2}(x),f^{n_3}(x)]$。

证明：$\exists n_1,n_2,n_3\in N, n_1<n_2<n_3$，$\exists x\in Y$，若 $f^{n_2}(x)\neq f^{n_3}(x)$，

则 $f^{n_1}(x)\in[f^{n_2}(x),f^{n_3}(x)]$。

令 $n_4=n_2-n_1, n_5=n_3-n_1, y=f^{n_1}(x)$，$y\in[f^{n_4}(y),f^{n_5}(y)]$。

显然 $f(y)\neq y$，由引理 1 知对任意 $n\in N, f^n(y)\in Y_y(f(y))$。

若 $f^{n_5}(y)\in Y_y(f(y))$，则 $f^{n_4}(y)\notin Y_y(f(y))$，与引理 1 矛盾；

若 $f^{n_4}(y)\in Y_y(f(y))$，则 $f^{n_5}(y)\notin Y_y(f(y))$，与引理 1 矛盾。□

引理 4 设 $f\in C^0(Y)$ 且 $P(f)=F(f)$。任取 $x\in Y$，任取 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=p$，其中 $p\in F(f)$。

证明： 由引理 1 知：对任意 $x\in Y$，$\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛。不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=p$，根据 f 的连续性以及极限的唯一性得，$p\in F(f)$。□

引理 5 设 $f\in C^0(Y)$ 且 $P(f)=F(f)$。对任意的 $\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}$

任意取 $x_1,x_2,x_3\in Y, x_1\in[x_2,x_3]$，且 $x_2\in f_\delta(x_1), x_3\in f_\delta(x_2)$，则我们有 $\mathrm{d}(x_2,x_3)<\varepsilon$。

证明：

设 $\varepsilon_\delta^1=\sup\{\mathrm{d}(f(x),f(y)):\mathrm{d}(x,y)\le\delta\}$，$\varepsilon_\delta^2=\sup\{\mathrm{d}(x,y):x\in f_\delta(y),y\in f_\delta(x)\}$，

显然 $\delta\to 0$ 时，$\varepsilon_\delta^1\to 0,\varepsilon_\delta^2\to 0$。

下面分两种情况讨论：

(A) 若 $x_3\in Y_{x_1}(f(x_1))$，则 $x_2\notin Y_{x_1}(f(x_1))$。

(A1) $x_3\in[x_1,f(x_1)],\mathrm{d}(x_2,x_3)\le\mathrm{d}(x_2,f(x_1))\le\delta$；

(A2) $x_3\notin[x_1,f(x_1)],\mathrm{d}(x_2,x_1)\le\mathrm{d}(x_2,f(x_1))\le\delta,\therefore \mathrm{d}(f(x_1),f(x_2))\le\varepsilon_\delta^1$，

$\mathrm{d}(x_2,f(x_2))\le\mathrm{d}(x_2,f(x_1))+\mathrm{d}(f(x_1),f(x_2))\le\delta+\varepsilon_\delta^1$，

$\mathrm{d}(x_2,x_3)\le\mathrm{d}(x_3,f((x_2))+\mathrm{d}(f(x_2),x_2)\le\delta+\delta+\varepsilon_\delta^1=2\delta+\varepsilon_\delta^1$。

(B) 若 $x_2\in Y_{x_1}(f(x_1))$，则 $x_3\notin Y_{x_1}(f(x_1))$。

(B1) $f(x_2)\notin Y_{x_1}(f(x_1))$，由引理 2 的逆否命题得 $x_2\notin(x_1,f(x_1)]$，$\therefore x_1\in f([x_1,x_2])$，故 $\exists y\in[x_1,x_2],\text{s.t.}f(y)=x_1$。由引理 2 知 $y\notin[x_1,f(x_1)]$。

又 $\mathrm{d}(y,f(x_1))\le\mathrm{d}(x_2,f(x_1))\le\delta$，

$\mathrm{d}(f(y),x_1)=\mathrm{d}(x_1,x_1)=0\le\delta$，$\therefore\mathrm{d}(y,x_1)\le\varepsilon_\delta^2$。又 $\mathrm{d}(y,x_2)\le\mathrm{d}(x_2,f(x_1))\le\delta$，从而 $\mathrm{d}(x_1,x_2)\le\mathrm{d}(x_1,y)+\mathrm{d}(y,x_2)\le\varepsilon_\delta^2+\delta$，$\mathrm{d}(f(y),f(x_2))=\mathrm{d}(x_1,f(x_2))\le\varepsilon_\delta^1$，

