Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(1), 91-94**
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.71011

Hans汉斯

Fuzzy Number Expands to a Power Series of Triangular Fuzzy Number

Hangliang Li, Huili Pei

College of Mathematics and Information Science, Key Laboratory of Machine Learning and Computational Intelligence, Hebei University, Baoding Hebei
Email: lihongliang003@126.com

Received: Dec. 22nd, 2017; accepted: Jan. 19th, 2018; published: Jan. 26th, 2018

Abstract

In this paper, it is studied that fuzzy number expands to power series of triangular fuzzy numbers. By introducing the definition of H-difference imaginary fuzzy number, the H difference between the fuzzy numbers can be calculated as the form. And then it is shown that formula of fuzzy number expands to power series of triangular fuzzy numbers.

Keywords

Power Series of Triangular Fuzzy Numbers, H-Difference Imaginary Fuzzy Number, Power Series Expansion

模糊数的三角模糊数幂级数展开

李洪亮，裴慧丽

河北大学，数学与信息科学学院，机器学习与人工智能重点实验室，河北 保定
Email: lihongliang003@126.com

收稿日期：2017年12月22日；录用日期：2018年1月19日；发布日期：2018年1月26日

摘　要

本文研究了模糊数表示成三角模糊数的幂级数问题。通过引入H差虚模糊数，使得模糊数之间的H差可以作形式计算，进而得到了模糊数展开成三角模糊数幂级数的公式。

关键词

三角模糊数幂级数，H差虚模糊数，幂级数展开

文章引用: 李洪亮, 裴慧丽. 模糊数的三角模糊数幂级数展开[J]. 应用数学进展, 2018, 7(1): 91-94.
DOI: 10.12677/aam.2018.71011

1. 引言

自从模糊数的概念 1972 年被 Chang 提出，很多模糊分析学家对相关研究问题给予了很大的关注，并做出了很多贡献[1] [2] [3]。2009 年，Mila Stojaković [4]研究了特定条件下的模糊集项级数，扩大了研究对象的范围，即将模糊数水平集的闭性和紧性换成了弱闭性和弱紧性，得到了更加广泛的结论。

本文主要研究了模糊数项级数求和的反问题，研究了在一定条件下，模糊数展开成三角模糊数幂级数的展开公式问题。该问题的解决有助于模糊数的近似表示，以及计算机储存问题。

2. 预备知识

记 E 为模糊数空间。对 $u\in E$，令 $[u]^r=\{x\in R:u(x)\ge r\}$，$r\in(0,1]$，$[u]^0=cl\{x\in R:u(x)>0\}$。称 $[u]^r$ 为水平集，记为 $[L_u(r),R_u(r)]$。根据模糊数的定义可知 $L_u(r)$ 为关于水平 r 的单调递增函数，$R_u(r)$ 为关于水平 r 的单调递减函数，$r\in[0,1]$。根据 Zadeh 扩张原理得到的加法运算，若存在模糊数 w 使得 $w+v=u$，则称 u,v 的 H 差存在，称 w 为 u,v 的 H 差，记为 $u-_h v=w$。记 $\hat{a}$ 为隶属函数是单点集合 $\{a\}$ 特征函数的模糊数。

定理 2.1 [5]：如果 $u,v\in E$，$k\in R$，则 $[u+v]^r=[u]^r+[v]^r=[L_u(r)+L_v(r),R_u(r)+R_v(r)]$，并且 $k\ge 0$ 时，$[ku]^r=k[u]^r=[kL_u(r),kR_u(r)]$，$k<0$ 时 $[ku]^r=k[u]^r=[kR_u(r),kL_u(r)]$。

定理 2.2 [5]：如果 $u,v\in E$，$u-_h v$ 存在，则 $[u-_h v]^r=[L_u(r)-L_v(r),R_u(r)-R_v(r)]$。

3. 模糊数的三角模糊数幂级数展开

根据参考文献[6]的论证可知：模糊数的 H 差可能不存在，并且 Zadeh 扩张原理下，模糊数的线性组合无法表示 H 差，这使得含有 H 差的算式不能利用线性组合表示。为了计算表达的便捷性，我们引入下述概念：

定义 3.1：如果 $u,v\in E$，记 $u-_h v=u+(-1)*v$，称 $(-1)*v$ 为 H 差虚模糊数。

定理 3.1：如果 $u\in E$，则 $[(-1)*u]^r=[-L_u(r),-R_u(r)]$。

证明：根据定理 2.1 和定理 2.2 可得。

对于任意的 $u\in E$，$r\in[0,1]$，有 $L_u(r)\le R_u(r)$，因此 $[-L_u(r),-R_u(r)]$ 并不存在。可知 $(-1)*v$ 是不存在的，只是一个形式符号。

记 $L(u)=u\cap[L_u(0),L_u(1)]$，$R(u)=u\cap[R_u(1),R_u(0)]$，因此 $u=L(u)\cup[L_u(1),R_u(1)]\cup R(u)$，为了表述方便，这里我们称 $L(u),R(u)$ 分别称为模糊数 u 的左部和右部，根据定义可知，$L(u),R(u)$ 均为模糊数。

定理 3.2：如果 $u_n\in E$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nu_n$ 收敛，则 $\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nu_n\right]^r=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nL_{u_n}(r),\sum_{n=0}^{\infty}a_nR_{u_n}(r)\right]$，其中 $a_n<0$ 时，模糊数的运算为 H 差。

证明：根据定理 2.1，定理 2.2，以及文献[5]中的定理 7，可知结论成立。

定理 3.3：对 $u\in E$，任意的 $r\in[0,1]$，$L_u(r)$ 关于变量 r 能展开成麦克劳林级数，则

$L(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!a^n}*(0,a,a)^n$，其中$(0,a,a)$为三角模糊数。

