Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2017, 6(9), 1105-1114**
Published Online December 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.69134

Duality between the Smash Product and Smash Coproduct

Beishang Ren[1,2], Yuqiu Wei[3], Fenfang Xie[2*], Shuai Jin[1], Juan Chen[1]

[1]Guangdong University of Science & Technology, Dongguan Guangdong
[2]Guangxi Teachers Education University, Nanning Guangxi
[3]Guangxi University of Foreign Languages, Nanning Guangxi
Email: *48762595@qq.com

Received: Nov. 25th, 2017; accepted: Dec. 14th, 2017; published: Dec. 21st, 2017

Abstract

This paper mainly discusses the relations between module algebra and module coalgebra, comodule algebra and comodule coalgebra. Last, from the comodule coalgebra A° contained in A^{0}, we further characterize duality between the smash product and smash coproduct.

Keywords

Smash Product, Module Coalgebra, Comodule Coalgebra, Smash Coprodule

Smash积与Smash余积的对偶性

任北上[1,2]，韦玉球[3]，谢芬芳[2*]，金　帅[1]，陈　娟[1]

[1]广东科技学院，广东 东莞
[2]广西师范学院，广西 南宁
[3]广西外国语学院，广西 南宁
Email: *48762595@qq.com

收稿日期：2017年11月25日；录用日期：2017年12月14日；发布日期：2017年12月21日

摘　要

本文探究了模代数与模余代数、余模代数与余模余代数之间的相互关系，并从含于余代数 A^{0} 内的余模余代数 A° 出发，进一步刻画了**Smash**积与**Smash**余积的对偶性。

*通讯作者。

文章引用: 任北上, 韦玉球, 谢芬芳, 金帅, 陈娟. Smash 积与 Smash 余积的对偶性[J]. 应用数学进展, 2017, 6(9): 1105-1114. DOI: 10.12677/aam.2017.69134

关键词

Smash积，模余代数，余模余代数，Smash余积

1. 引言

本文中始终约定 K 为代数闭域，H 是 K -Hopf 代数，C 是 K -余代数。在 Hopf 代数文献中，通常采用[1]中的 Sigma 记号：$\Delta(c)=\sum c_{(1)}\otimes c_{(2)},\forall c\in C$，及 $\rho(c)=\sum c_{(-1)}\otimes c_{(0)}$。

定义 1.1 [2]：设 A 是 K -代数。称 A 为左 H -模代数(或 H 在 A 上的作用)，若下列三条成立：

(MA1) A 是左 H -模，结构映射 $\gamma: H\otimes A\to A$，其中 $\gamma(h\otimes a)=h\cdot a$；

(MA2) $h\cdot(ab)=\sum(h_{(1)}\cdot a)(h_{(2)}\cdot b), \forall h\in H, \forall a,b\in A$；

(MA3) $h\cdot 1_A=\varepsilon_H(h)1_A, \forall h\in H$。

例 1.1：设 A 是 K -代数。如果 $f\in Hom(H,A)$ 是卷积可逆的代数同态，则 A 是左 H -模代数，其中 $h\cdot a=f(h_{(1)})af^{-1}(h_{(2)})$，$\forall h\in H,\forall a\in A$。

在[1]中我们知道 $A\#H=A\otimes H$ 可以构成一个 K -代数，其中乘法运算为 $(a\#h)(b\#g)=\sum a(h_1\cdot b)\#h_2 g, \forall a,b\in A, \forall h,g\in H$，这个代数的乘法习惯上称为 Smash 积。在此基础上，[3]里又引入了交叉积的概念和一系列重要性质，为 Hopf 代数的结构理论研究起到了重要作用(譬如，点 Hopf 代数、辫子 Hopf 代数等)。由于模代数产生的极大影响引起了学者们的关注，所以又陆续得到了新的对偶概念。

定义 1.2 [4]：设 A 是 K -代数。称 A 为右 H -余模代数(或 H 在 A 上的余作用)，若下列三条成立：

(CA1) A 是右 H -余模，结构映射 $\rho: A\to A\otimes H$，其中 $\rho(a)=\sum a_{(0)}\otimes a_{(1)}$；

(CA2) $\sum(ab)_{(0)}\otimes(ab)_{(1)}=\sum a_{(0)}b_{(0)}\otimes a_{(1)}b_{(1)}, \forall a,b\in A$；

(CA3) $\rho(1)=1_A\otimes 1_H$。

定义 1.3 [4]：设 H 是 Hopf 代数，C 是 K -余代数。称 C 为左 H -模余代数(或 H 在 C 上的作用)，若下列三条成立：

(MC1) C 是左 H -模，结构映射 $\varphi: H\otimes C\to C$，其中 $\varphi(h\otimes c)\triangleq h\cdot c$；

(MC2) $\Delta_C(h\cdot c)=\sum h_{(1)}\cdot c_{(1)}\otimes h_{(2)}\cdot c_{(2)}, \forall h\in H, \forall c\in C$；

(MC3) $\varepsilon(h\cdot c)=\varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c), \forall h\in H, \forall c\in C$。