$\mathrm{d}(x_3,x_1)\le\mathrm{d}(x_1,f(x_2))+\mathrm{d}(f(x_2),x_3)\le\varepsilon_\delta^1+\delta$，

$\therefore\mathrm{d}(x_2,x_3)\le\mathrm{d}(x_2,x_1)+\mathrm{d}(x_1,x_3)\le\varepsilon_\delta^1+\delta+\varepsilon_\delta^2+\delta=2\delta+\varepsilon_\delta^1+\varepsilon_\delta^2$。

(B2) $f(x_2)\in Y_{x_1}(f(x_1))$

$\therefore\mathrm{d}(x_3,x_1)\le\mathrm{d}(f(x_2),x_3)\le\delta$，$\mathrm{d}(x_1,f(x_2))\le\mathrm{d}(f(x_2),x_3)\le\delta$，

又 $\mathrm{d}(x_2,f(x_1))\le\delta$，$\therefore\mathrm{d}(x_1,x_2)\le\varepsilon_\delta^2$，从而 $\mathrm{d}(x_2,x_3)\le\mathrm{d}(x_2,x_1)+\mathrm{d}(x_1,x_3)\le\varepsilon_\delta^2+\delta$。

综上所述，$\mathrm{d}(x_2,x_3)\le2\delta+\varepsilon_\delta^1+\varepsilon_\delta^2$，由 $\delta\to0$ 时，$\varepsilon_\delta^1\to0,\varepsilon_\delta^2\to0$，$\therefore\exists0<\delta<\dfrac{\varepsilon}{4},\text{s.t.}\varepsilon_\delta^1<\dfrac{\varepsilon}{4},\varepsilon_\delta^2<\dfrac{\varepsilon}{4}$，故 $\mathrm{d}(x_2,x_3)<\varepsilon$。□

引理 6 设 $f\in C^0(Y)$ 且 $P(f)=F(f)$。设 e_1,e_2,e_3 为 Y 的端点，O 为 Y 的分支点，其中 $e_1,e_2,e_3,O\notin F(f)$。设 $e_1=a_n$，

$$a_1<_{e_1}a_2<_{e_1}\cdots<_{e_1}a_{n-2}<_{e_1}a_{n-1},$$

$$O=a_0<_{e_2}a_{n+1}<_{e_2}\cdots<_{e_2}a_{2n-2}<_{e_2}a_{2n-1}<_{e_2}e_2=a_{2n},$$

$$e_3=a_{3n}<_{e_3}a_{3n-1}<_{e_3}\cdots<_{e_3}a_{2n+2}<_{e_3}a_{2n+1}<_{e_3}O=a_0,$$

令

$I_j=[a_{j-1},a_j],j\in\{1,2,3,\cdots,n,n+2,n+3,\cdots,2n,2n+2,2n+3,\cdots,3n\}$ $I_{n+1}=[a_0,a_{n+1}],I_{2n+1}=[a_0,a_{2n+1}]$，

$\exists\delta>0,m\in N,x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为 $\delta-m-$循环($x_{i+1}\in f_\delta(x_i),i\in\{1,2,\cdots,m-1\},x_1\in f_\delta(x_m)$)

那么，$\exists j,s.t.\forall i\in\{1,2,\cdots m\},x_i\in I_j$ (i.e. δ 足够小时，所有的 $\delta-$循环都在区间 I_j 内)。

证明： 设 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\min\{\mathrm{d}(a_i,p):p\in F(f),i\in\{0,1,2,\cdots,3n\}\}$ ($F(f)$ 为闭集且 $a_i\notin F(f)$)。

对上述 ε，我们可以找到 $\delta>0$ 满足引理 5，且 $\forall x\in\overline{B(a_i,\varepsilon)}$ ($B(a_i,\varepsilon)$ 表示 a_i 的 ε 邻域)，$x\notin f_\delta(x)$。下证上述 δ 满足引理 6。

反证，若存在 $\delta-$循环 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m$，设 $a=a_i,\exists j,k,\text{s.t.}a\in[x_j,x_k]$。