证明：设三角模糊数$v=(a_1,a_2,a_2)$，根据已知及定理3.2，可知对任意的$r\in[0,1]$，有

$$L_u(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!}r^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{L_v(r)-a_1}{a_2-a_1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!}\frac{1}{(a_2-a_1)^n}(L_v(r)-a_1)^n$$

$$R_u(r)=L_u(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)\cdot 1^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{a_2-a_1}{a_2-a_1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!}\frac{1}{(a_2-a_1)^n}(L_v(1)-a_1)^n$$

根据定理2.1和定理2.2，可知$\left[(a_1,a_2,a_2)-_h\hat{a}_1\right]^r=\left[L_v(r)-a_1,L_v(1)-a_1\right]$，对任意的$r\in[0,1]$成立。因此

$$L(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!}*\frac{1}{(a_2-a_1)^n}\left((a_1,a_2,a_2)-_h\hat{a}_1\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{(a_2-a_1)^n n!}*(0,a_2-a_1,a_2-a_1)^n$$

其中$\frac{L_u^{(n)}(0)}{(a_2-a_1)^n n!}$为正数时，$*$运算表示模糊数的数乘运算，$\frac{L_u^{(n)}(0)}{(a_2-a_1)^n n!}$为负数时，$*$运算表示H差虚模糊数运算。记$a=a_2-a_1$，由此可知$L(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!a^n}*(0,a,a)^n$。

定理3.4：对$u\in E$，任意的$r\in[0,1]$，$R_u(r)$关于变量r能展开成麦克劳林级数，则

$R(u)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-R_u^{(n)}(0)}{n!a^n}*(0,a,a)^n$，其中$(0,a,a)$为三角模糊数。

证明：根据定理2.1及左部右部的定义，$R(u)=-L(-u)$，并且有$L_{-u}(0)=-R_u(0)$，根据定理3.3，可知

$$R(u)=-L(-u)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{-u}^{(n)}(0)}{n!a^n}*(0,a,a)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-R_u^{(n)}(0)}{n!a^n}*(0,a,a)^n$$

其中，连加号前面的负号表示模糊数的数乘。

定理3.5：对$u\in E$，任意的$r\in[0,1]$，$L_u(r)$与$R_u(r)$能展开成麦克劳林级数，则

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!a^n}*(0,a,a)^n\cup\left[L_u(1),R_u(1)\right]\cup\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-R_u^{(n)}(0)}{n!a^n}*(0,a,a)^n\right)$$

证明：根据定理3.3和定理3.4及模糊数左部右部的定义可知结论成立。

4. 模糊数展开成三角模糊数幂级数的应用

例4.1：设模糊数u的$L_u(r)=\sin r$，$R_u(r)=\sin 1$，利用三角模糊数近似表示u，并估计误差。

解：根据u的隶属函数可知，$u=L(u)$。利用定理3.3，可得

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_u^{(n)}(0)}{n!a^n}*(0,a,a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{(n)}(0)}{n!a^n}*(0,a,a)^n\approx\frac{1}{a}*(0,a,a)+\frac{-1}{3!a^n}*(0,a,a)^3$$

取$a=1$，则有$u\approx(0,1,1)+\frac{-1}{3!}*(0,1,1)^3=(0,1,1)-_h\frac{1}{3!}*(0,1,1)^3$，根据[6]中的结论可知，上述H差存在。而实际上

$$u=(0,1,1)-_h\frac{1}{3!}*(0,1,1)^3+\frac{1}{5!}*(0,1,1)^5-_h\frac{1}{7!}*(0,1,1)^7+\cdots$$

根据[5]中关于收敛模糊数项级数的结论可知，该模糊数项级数收敛，取前两项作为 u 的近似值，上确界度量下的误差 $|r_2|\le\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$。

5. 总结

本文通过引入 H 差虚模糊数的概念，使得多个模糊数的连加连减运算可以做形式运算。虽然有些中间结果是 H 差虚模糊数，但最终的运算结果仍可能是模糊数。这使得三角模糊数项级数的表达式可以涵盖某些项是 H 差虚模糊数的情况，大大强化了三角模糊数项级数的表示能力。这里还证明了一般的模糊数展开成三角模糊数项级数公式，即定理 3.5。这个结论为模糊数的近似计算，以及在计算机中的储存提供了工具。比如例 4.1 中的模糊数 u 可以近似储存为向量 $\left(0,1,1,0,1,0,\frac{-1}{3!}\right)$，这样在计算机中储存模糊数比直接储存模糊数的隶属函数简化了，更便于模糊数在计算机中的应用。

基金项目

国家自然科学基金项目(61572011)；河北省自然科学基金项目(F2016201161)；河北省高等学校科学技术研究重点项目(ZD2017005)；河北省教育厅青年基金(QN2014039)。

参考文献 (References)

[1] Diamond, P. and Kloeden, P.E. (1994) Metric Space of Fuzzy Sets-Theory and Applications. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/2326

[2] 吴从炘, 马明. 模糊分析学基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.

[3] 吴从炘, 马明, 方锦暄. 模糊分析学的结构理论[M]. 贵阳: 贵州科技出版社, 1994.

[4] Stojaković, M. and Stojaković, Z. (2009) Series of Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **160**, 3115-3127. https://doi.org/10.1016/j.fss.2008.12.013

[5] 李洪亮, 裴慧丽, 欧芳芳. 模糊数项级数的收敛性[J]. 哈尔滨商业大学学报, 2012, 33(2): 212-213.

[6] 李洪亮, 裴慧丽, 何强, 西正明. 关于模糊数 H 差的存在性的讨论[J]. 模糊系统与数学, 2015, 29(3): 119-122.