例 1.2：设 C 是一个 K -Hopf 代数，而 H 为 C 的子 Hopf 代数。关于 C 的代数结构的乘法视为模作用，易知 C 为 H -模，进一步可以验证 C 为 H -模余代数。特别地，若取 $H=C$，可以得到一个平凡的 H -模余代数 H。

例 1.3：易知右 H -模 M 都可以看成左 H^{op} -模，其中模作用为 $h^{op}\cdot m=m\cdot h$，$\forall h\in H,\forall m\in M^{op}$。进而可推出右 H -模代数也可以看成是左 H^{op} -模代数。类似地，每个右 H -模余代数也可以看成是左 H^{op} -模余代数。

2. 预备知识

首先，讨论模余代数的刻画问题。

命题 2.1：设 H 是 Hopf 代数，C 是 K -余代数，且有左 H -模结构 $\varphi: H\otimes C\to C$。则下列结论等价：

(1) C 是一个左 H -模余代数；

(2) φ 是余代数同态；

(3) C 的余乘 $\Delta: C\to C\otimes C$ 和余单位 $\varepsilon: C\to K$ 都是 H -模同态。

证明：命题条件已经给出(MC1)，结论之间的等价性证明如下：

由结论⑴知，条件(MC2)和(MC3)成立，等价于下列等式成立：

$$\Delta_C\varphi=(\varphi\otimes\varphi)(1\otimes T\otimes 1)(\Delta_H\otimes\Delta_C) \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_C\varphi=l(\varepsilon_H\otimes\varepsilon_C) \tag{2.2}$$

其中 $l: K\otimes K\to K, l\left(k_{(1)}\otimes k_{(2)}\right)=k_{(1)}k_{(2)}$ 是结构映射，我们通常将 l 简化掉。

注意到，$H\otimes C$ 也是一个余代数，余乘为 $\Delta_{H\otimes C}=(1\otimes T\otimes 1)(\Delta_H\otimes\Delta_C)$，余单位为 $\varepsilon_{H\otimes C}=l(\varepsilon_H\otimes\varepsilon_C)$。将等式(2.1)和(2.2)箭图化，利用余代数同态的定义及箭图的交换性，即可得知结论⑴和结论⑵等价。

因为 Δ_H 和 ε_H 都是代数同态，则由 C 是左 H -模可知，$C\otimes C$ 也是左 H -模，其中模的结构映射为

$$\varphi_{C\otimes C}: H\otimes C\otimes C\to C\otimes C, \varphi_{C\otimes C}=(\varphi\otimes\varphi)(1\otimes T\otimes 1)(\Delta_H\otimes 1\otimes 1)$$

由于 K 是左 K -模，则 K 也是左 H -模，结构映射为

$$\varphi_K: H\otimes K\to K, \varphi_K=l(\varepsilon_H\otimes 1)$$

现将等式(2.1)和(2.2)恒等变形为

$$\Delta_C\varphi=(\varphi\otimes\varphi)(1\otimes T\otimes 1)(\Delta_H\otimes 1\otimes 1)(1\otimes\Delta_C) \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_C\varphi=l(\varepsilon_H\otimes 1)(1\otimes\varepsilon_C) \tag{2.4}$$

显然，(2.3)和(2.4)事实上就是 $\Delta_C\varphi=\varphi_{C\otimes C}(1\otimes\Delta_C)$ 和 $\varepsilon_C\varphi=\varphi_K(1\otimes\varepsilon_C)$。

由上文表述所构建的箭图分别为图 1 和图 2。

$$\begin{tikzcd} H\otimes C \arrow[r, "1\otimes\Delta_C"] \arrow[d, "\varphi"'] & H\otimes C\otimes C \arrow[d, "\varphi_{C\otimes C}"'] \\ C \arrow[r, "\Delta_C"] & C\otimes C \end{tikzcd}$$

Figure 1. By(2.3) corresponding commutative arrow graph

图 1. 等式(2.3)对应的交换箭图

$$\begin{tikzcd} H\otimes C \arrow[r, "1\otimes\varepsilon_C"] \arrow[d, "\varphi"'] & H\otimes K \arrow[d, "\varphi_K"'] \\ C \arrow[r, "\varepsilon_C"] & K \end{tikzcd}$$

Figure 2. By(2.4) corresponding commutative arrow graph

图 2. 等式(2.4)对应的交换箭图

可知，等式(2.1)和(2.2)成立，则相当于图 1 和图 2 的交换性分别都成立，即结论(1)和结论(3)等价。 □

命题 2.2：设 H' 和 H 都是 K -Hopf 代数，且 $f: H' \to H$ 为 Hopf 代数同态。那么 M 为左 H -模余代数(模代数)，则 M 必是左 H' -模余代数(模代数)。

证明：只对模余代数的情形进行证明，另一情形同理可证。

设 (M,φ) 为左 H -模余代数，则易知 M 必是 H' -模，其中模结构映射为

$\varphi' = \varphi(f \otimes 1)$，即 $h' \circ m = f(h') \cdot m, \forall h' \in H', m \in M$。于是(MC1)成立。