显然 $f(a)\ne a$，我们不妨设 $a\ne O$ (根据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m$ 的性质以及 a_i 的选取，我们可以找到一个 $a_i\ne O$，则令 $a=a_i$)，

设 $Y-Y_a(f(a))$ 除 a 外的端点数为 $l(1\le l\le2)$，

A) 当 $l=1$，不妨设 $Y-Y_a(f(a))$ 除 a 外的端点为 e_1，则

$$B(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\text{且}a-\varepsilon<_{e_1}a+\varepsilon,$$

$$x_k\notin Y_a(f(a)),x_{k+1}\in Y_a(f(a))\tag{1}$$

设 $x_1\in[e_1,a]$ 满足(1)式的最靠近 a 的点。

$$x_k\in Y_a(f(a)),x_{k+1}\notin Y_a(f(a))\tag{2}$$

设 $x_j \in Y_a\left(f\left(a\right)\right)$ 的下标 j 为满足(2)式的最小下标，*i.e.*

$$\forall i \in \{2,3,\cdots,j\}, x_i \in Y_a\left(f\left(a\right)\right) \tag{3}$$

显然 $x_j \notin [a, a-\varepsilon)$。

下面分两种情况继续讨论：

(A1) $x_{j+1} \in [e_1, x_1]$

在此情况下 $x \exists k \in \{1,2,\cdots,j-1\}, s.t. x_k \in [x_1, x_j], x_j \in [x_k, x_{k+1}]$，且 $\exists y \in [x_k, x_j]$，s.t.$x_j \in f_\delta(y)$ 从而 $x_{j+1} \in f_\delta(y), x_j \in f_\delta(y)$ 且 $y \in [x_{j+1}, x_j]$，由引理 4 得 $\mathrm{d}(x_{j+1}, x_j) \le \varepsilon$，与 $\mathrm{d}(x_{j+1}, x_j) > \mathrm{d}(a+\varepsilon, a) \ge \varepsilon$ 矛盾。

(A2) $x_{j+1} \notin [e_1, x_1]$，则有 $x_{j+1} \in [x_1, a+\varepsilon]$

由(A)中类似证明可得 $\exists y \in [x_1, a+\varepsilon], s.t. x_1 \in f_\delta(y)$。又 $y \in [x_1, x_2], x_2 \in f_\delta(x_1)$，根据引理5，$\mathrm{d}(x_1, x_2) \le \varepsilon$ 与 $x_2 \in Y_a\left(f\left(a\right)\right), x_1 \notin [a+\varepsilon, a]$ 矛盾。

故我们选取的 δ 满足引理 6。

(B) 当 $l=2$，不妨设 $Y - Y_a\left(f\left(a\right)\right)$ 除 a 外的端点为 e_1, e_2。

(B1) 若仅有一个 x_1 满足(1)式的最靠近 a 的点，由(A)得引理 6 成立。

(B2) 若存在两个不同点 $x_0 \in [e_i, a], x_0' \in [e_j, a], i \ne j \in \{1,2\}$ 满足(1)式的最靠近 a 的点。如(A)中，令 x_j 的下标 j 为满足(2)式的最小下标，

若 $x_{j+1} \in [e_i, a]$，则令 $x_1 = x_0$。类似(A)中情况得引理 6 成立；

若 $x_{j+1} \in [e_j, a]$，则令 $x_1 = x_0'$。类似(A)中情况得引理 6 成立。□

定义 1 设 $X_\delta = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 定义数 $K^k = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ik}$，其中若 s.t.$x_{i-j} \in \mathrm{int}(I_k), x_{i+1} \notin I_k$，s.t.$x_{i-j} \in \mathrm{int}(I_k), x_{i+1} \notin I_k$ 且 $1 \le l \le j, x_{i-j+l} \in I_k$，则 $\alpha_{ik} = 1$；否则 $\alpha_{ik} = 0$。(即 K^k 表示 X_δ 离开的次数)。记 $K = \sum_{k=1}^{3n} K^k$ 表示 X_δ 的区间指标。

引理 7 设 $f \in C^0(Y)$ 且 $P(f) = F(f)$。考虑引理 6 中的划分 $\{a_i\}_{i=0}^{3n}$，则 $\exists \delta > 0$，$\exists N_0 \in N$，使得任意 $\delta-$伪轨 X_δ 的区间指标小于 N_0。