另外，
$$\begin{aligned}\Delta_M(h' \circ m) &= \Delta_M(f(h') \cdot m) = \sum f(h')_{(1)} \cdot m_{(1)} \otimes f(h')_{(2)} \cdot m_{(2)} \\ &= \sum f(h'_{(1)}) \cdot m_{(1)} \otimes f(h'_{(1)}) \cdot m_{(2)} = \sum h'_{(1)} \circ m_{(1)} \otimes h'_{(1)} \circ m_{(2)}\end{aligned}$$

即 $\Delta_M(h' \circ m) = \sum h'_{(1)} \circ m_{(1)} \otimes h'_{(1)} \circ m_{(2)}$。所以(MC2)成立。

最后，$\varepsilon_M(h' \circ m) = \varepsilon_M(f(h') \cdot m) = \varepsilon_H(f(h'))\varepsilon_M(m) = \varepsilon_H(h')\varepsilon_M(m)$。所以(MC3)成立。 □

如果 M 为 K -空间，M^* 为 M 的对偶 K -空间。若 (M,φ) 是左 A-模，且 $\varphi(a \otimes m) = a \cdot m$，那么 (M^*,φ^*) 是右 A-模，并且 $\varphi^*(m^* \otimes a) = m^* \leftarrow a$，其中

$$\langle m^* \leftarrow a, m \rangle = \langle m^*, m \cdot a \rangle, \forall m \in M, m^* \in M^*, a \in A$$

类似地，M 为右 A-模可以得到 M^* 为左 A-模，其中 $\langle a \to m^*, m \rangle = \langle m^*, m \cdot a \rangle$。

与 C^* 必然具有代数结构不同的是，K -代数 A 的对偶空间 A^* 未必是余代数。但含在 A^* 内的 A° 却具有代数的结构[1]，为此，我们有下列结果。

定理 2.1：设 H 为 K -Hopf 代数，那么

(1) A 是一个左 H -模代数，那么 A° 是一个右 H -模余代数；

(2) C 是一个左 H -模余代数，那么 C^* 是一个右 H -模代数。

证明：(1) 因为 (A,M,u) 是 K -代数，则 (A°, M^*, u^*) 是 K -余代数，欲证(MC1)成立，只需证明 A° 为 A^* 的子模即可。也就是说，$\forall h \in H, a^\circ \in A^\circ, a^\circ \leftarrow h \in A^\circ$。为此，我们将此问题与(MC2)的证明综合考虑。

$$\begin{aligned}&\forall a,b \in A, \langle M^*(a^\circ \leftarrow h), a \otimes b \rangle = \langle a^\circ \leftarrow h, ab \rangle = \langle a^\circ, h \cdot ab \rangle \\ &= \sum \langle a^\circ, (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b) \rangle = \sum \langle M^*(a^\circ), (h_{(1)} \cdot a) \otimes (h_{(2)} \cdot b) \rangle \\ &= \sum \langle a^\circ_{(1)} \otimes a^\circ_{(2)}, (h_{(1)} \cdot a) \otimes (h_{(2)} \cdot b) \rangle = \sum \langle a^\circ_{(1)}, h_{(1)} \cdot a \rangle \langle a^\circ_{(2)}, h_{(2)} \cdot b \rangle \\ &= \sum \langle a^\circ_{(1)} \leftarrow h_{(1)}, a \rangle \langle a^\circ_{(2)} \leftarrow h_{(2)}, b \rangle = \left\langle \sum (a^\circ_{(1)} \leftarrow h_{(1)}) \otimes (a^\circ_{(2)} \leftarrow h_{(2)}), a \otimes b \right\rangle\end{aligned}$$

所以 $M^*(a^\circ \leftarrow h) = \sum (a^\circ_{(1)} \leftarrow h_{(1)}) \otimes (a^\circ_{(2)} \leftarrow h_{(2)})$。上式表明(MC1)和(MC2)都成立。

另外，$u^*(a^\circ \leftarrow h) = \langle a^\circ \leftarrow h, 1_A \rangle = \langle a^\circ, h \cdot 1_A \rangle = \langle a^\circ, \varepsilon(h) 1_A \rangle = \varepsilon(h) \langle a^\circ, 1_A \rangle = \varepsilon(h) u^*(a^\circ)$，即 $u^*(a^\circ \leftarrow h) = \varepsilon(h) u^*(a^\circ)$，故(MC3)成立。由上可知，$A^\circ$ 是一个右 H -模余代数。