证明：根据引理 6，我们选取的 δ 足够小使得所有的 $\delta-$循环伪轨在同一区间 I_j 内。

假设引理 7 不成立，则存在一个 $\frac{\delta}{2}-$伪轨 $X_{\frac{\delta}{2}}$，使得 $X_{\frac{\delta}{2}}$ 的区间指标 $K > 3mn$，其中 $3n$ 为 I_j 的个数，$m > \max\limits_{j \in \{1,2,\cdots 3n\}} \left\{ \frac{2\mathrm{d}(I_j)}{\delta} \right\}$。从而存在一个区间 I_α，使得 $K^\alpha > m$。

事实上取 $K^\alpha \ge \frac{K}{3n} > m$。

若存在某个 i，$\exists j \in \{0,1,2,\cdots,i\}, \mathrm{s.t.} x_{i-j} \in \mathrm{int}(I_\alpha), x_{i+1} \notin I_\alpha$，且 $1 \le l \le j, x_{i-j+l} \in I_\alpha$，则记 x_i 为 $\hat{x}_i$。

因为 $K^\alpha > m$，所以我们可以找到超过 m 个类似 $\hat{x}_i$ 的点。于是 $\exists j(i<j)$，$\hat{x}_i, \hat{x}_j \in I_\alpha, \mathrm{s.t.d}(\hat{x}_i, \hat{x}_j) < \frac{\delta}{2}$，从而

$$\mathrm{d}\left(f\left(x_{j-1}\right), \hat{x}_i\right) \le \mathrm{d}\left(f\left(x_{j-1}\right), \hat{x}_j\right) + \mathrm{d}\left(\hat{x}_j, \hat{x}_i\right) \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta。$$

因此，$\hat{x}_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots x_{j-1}$ 是一个 $\delta-$循环伪轨。由 $\hat{x}_i, \hat{x}_j$ 的定义知这个 $\delta-$循环伪轨不全在区间 I_α 内，与假设矛盾。□

定义 2 如果任意 $x \in [p,q]$，我们有 $x \in f([p,x])$，称不动点 p 的单边邻域 $[p,q]$ 为 p 的非吸收邻域。

引理 8 设 $f\in C^0(Y)$ 且 $P(f)=F(f)$。任取 $x\in Y,\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=p$，其中 $p\in F(f)$。设 $[p,q]$ 为 p 的非吸收邻域，若 $\exists n\in N,\text{s.t.}\,f^n(x)\in[p,q]$，则我们有 $f^n(x)=p$。

证明： 设 $f^n(x)\in[p,q]$。因为 $[p,q]$ 为 p 的非吸收邻域，则 $z\in\left[p,f^n(x)\right],\text{s.t.}\,f(z)=f^n(x)$。由引理 3 得 $z=p$，

(若 $z\neq p$，则 $z\in\left[p,f^n(x)\right]$。由 $f^i(x)\to p(i\to\infty)$，$\exists N,\text{s.t. } m>n+1>N$，$\mathrm{d}\left(f^m(x),p\right)<\varepsilon,f^m(x)\notin\left[p,f^n(x)\right]$)。

又 $z\in\left[p,f^n(x)\right]=\left[p,f(z)\right]$，$f^m(x)=f^{m-n}\left(f^n(z)\right)=f^{m-n}\left(f(z)\right)=f^{m-n+1}(z)$，所以 $z\in\left[f^{m-n+1}(z),f(z)\right]$ 与引理 3 矛盾)故 $f(z)=f(p)=p=f^n(x)$。□

引理 9 设 $f\in C^0(Y)$ 且 $P(f)=F(f)$。设 $e_1=a_n$，

$$a_1<_{e_1}a_2<_{e_1}\cdots<_{e_1}a_{n-2}<_{e_1}a_{n-1},$$

$$O=a_0<_{e_2}a_{n+1}<_{e_2}\cdots<_{e_2}a_{2n-2}<_{e_2}a_{2n-1}<_{e_2}e_2=a_{2n},$$

$$e_3=a_{3n}<_{e_3}a_{3n-1}<_{e_3}\cdots<_{e_3}a_{2n+2}<_{e_3}a_{2n+1}<_{e_3}O=a_0,$$

如引理 6 中对 Y 的划分，考虑 $\delta-$链 $\left\{X_{\delta_j}\right\}_{j=0}^{\infty}=\left\{\left\{x_i^j\right\}_{i=0}^{\infty}\right\}_{j=0}^{\infty}$ 的某序列，其中 $\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j=0,\lim\limits_{j\to\infty}x_0^j=x$。设 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=p,p\in I_k$ 且 $\exists n_0\in N,\text{s.t.}$ 若 $n\geq n_0$，则 $f^n(x)\in\operatorname{int}(I_k)$。

设

$$\exists j_0\in N,\text{s.t.}\forall j>j_0,\exists i(j)\geq n_0,\forall n_0<i<i(j),x_{n_0}^j\in\operatorname{int}(I_k),x_i^j\in I_k,x_{i(j)+1}^j\notin I_k. \tag{4}$$

设 $\left\{x_{i(j)}^j\right\}_{j=j_0}^{\infty}$ 的极限存在，令 $y=\lim\limits_{j\to\infty}x_{i(j)}^j$，

若 $y\neq p$，则 $y\in\left[p,f(y)\right]$ 且 $\left[p,f(y)\right]$ 为 p 的非吸收邻域。

证明： 若 $y\neq p$，则由 f 的连续性和(4)式得 $f(y)\notin\operatorname{int}(I_k)$。

假设 $y\notin\left[p,f(y)\right]$，显然有 $p\in\left[y,f(y)\right]$。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=p$，$y=\lim\limits_{j\to\infty}x_{i(j)}^j$，

$$\exists j'\geq j_0,\text{s.t.}\forall j\geq j',\exists s\in\left\{n_0,\cdots,i(j)\right\},\frac{p+f(y)}{2}\in\left[x_{i(j)+1}^j,x_s^j\right],\frac{p+y}{2}\in\left[x_{i(j)}^j,x_s^j\right]. \tag{5}$$

应用引理 6 中类似的方法，我们可以找到 $z_j\in\left[a_{k-1},x_i^j\right],\text{s.t.}x_{i(j)}^j\in f_\delta\left(z_j\right)$。

因此有(5)式得，对 $j\geq j'$，我们有 $z_j\in\left[x_{i(j)}^j,x_{i(j)+1}^j\right]$，

其中

$$\mathrm{d}\left(x_{i(j)}^j,x_{i(j)+1}^j\right)>\frac{\mathrm{d}\left(y,f(y)\right)}{2} \tag{6}$$

与引理 5 矛盾。故 $y\in\left[p,f(y)\right]$。

下证 $[p,y]$ 为 p 的非吸收邻域。

假设 $[p,y]$ 不是 p 的非吸收邻域，则存在 $z\in[p,y],\text{s.t.}z\notin f\left([p,z]\right)$，且 $z_1\in f\left((p,z)\right),z_1\notin Y_z(y)$。

若我们取 i 足够大(相应的 δ_i 足够小)，则 $x_k^i\in[p,z]$，从而有 $x_{k+1}^i\notin B\left(z,\varepsilon_z\right)$，其中 $\varepsilon_z>0,p\notin B\left(z,\varepsilon_z\right)$ (显然 $z\neq p$)。因此若 $x_{k+1}^i\in B\left(z,\varepsilon_z\right)$

($\because y=\lim\limits_{j\to\infty}x_{i(j)}^j,\therefore x_{k+1}^i$ 存在)，则 $x_k^i\notin Y_p(y)$。由 f 的一致连续性，我们可以找到

$i_0 \in N, \omega > 0, \text{s.t.} x_{k+1}^i \in B(z, \varepsilon_z)$，从而 $\forall i > i_0, x_k^i \notin B(p, \omega)$。

通过上述类似的方法，我们可以找到 $i_1(i_1 \geq i_0), \text{s.t.} \forall i > i_1, \exists j, k \in N$，满足 $x_{k+j}^i \notin B(p, \omega)$，$x_j^i \in B(p, \omega) - B(z, \varepsilon_z), x_{j+k+1}^i \in B(z, \varepsilon_z), \forall 0 \leq l \leq k, x_{j+l}^i \notin B(z, \varepsilon_z)$。根据上述(6)式类似得，与引理 5 矛盾。因此，$[p, y]$ 为 p 的非吸收邻域。显然有 $[p, f(y)]$ 也为 p 的非吸收邻域。□