(2) 因为 (C,Δ,ε) 是左 H -模余代数，那么自然知 $(C^*,\Delta^*,\varepsilon^*)$ 为代数且 C^* 为右 H -模，所以(MA1)成立。下面只需证明(MA2)和(MA3)成立即可。$\forall h \in H, \forall c^*, d^* \in C^*, c \in C$，

$$\begin{aligned}\langle c^* d^* \leftarrow h, c \rangle &= \langle \Delta^*(c^* \otimes d^*), h \cdot c \rangle = \langle c^* \otimes d^*, \Delta(h \cdot c) \rangle \\ &= \sum \langle c^* \otimes d^*, h_{(1)} c_{(1)} \otimes h_{(2)} c_{(2)} \rangle\end{aligned}$$

$$=\sum\left\langle c^*,h_{(1)}\cdot c_{(1)}\right\rangle\left\langle d^*,h_{(2)}\cdot c_{(2)}\right\rangle$$
$$=\sum\left\langle c^*\leftarrow h_{(1)},c_{(1)}\right\rangle\left\langle d^*\leftarrow h_{(2)},c_{(2)}\right\rangle$$
$$=\sum\left\langle\left(c^*\leftarrow h_{(1)}\right)\otimes\left(d^*\leftarrow h_{(2)}\right),c_{(1)}\otimes c_{(2)}\right\rangle$$
$$=\sum\left\langle\left(c^*\leftarrow h_{(1)}\right)\otimes\left(d^*\leftarrow h_{(2)}\right),\Delta(c)\right\rangle$$
$$=\left\langle\sum\left(c^*\leftarrow h_{(1)}\right)\left(d^*\leftarrow h_{(2)}\right),c\right\rangle$$

所以 $c^*d^*\leftarrow h=\sum\left(c^*\leftarrow h_{(1)}\right)\left(d^*\leftarrow h_{(2)}\right)$，即(MA2)成立。

最后，由于 $\varepsilon=1_{c^*}$，则

$$\left\langle 1_{c^*}\leftarrow h,c\right\rangle=\left\langle\varepsilon,h\cdot c\right\rangle=\varepsilon(h\cdot c)=\varepsilon(h)\varepsilon(c)=\left\langle\varepsilon(h)\varepsilon,c\right\rangle=\left\langle\varepsilon(h)1_{c^*},c\right\rangle$$

进而，$1_{c^*}\leftarrow h=\varepsilon(h)1_{c^*}$，即(MA3)成立。

所以，C^* 是一个右 H -模代数。 □

推论 2.1：设 H 为 Hopf 代数，则 H 自然是一个左 H -模代数和左 H -模余代数。所以 H° 是一个右 H -模余代数，H^* 是一个右 H -模代数。

推论 2.2：设 H 为 K -Hopf 代数，S 为反极元；而 A 为 K -代数。那么 A 可以成为一个左 H -模代数，其中模结构映射 $\gamma:H\otimes A\to A$，$\gamma(h\otimes a)=h\cdot a$ 具有如下等式：$h\cdot a=\gamma\left(h_{(1)}\right)a\gamma\left(S\left(h_{(2)}\right)\right)$，$\forall h\in H,\forall a\in A$。

定义 2.1：设 H 是 K -Hopf 代数，C 是 K -余代数。称 C 为左 H -余模余代数，若下列三条成立：

(CC1) C 是左 H -余模，结构映射 $\rho:C\to H\otimes C$，其中 $\rho(c)=\sum c_{(-1)}\otimes c_{(0)}$；

(CC2) $\sum\left(c_{(1)}\right)_{(-1)}\left(c_{(2)}\right)_{(-1)}\otimes\left(c_{(1)}\right)_{(0)}\otimes\left(c_{(2)}\right)_{(0)}=\sum c_{(-1)}\otimes\left(c_{(0)}\right)_{(1)}\otimes\left(c_{(0)}\right)_{(2)}$；

(CC3) $\sum c_{(-1)}\varepsilon\left(c_{(0)}\right)=\varepsilon(c)1_H,\forall c\in C$。

类似地可以定义右 H -余模余代数。

例 2.1：设 H 为 Hopf 代数，C 为余代数，而 $f\in Hom(C,H)$ 是一个余代数同态，如果 f 作为卷积代数 $Hom(C,A)$ 中的可逆元，那么 C 必是一个 H -余模余代数，其中余模结构映射 $\rho:C\to H\otimes C$，$\rho(c)=\sum f\left(c_{(1)}\right)f^{-1}\left(c_{(3)}\right)\otimes c_{(2)}$。

对 H -余模余代数的刻画如下：

命题 2.3：设 H 为 Hopf 代数，余代数 C 为左 H -余模，其中余模结构映射为 $\rho_C:C\to H\otimes C$，那么 C 为左 H -余模余代数的充分必要条件是 C 的余乘 Δ 和余单位 ε 都是余模同态。

证明：易知，作为 H -余模余代数的条件(CC2)和(CC3)，分别等价于下列等式：

$$\left(M_H\otimes 1\otimes 1\right)(1\otimes T\otimes 1)(\rho\otimes\rho)\Delta_C=\left(1\otimes\Delta_C\right)\rho_C \tag{2.5}$$

$$\left(1\otimes\varepsilon_C\right)\rho_C=\left(u_H\otimes 1\right)l\varepsilon_C \tag{2.6}$$