3. 主要定理的证明

定理 设 $f \in C^0(Y)$ 且 $P(f) = F(f)$，$F(f)$ 无处稠密。则下列条件等价：

(i) 若 $\exists x \in Y, f^n(x)$ 收敛与不动点 p，且 $\exists p$ 的非吸收邻域 $[p, q]$，则对于所有的 O_x（x 的邻域），$\forall z \in [p, q], \exists n \in N, \text{s.t.} [p, z] \subset f^n(O_x)$。

(ii) f 具有伪轨跟踪性。

证明： $(i) \to (ii)$

假设 f 不具有伪轨跟踪性，则 $\exists \varepsilon > 0, \delta -$ 链序列 $\left\{x_{\delta_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ 不被 ε 跟踪，其中 $\delta_j < \frac{1}{j}$。

类似引理 6 对 Y 的划分，并且

$$\max_{1 \leq j \leq 3n} \mathrm{d}(I_j) < \varepsilon \tag{7}$$

根据引理 7，$\exists \delta > 0, \exists n_0 \in N, \text{s.t.}$ 任意 X_δ 的区间指标

$$K < N_0. \tag{8}$$

不失一般性，假设 $\forall j \in N, \delta_j \leq \delta$，因此 $K_j < N_0$，其中 K_j 为 X_{δ_j} 的区间指标。

设

$$x = \lim_{j \to \infty} x_0^j \tag{9}$$

(必要时考虑相应的子序列)，x 为 X_{δ_j} 的起始点的极限点。由引理 4 和引理 9，我们有

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = p, p \in F(f) \text{ 且 } \exists k, p \in \operatorname{int}(I_k). \tag{10}$$

因为 $f^n(x) \to p(n \to \infty)$，所以

$$\exists n_0 \in N, s.t. \forall n \geq n_0, f^n(x) \in \operatorname{int}(I_k). \tag{11}$$

由 f 的连续性得，$\exists j_0 \in N, \text{s.t.} \exists j \geq j_0, \forall i(0 \leq i \leq n_0), d\left(f^i(x), x_i^j\right) < \varepsilon, x_{n_0}^j \in \operatorname{int}(I_k)$。

若 $\exists s(s > j_0), \text{s.t.} \forall i > n_0, x_i^s \in I_k$，则显然 X_{δ_j} 被 x 的轨道 ε 跟踪，与我们假设矛盾。因此

$$\forall j \geq j_0, \exists i(j) \geq n_0, \text{s.t.} x_{i(j)}^j \in I_k, x_{i(j)+1}^j \notin I_k. \tag{12}$$

现在我们考虑满足(12)式的最小值，不妨设为 $i(j)$，故

$$\forall j \geq j_0, x_{n_0}^j \in \operatorname{int}(I_k), \forall i\left(n_0 < i < i(j)\right), x_i^j \in I_k, x_{i(j)+1}^j \notin I_k$$

令

$$y = \lim_{j \to \infty} x_{i(j)}^j \tag{13}$$

(如若必要我们考虑相应的子序列)

不失一般性设 $y \neq p$，由(9)-(13)式和引理 9 得 $y \in [p, f(y)]$ 且 $[p, f(y)]$ 也为 p 的非吸收邻域。由引

理 8，我们可以找到 $n_1 \ge n_0, \text{s.t.} \forall n \ge n_1, f^n(x) \notin Y_p(y)$。

根据 f 的连续性，

$$\exists j_1 \ge j_0, \alpha > 0, \text{s.t.} \forall j \ge j_1, \forall i(0 \le i \le n_1), \mathrm{d}\left(x_i^j, f^i(x)\right) < \varepsilon, \tag{14}$$

其中 $z \in O_\alpha = [x-\alpha, x+\alpha]$，

$$f^{n_1}(O_\alpha) \subset \left[a_{k-1}, \frac{p+y}{2}\right] \tag{15}$$

根据我们的假设有 $\exists \alpha \in N, \text{s.t.} [a_{k-1}, \frac{p+y}{2}] \subset f^{n_\alpha}(O_\alpha)$，因此