其中 $l:K\to K\otimes K$ 为同构映射。

另一方面，由于 $M_H:H\otimes H\to H$ 和 $u_H:K\to H$ 都是余代数同态，故知 $C\otimes C$ 和 K 均为左 H -余模，它们的余模结构映射分别为：

$$\rho_{C\otimes C}=\left(M_H\otimes 1\otimes 1\right)(1\otimes T\otimes 1)\left(\rho_c\otimes\rho_c\right),\rho_K=\left(u_H\otimes 1\right)l$$

由此可知，

$\Delta:C\to C\otimes C$ 构成左 H -余模同态当且仅当 $\rho_{C\otimes C}\Delta_C=\left(1\otimes\Delta_C\right)\rho_C$，即(2.5)成立；$\varepsilon:C\to K$ 构成左 H -

余模同态当且仅当 $(1\otimes\varepsilon_C)\rho_C=\rho_K\varepsilon_C$，即(2.6)成立。 □

在 H -模代数的讨论中我们曾引入了 Smash 积的概念，在 H -余模余代数中我们也可以对偶地讨论 Smash 余积。

定义 2.2 设 H 为 Hopf 代数，C 是一个左 H -余模余代数，那么可以构造 C 和 H 的 Smash 余积 $C*H$，其中，作为 K -空间，$C*H=C\otimes H$，$C*H$ 中的元素记为 $c*h$。另外，在 $C*H$ 中定义余乘

$$\Delta:C*H\to(C*H)\otimes(C*H),\Delta(c*h)=\sum\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)}*h_{(2)}\right),$$

以及余单位 $\varepsilon:C*H\to K,\varepsilon(c*h)=\varepsilon(c)\varepsilon(h)$。

定理 2.2：设 H 为 Hopf 代数，C 为左 H -余模余代数，那么 Smash 余积 $C*H$ 关于给定的余乘和余单位构成一个余代数。

$$(\Delta\otimes1)\Delta(c*h)=\sum\Delta\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)}*h_{(2)}\right)$$

证明：

$$\begin{aligned}
&=\sum\left(c_{(1)(1)}*c_{(1)(2)(-1)}\left(c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(1)(2)(0)}*\left(c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)_{(2)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)}*h_{(2)}\right)\\
&=\sum\left(c_{(1)(1)}*c_{(1)(2)(-1)}c_{(2)(-1)(1)}h_{(1)(1)}\right)\otimes\left(c_{(1)(2)(0)}*c_{(2)(-1)(2)}h_{(1)(2)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)}*h_{(2)}\right)\\
&=\sum\left(c_{(1)(1)}*c_{(1)(2)(-1)}c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(1)(2)(0)}*c_{(2)(0)(-1)}h_{(2)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)(0)}*h_{(3)}\right)\\
&=\sum\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}c_{(3)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)}*c_{(3)(0)(-1)}h_{(2)}\right)\otimes\left(c_{(3)(0)(0)}*h_{(3)}\right)\\
&=\sum\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)(1)}*c_{(2)(0)(2)(-1)}h_{(2)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)(2)(0)}*h_{(3)}\right)
\end{aligned}$$

$$(1\otimes\Delta)\Delta(c*h)=\sum\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\Delta\left(c_{(2)(0)}*h_{(2)}\right)$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&=\sum\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)(1)}*c_{(2)(0)(2)(-1)}h_{(2)(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)(2)(0)}*h_{(2)(2)}\right)\\
&=\sum\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)(1)}*c_{(2)(0)(2)(-1)}h_{(2)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)(2)(0)}*h_{(3)}\right)
\end{aligned}$$

所以，$(\Delta\otimes1)\Delta(c*h)=(1\otimes\Delta)\Delta(c*h)$。

最后，

$$\begin{aligned}
(\varepsilon\otimes1)\Delta(c*h)&=\sum\varepsilon\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)(0)}*h_{(2)}\right)\\
&=\sum\varepsilon\left(c_{(1)}\right)\varepsilon\left(c_{(2)(-1)}\right)\varepsilon\left(h_{(1)}\right)\left(c_{(2)(0)}*h_{(2)}\right)\\
&=\sum\varepsilon\left(c_{(1)}\right)\left(\varepsilon\left(c_{(2)(-1)}\right)c_{(2)(0)}*h\right)\\
&=\sum\varepsilon\left(c_{(1)}\right)\left(c_{(2)}*h\right)=c*h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1\otimes\varepsilon)\Delta(c*h)&=\sum\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\otimes\varepsilon\left(c_{(2)(0)}*h_{(2)}\right)\\
&=\sum\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}h_{(1)}\right)\varepsilon\left(c_{(2)(0)}\right)\varepsilon\left(h_{(2)}\right)\\
&=\sum\left(c_{(1)}*c_{(2)(-1)}\varepsilon\left(c_{(2)(0)}\right)h_{(1)}\varepsilon\left(h_{(2)}\right)\right)\\
&=\sum c_{(1)}*\varepsilon\left(c_{(2)}\right)h=c*h
\end{aligned}$$

所以，$(\varepsilon\otimes1)\Delta=1,(1\otimes\varepsilon)\Delta=1$. □

已知当 M 是左 C^* -模时，那么 M^* 必然能成为右 C^* -模。习惯上记 M^r 为 M^* 中的最大有理子模(或 M^* 中所有有限维子模的和)。

定理 2.3：设 H 为 Hopf 代数，那么

(1) C 是一个左 H -余模余代数，则 C^r 是一个右 H -余模代数；

(2) A是一个有限维的左H-余模代数，则A^*是一个右H-余模余代数。

证明：因为A是一个有限维的，所以$A^*=A^0$，(2)的证明显然[5]。

(1) 只需证明C^r是C^*的子代数即可。

设余模C的结构映射为ρ，令$\left(C^r,\rho^r\right)$是C^r的余模结构并给出赋值映射$\overline{\overline{\ }}:C\to C^{**}$，其中$\overline{\overline{c}}\left(c^*\right)=c^*\left(c\right),\forall c\in C,\forall c^*\in C^*$。如果由有理模的定义可知$c^*\in C^*$，那么$c^*\in C^r\Leftrightarrow$存在$\rho^r_{c^*}\in C^*\otimes H$使得

$$\left(\overline{\overline{c}}\otimes I_H\right)\left(\rho^r_{c^*}\right)=\left(I_H\otimes c^{\otimes}\right)\left(\rho\left(c\right)\right),\forall c\in C$$

由有理模的性质可知，这里$\rho^r_{c^*}=\rho^r\left(c^*\right)$。又条件$\sum c_{(-1)}\varepsilon\left(c_{(0)}\right)=\varepsilon\left(c\right)1_H,\forall c\in C$表明存在$\rho^r_\varepsilon\in C^*\otimes H$使得$\rho^r\left(\varepsilon\right)=\varepsilon\otimes 1$，即单位元$\varepsilon\in C^r$。

设$f,g\in C^r$，那么$\forall c\in C$

$$\begin{aligned}\sum c_{(-1)}\left\langle fg,c_{(0)}\right\rangle&=\sum c_{(-1)}\otimes\left\langle f,c_{(0)(1)}\right\rangle\left\langle g,c_{(0)(2)}\right\rangle\\&=\sum c_{(1)(-1)}c_{(2)(-1)}\left\langle f,c_{(1)(0)}\right\rangle\left\langle g,c_{(2)(0)}\right\rangle\\&=\sum\left\langle f_{(0)},c_{(1)}\right\rangle\left\langle g_{(0)},c_{(2)}\right\rangle f_{(1)}g_{(1)}\end{aligned}$$

这表明$\rho^r_{fg}=f_{(0)}g_{(0)}\otimes f_{(1)}g_{(1)}$存在，即$C^r$对乘法封闭。 □

3. 主要定理

如果$\left(M,\rho\right)$为左C-余模，那么M就是有理右C^*-模；同时$\left(M^*,\gamma\right)$也是左C^*-模，其中模的结构映射是限制$\gamma=\rho^*\big|_{C^*\otimes M^*}$。

定理3.1：设C是K-余代数。如果C是左H-余模余代数，将H^*对左H^*-模$\left(C^*,\cdot\right)$的作用限制在H^0上，那么

(1) 作为代数并具有左H^0-模结构的$\left(C^*,\cdot\right)$是一个左H^0-模代数；

(2) 同态单射$\eta:C^*\#H^0\to\left(C*H\right)^*$是一个代数同态，其中$\eta\left(c^*\#h^0\right)=c^*\otimes h^0$。

证明：(1) 显然，只需证明(MA1)，(MA2)成立即可。$\forall h^0\in H^0,\forall c^*,d^*\in C^*,\forall c\in C$

$$\begin{aligned}\left(h^0\cdot\left(c^*d^*\right)\right)\left(c\right)&=\sum h^0\left(c_{(-1)}\right)\left(c^*d^*\left(c_{(0)}\right)\right)\\&=\sum h^0\left(c_{(-1)}\right)c^*\left(c_{(0)(1)}\right)d^*\left(c_{(0)(2)}\right)\\&=\sum h^0\left(c_{(1)(-1)}c_{(2)(-1)}\right)c^*\left(c_{(1)(0)}\right)d^*\left(c_{(2)(0)}\right)\\&=\sum h^0_{(1)}\left(c_{(1)(-1)}\right)h^0_{(2)}\left(c_{(2)(-1)}\right)c^*\left(c_{(1)(0)}\right)d^*\left(c_{(2)(0)}\right)\\&=\sum\left(h^0_{(1)}\cdot c^*\right)\left(c_{(1)}\right)\left(h^0_{(2)}\cdot d^*\right)\left(c_{(2)}\right)\\&=\sum\left(\left(h^0_{(1)}\cdot c^*\right)\left(h^0_{(2)}\cdot d^*\right)\right)\left(c\right)\end{aligned}$$

所以，(MA1)成立。

$$\begin{aligned}\left(h^0\cdot\varepsilon\right)\left(c\right)&=\sum h^0\left(c_{(-1)}\right)\varepsilon\left(c_{(0)}\right)\\&=\sum h^0\left(\varepsilon\left(c\right)1\right)\\&=h^0\left(1\right)\varepsilon\left(c\right)\end{aligned}$$