$\exists y$ 的邻域

$$O_y, \text{s.t.} O_y \subset \left[\frac{p+y}{2}, a_{k+1}\right], O_y \subset f^{n_\alpha}(O_\alpha) \tag{16}$$

因为 $[p, f(y)]$ 为 p 的非吸收邻域，所以 $\forall l \ge 0, O_y \subset f^{n_\alpha + l}(O_\alpha)$。

断言： $\forall n_\alpha + l, \exists \beta_1, \beta_2, O_y \subset [x-\beta_1, x+\beta_2], O_\beta \subset O_\alpha, \text{s.t.}$

$(*)$ $\forall s(n_1 \le s \le n_\alpha + l), f^s(O_\beta) \subset I_k$；

$(**)$ $O_y \subset f^{n_\alpha + l}(O_\beta)$。

证明断言： 由 $f^{n_1}(O_\alpha) \subset I_k$ 以及 f 的连续性，

$$\exists O_{\alpha_1} = [x-\alpha_1, x-\alpha_2] \subset O_\alpha, \text{s.t.} f^{n_1+1}(O_{\alpha_1}) \subset I_k. \tag{17}$$

(对于 O_{α_1} 的选取，我们可以简单的通过去掉 $f^{n_1+1}(O_{\alpha_1}) - I_k$ 得到)

设 O_{α_1} 为满足(17)式的最大区间，由归纳得我们可以找到 $O_{\alpha_1} \subset O_{\alpha_{i-1}}$， $f^{n_1+i}(O_{\alpha_i}) \subset I_k$。

当 $i = n_\alpha + l - n_1$ 时，令 $O_\beta = O_{\alpha_i}$ 得

$$f^{n_1+i}(O_{\alpha_i}) = f^{n_1+n_\alpha+l-n_1}(O_\beta) = f^{n_\alpha+l}(O_\beta) \subset I_k \cdot (*)。\square$$

下证 $(**)$ 式。若 $f^{n_\alpha+l}(O_\alpha - O_\beta) \cap O_y = \varnothing$，则 $O_y \subset f^{n_\alpha+l}(O_\beta)$。

假设 $\exists z \in f^{n_\alpha+l}(O_\alpha - O_\beta) \cap O_y$，则 $\exists z_1 \in O_\alpha\left(z_1 \in f^{-(n_\alpha+l)}(z)\right), \text{s.t.}$

$$f^{n_1}(z_1) \in \left[a_{k-1}, \frac{p+y}{2}\right], f^{n_\alpha+l}(z_1) \in \left[\frac{p+y}{2}, a_k\right], \quad \exists s(n_1 \le s \le n_\alpha + l), f^s(z_1) \notin I_k. \tag{18}$$

令 s 为满足(18)式的最小值。由引理 3 得，$[p, a_k] \subset f^s\left(O_{\alpha_{s-n_1}}\right)$ （s 为最小值)。又 $[p, a_k]$ 为 p 的非吸收邻域，则 $[p, a_k] \subset f^{n_\alpha+l}\left(O_{\alpha_{s-n_1}}\right)$ 与 $(*)$ 矛盾，故 $O_y \subset f^{n_\alpha+l}(O_\beta) \cdot (**)$。$\square$

根据(7)，(12)，(14)以及断言，我们取 $r_1 \ge j_1, \text{s.t.} \forall j \ge r_1, i(j) > n_\alpha$，

对任意 X_{δ_j}，存在区间 $R_j^1 \subset O_\alpha, \text{s.t.}$

$$\forall z \in R_j^1, O_y \subset f^{i(j)}(R_j^1) \text{ 且 } \forall s(0 \le s \le i(j)). \tag{19}$$

对于以 $x_{i(j)}^j$ 为始点的 $\delta-$链序列 $\{X_{\delta_j}\}_{j \ge r_1}^\infty$，以及 $\lim_{j\to\infty} x_{i(j)}^j = y$，则 $\forall j \ge r_1$，$\delta-$链序列 $\{x_i^j\}_{i=i(j)}^\infty$ 不能被 O_y 中的任一点的轨道 ε 跟踪。(若 $\exists j(j \ge r_1), s.t.\{x_i^j\}_{i=i(j)}^\infty$ 可被 O_y 中的某一点 ε 跟踪，则根据(19)式 X_{δ_j} 可被 R_j^1 中的某一点的轨道 ε 跟踪，与假设矛盾。)