即，(MA2)成立。

(2) 由定理 2.2 可知 $C*H$ 是余代数，进而 $(C*H)^*$ 是一个代数；显然 $C^*\#H^0$ 是个代数。而 η 的单射性是自然的。现只需论证 η 保持单位元和乘法即可，而等式的验证工作较易。 □

设 A 为左 H-模代数，H 的反极元为 S。注意到 $i:A\to A\#H, i(a)=a\#1, \forall a\in A$ 和 $j:H\to A\#H$，$j(h)=1\#h$，$\forall h\in H$ 都是代数同态，易知当 I 是 $A\#H$ 的余有限维理想，则 $J=i^{-1}(I)$ 及 $L=j^{-1}(I)$ 分别是 A 和 H 的余有维限理想。而且 A 的余有限维理想 J 还是 A 的左 H-子模，因为 $\forall a\in A, \forall h\in H$，

$$
\begin{aligned}
i(h\cdot a) &= h\cdot a\#1=\sum h_{(1)}\cdot a\#h_{(2)}S\left(h_{(3)}\right) \\
&= \sum\left(1\#h_{(1)}\right)\left(a\#S\left(h_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum\left(1\#h_{(1)}\right)(a\#1)\left(1\#S\left(h_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum\left(1\#h_{(1)}\right)i(a)\left(1\#S\left(h_{(2)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

另外，由于 A^0 是含在 A^* 内的余代数，设 $A^{\square}=\left\{f \mid f\in A^0, f(I)=o\right\}$，$I$ 是 A 的某个余有限维理想而且还是 A 的左 H-子模，那么 $A^{\square}$ 是 A^0 的子余代数，这是因为作为 $(A\otimes H)^*$ 的子模 $(A\#H)^0\subseteq A^{\square}\otimes H^0$，所以有

$$
I\subseteq i(J)(1\#H)+(A\#1)j(L)=J\#H+A\#L
$$

定理 3.2：设 A 是左 H-模代数。模结构映射 $\mu:H\otimes A\to A, \mu(h\otimes a)=h\cdot a$。那么

(1) $\mu^*\left(A^{\square}\right)\subseteq H^0\otimes A^{\square}$ 且 $\left(A^{\square},\rho\right)$ 形成一个左 H^0-余模，其中 $\rho=\mu^*\big|_{A^{\square}}$ 是一个限制；

(2) 余模 $A^{\square}$ 是一个左 H^0-余模余代数；

(3) 嵌入映射 $(A\#H)^0\to A^{\square}*H^0$ 是一个余代数同构。

证明：(1)设 $a^0\in A^{\square}$，那么存在 A 的某个余有限维理想 I 使得 $a^0(I)=o$。所以 $\mu^*\left(a^0\right)$ 自然能零化 $H\otimes I$，这说明，$\mu^*\left(a^0\right)\in(H\otimes I)^{\perp}=H^*\otimes I^{\perp}\subseteq H^*\otimes A^{\square}$。设 $\mu^*\left(a^0\right)\neq o$，那么 $\mu^*\left(a^0\right)=\sum_{i=1}^{s} f_i\otimes a_i^0$，$f_i\in H^*$，$a_i^0\in A^{\square}$，其中 s 是该等式成立的最小正整数。进而易知：$\left\{a_1^0,a_2^0,\cdots,a_s^0\right\}$ 是线性无关，令 $J=\bigcap_{i=1}^{S} Ker\left(f_i\right)$，那么 J 自然就是 H 的余有限维子空间，则有

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} f_i(hk)a_i^0 &= a^0(hk\cdot a)=a^0(h\cdot(k\cdot a)) \\
&= \sum_{i=1}^{s} f_i(h)a_i^0(k\cdot a)
\end{aligned}
$$

这表明 J 是 H 的右理想。所以 $f_1,f_2,\cdots,f_s\in H^0$，即 $\mu^*\left(A^{\square}\right)\subseteq H^0\otimes A^{\square}$。

最后，$\forall a^0\in A^{\square}$

$$
\begin{aligned}
\left(I_{H^0}\otimes\rho\right)\rho\left(a^0\right) &= \sum a_{(-2)}^0\otimes a_{(-1)}^0\otimes a_{(0)}^0 \\
&= \sum\Delta_{H^0}\left(a_{(-1)}^0\right)\otimes a_{(0)}^0 \\
&= \sum\left(\Delta_{H^0}\otimes I_{A^{\square}}\right)\left(a_{(-1)}^0\otimes a_{(0)}^0\right) \\
&= \left(\Delta_{H^0}\otimes I_{A^{\square}}\right)\rho\left(a^0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\varepsilon_{H^0} \otimes I_{A^{\square}}\right)\rho\left(a^0\right) &= \sum\left(\varepsilon_{H^0} \otimes I_{A^{\square}}\right)\left(a^0_{(-1)} \otimes a^0_{(0)}\right) \\
&= \sum \varepsilon_{H^0}\left(a^0_{(-1)}\right)a^0_{(0)} \\
&= a^0
\end{aligned}
$$

所以，$\left(A^{\square},\rho\right)$构成一个左$H^0$-余模。

(2) 欲证左H^0-余模$A^{\square}$是一个左H^0-余模余代数，关键是证明(CC2)~(CC3)都成立。事实上，$\forall a^0 \in A^{\square}$，$\forall h \in H$，$\forall a,b \in A$，于是有

$$
\begin{aligned}
a^0\left(h\cdot(ab)\right) &= \sum a^0\left(\left(h_{(1)}\cdot a\right)\left(h_{(2)}\cdot b\right)\right) \\
&= \sum a^0_{(1)}\left(h_{(1)}\cdot a\right)a^0_{(2)}\left(h_{(2)}\cdot b\right) \\
&= \sum a^0_{(1)(-1)}\left(h_{(1)}\right)a^0_{(2)(-1)}\left(h_{(2)}\right)a^0_{(1)(0)}(a)\,a^0_{(2)(0)}(b) \\
&= \sum a^0_{(1)(-1)}a^0_{(2)(-1)}(h)\,a^0_{(1)(0)}(a)\,a^0_{(2)(0)}(b)
\end{aligned}
$$

另一方面，还可以有

$$
\begin{aligned}
a^0\left(h\cdot(ab)\right) &= \sum a^0_{(-1)}(h)\,a^0_{(0)}(ab) \\
&= \sum a^0_{(-1)}(h)\,a^0_{(0)(1)}(a)\,a^0_{(0)(2)}(b)
\end{aligned}
$$

这就恰好表明

$$
\sum a^0_{(1)(-1)}a^0_{(2)(-1)} \otimes a^0_{(1)(0)} \otimes a^0_{(2)(0)} = \sum a^0_{(-1)} \otimes a^0_{(0)(1)} \otimes a^0_{(0)(2)}
$$

即，(CC2)成立。而(CC3)成立是显然的，因为易知有$\sum a^0_{(-1)}\varepsilon_{A^{\square}}\left(a^0_{(0)}\right) = \varepsilon_{A^{\square}}\left(a^0\right)1_{H^0}$。

(3) 显然，$\varepsilon_{(A\otimes H)^0} = \varepsilon_{A^{\square}*H^0}$。另外，$\forall a,b \in A, \forall h,k \in H, a^0 \otimes h^0 \in (A\otimes H)^*$我们有

$$
\begin{aligned}
\left\langle a^0 \otimes h^0, (a\otimes h)(b\otimes k)\right\rangle &= \sum\left(a^0 \otimes h^0\right)\left(a\left(h_{(1)}\cdot b\right)\otimes h_{(2)}k\right) \\
&= \sum a^0_{(1)}(a)\,a^0_{(2)}\left(h_{(1)}\cdot b\right)h^0_{(1)}\left(h_{(2)}\right)h^0_{(2)}(k) \\
&= \sum a^0_{(1)}(a)\,a^0_{(2)(-1)}\left(h_{(1)}\right)a^0_{(2)(0)}(b)\,h^0_{(1)}\left(h_{(2)}\right)h^0_{(2)}(k) \\
&= \sum a^0_{(1)}(a)\,a^0_{(2)(-1)}h^0_{(1)}(h)\,a^0_{(2)(0)}(b)\,h^0_{(2)}(k) \\
&= \sum\left\langle a^0_{(1)} \otimes a^0_{(2)(-1)}h^0_{(1)}, a\otimes h\right\rangle\left\langle a^0_{(2)(0)} \otimes h^0_{(2)}, b\otimes k\right\rangle
\end{aligned}
$$

所以，$\Delta_{a^0\otimes h^0} = \left(a^0_{(1)} \otimes a^0_{(2)(-1)}h^0_{(1)}\right)\otimes\left(a^0_{(2)(0)} \otimes h^0_{(2)}\right)$。 □

基金项目

广西研究生教育创新计划资助项目(JGY2014092)；广东科技学院科研项目及青年项目(GKY-2016KYYB-15, GKY-2017KYQN-4)；广东科技学院2016年“质量工程”项目。

参考文献 (References)

[1] Sweedle, M.E. (1969) Hopf Algebra. Benamin, New York.

[2] Cohen, M. (1986) Hopf Algebra Actions. *Journal of Algebra*, **100**, 363-379. https://doi.org/10.1016/0021-8693(86)90082-7

[3] Montgomery, S. (1993) Hopf Algebras and Their Actions on Rings. CBMS Regional Conference Series in Math, 82,

Amer. Math. Soc., Providence.

[4] Blattner, R.J., Cohen, M. and Montgomery S. (1986) Crossed Products and Inner Actions Hopf Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, **298**, 671-711. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1986-0860387-X

[5] Zhang, Z.H., Wang, Z.W., Ren, B.S. and Zhang, L.Y. (2013) The Structure of Weak Hopf Module Coalgebras. *Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly*, **30**, 1-12.