因此 $\forall j \ge r_1, \exists s \in \{0,1,2,\cdots,i(j)\}, x_s^j \in \mathrm{int}(I_k), x_{i(j)+1}^j \notin I_k$，从而 $\forall j \ge r_1, K_j \ge 1$。

重复上述过程，$\exists r_2 \ge r_1, \exists y_2$ 邻域 O_{y_2}, s.t.$i(j)_2 \ge i(j), R_j^2 \subset O_y, \forall z \in R_j^2$

$O_{y_2} \subset f^{i(j)_2}(R_j^2), \forall s(i(j) \le s \le i(j)_2), \mathrm{d}(f^s(z), x_s^j) <, \lim_{j\to\infty} x_{i(j)_2}^j = y$ 且 $\{x_i^j\}_{i=i(j)_2}^{\infty}$ 不能被 O_y 中的任一点的轨道 ε 跟踪。故 $\forall j \ge r_2, K_j \ge 2$。

经过重复 N_0 次后，$\exists r_{N_0} \in N, \forall j \ge r_{N_0}, K_j \ge N_0$，与(8)式矛盾。

$(ii) \to (i)$

设 $x \in Y, f^n(x) \to p, [p,q]$ 为 p 的非吸收邻域。$\exists z \in [p,q], x$ 的某邻域 O_x，使得

$$\forall n \in \{0,1,2,\cdots\}, [p,z] \not\in f^n(O_x). \tag{20}$$

假设存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\mathrm{d}(p,q) > \varepsilon \text{ 且 } [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset O_x. \tag{21}$$

由引理 8，存在 $n_\delta \in N$ 使得

$$\forall n \ge n_\delta, f^n(x) \notin Y_p(y). \tag{22}$$

设 $k_\delta \in N$, s.t.$\dfrac{\mathrm{d}(p,q)}{\delta} < k_\delta$。令 $x_{n_\delta+k_\delta} = q, i \in \{1,2,3,\cdots,k_\delta\}$，定义如下：

若 $x_{n_\delta+k_\delta-i+1} - \delta \notin Y_p(y)$，则令 $x_{n_\delta+k_\delta-i} = p$；

若 $x_{n_\delta+k_\delta-i+1} - \delta \in Y_p(y)$，则令 $f(x_{n_\delta+k_\delta-i}) = x_{n_\delta+k_\delta-i+1} - \delta$，且

$x_{n_\delta+k_\delta-i} \in [p, x_{n_\delta+k_\delta-i+1} - \delta]$。(因为 $[p,q]$ 为 p 的非吸收邻域，所以上述定义是有意义的)

因此通过(23)式得 $\{x_i\}_{i=0}^{n_\delta+k_\delta}$ 为 $\delta-$链。若 $y \notin O_x$，由(21)式有 $\mathrm{d}(y,x_0) > \varepsilon$；若 $y \in O_x$，由(20)和(22)式有 $f^{n_\delta+k_\delta}(y) \notin Y_z(p)$，从而 $\mathrm{d}(x_{n_\delta+k_\delta}, f^{n_\delta+k_\delta}(y)) > \varepsilon$。

故 $\delta-$链序列 $\{x_i\}_{i=0}^{n_\delta+k_\delta}$ 不能被 ε 跟踪，与假设矛盾。□

推论 设 $f \in C^0(Y), n \in N$，则 f 具有伪轨跟踪性当且仅当 f^n 具有伪轨跟踪性。

证明： 详细证明参考文献[3]引理 9。

基金项目

国家自然基金(NO:11461002；11401288)；广西自然科学基金(NO:2016GXNSFAA380317)。

参考文献 (References)

[1] Gedeon, T. and Kuchta, M. (1992) Shadowing Property of Continuous Maps. *American Mathematic Society*, **115**, 271-279. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1992-1086325-3

[2] 赵俊玲. 动力系统中伪轨跟踪性的研究[D]: [博士学位论文]. 浙江大学, 2003.

[3] 孙太祥. 树映射的 $\omega-$ 极限集与湍流[J]. 数学学报, 2002(45): 253-260.

[4] 孙太祥, 席鸿建, 张更容, 陈占和.树映射的动力学[M]. 南宁: 广西科学技术出版社, 2011: 1-3, 16-17.