Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(12), 1543-1548
Published Online December 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.712180

Signed Total Domination Number of Graphs

Xia Hong, Feng Gao, Caihuan Zhang, Chunyan Wei

Department of Mathematics, Luoyang Normal University, Luoyang Henan
Email: 05shumenghongxia@163.com

Received: Nov. 16th, 2018; accepted: Dec. 6th, 2018; published: Dec. 13th, 2018

Abstract

Let $G=(V,E)$ be a graph and denotes $f(S)=\sum_{v\in S} f(v)$ for $S\subseteq V$. A function $f:V\to\{-1,+1\}$ is said to be a signed total domination function (STDF), if $f(N(v))\geq 1$ for $v\in V$. The signed total domination number is $\gamma_{st}(G)=\min\{f(V)|f \text{ is an STDF of } G\}$. In this paper, a lower bound of the signed total domination number are obtained and we determine a exact value of signed total domination number of two classes graphs generalized Petesen graph $P(n,k)$ and Double generalized Petesen graph $DP(n,k)$ by exhaustived method and classified discussion, where $n\equiv 0(\text{mod } 3)$, $k\neq 0(\text{mod } 3)$.

Keywords

Signed Total Domination Function, Signed Total Domination Number, Generalized Petesen Graph $P(n,k)$, Double Generalized Petesen Graph $DP(n,k)$

图的符号全控制数

红　霞，高　峰，张彩环，魏春艳

洛阳师范学院数学科学学院，河南 洛阳
Email: 05shumenghongxia@163.com

收稿日期：2018年11月16日；录用日期：2018年12月6日；发布日期：2018年12月13日

摘　要

设图$G=(V,E)$为一个图，一个双值函数$f:V\to\{-1,+1\}$，若$S\subseteq V$，则记$f(S)=\sum_{v\in S} f(v)$。如果对任意的顶点$v\in V$，均有$f(N(v))\geq 1$成立，则称f为图G的一个符号全控制函数。图G的符号全控制数定

文章引用: 红霞, 高峰, 张彩环, 魏春艳. 图的符号全控制数[J]. 应用数学进展, 2018, 7(12): 1543-1548.
DOI: 10.12677/aam.2018.712180

义为 $\gamma_{st}(G)=\min\{f(V)|f是图G的一个符号全控制函数\}$。本文首先给出一般图的符号全控制数的下界，然后用分类讨论和穷标法得到了两类图广义Petesen图 $P(n,k)$ 和Double广义Petesen图 $DP(n,k)$ 的符号全控制数的精确值，这里 $n\equiv 0(\bmod 3), k\neq 0(\bmod 3)$。

关键词

符号全控制函数，符号全控制数，广义Petesen图 $P(n,k)$，Double广义Petesen图 $DP(n,k)$

1. 引言

本文所指定的图均为无向简单图，文中未说明的符号和术语同文献[1]。设 $G=(V,E)$ 是一个图，其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$。对任意 $u\in V(G)$，则 $N_G(u)$ 表示为 u 点在 G 中的领域，$N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ 为 u 点在 G 中的闭领域，$d_G(u)=|N_G(u)|$ 为 u 点在 G 中的度，而 $\delta=\delta(G)$ 和 $\Delta=\Delta(G)$ 分别为图 G 的最小度和最大度。在不致混淆情况下，可将 $N_G(u),N_G[u],\delta(G),\Delta(G)$ 分别简单记为 $N(u),N[u],\delta,\Delta$。图 G 中两个顶点 u 和 v 之间的距离指连接这两个点的最短路的长度，记为 $d(u,v)$。

近几十年来，图的控制理论的研究内容越来越丰富，各种类型的符号控制数以及其变化的形式依次被提出，如图的符号控制数[2] [3] [4]、图的边符号控制数[5]、图的边全符号控制数[5]、图的符号全控制数[6] [7]、图的星符号控制数[5]、图的团符号(边)控制数[5]、图的逆符号(边)控制数[5]、图的反符号(边)控制数[5]、图的圈符号(边)控制数[8]、罗曼符号(边)控制数[9] [10]等。其中首次被提出的是图的符号控制概念，由 J E Dunbar 等人在 1995 年提出。图的符号控制数的研究有着广泛的应用背景，如交通岗位、物资供应点的设置等，但是符号控制数的计算是 NP 完全问题。

目前很多相关学者研究了关于图的符号全控制数的上下界[11] [12]以及特殊图的符号全控制数的精确值[13]。本文中主要得到了符号全控制数的一个下界以及两类图广义Petesen图 $P(n,k)$ 和Double广义Petesen图 $DP(n,k)$ 的符号全控制数的精确值，这里 $n\equiv 0(\bmod 3)$, $k\neq 0(\bmod 3)$。

对于图 $G=(V,E)$，定义一个函数 $f:V\to R$ 和 G 的一个子集 $S\subseteq V$，记 $f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$。为简单起见，下文中适合 $f(u)=+1$ 的顶点称为+1 点，适合 $f(u)=-1$ 的顶点称为-1 点，用 Z_n 表示模 n 的剩余类。

2. 基本概念

定义 1 [6]：设图 $G=(V,E)$ 为一个图，一个双值函数 $f:V\to\{-1,+1\}$，若 $S\subseteq V$，则记 $f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$。

如果对任意的顶点 $v\in V$，均有 $f(N(v))\geq 1$ 成立，则称 f 为图 G 的一个符号全控制函数，图 G 的符号全控制数定义为 $\gamma_{st}(G)=\min\{f(V)|f是图G的一个符号全控制函数\}$ 并将使得 $\gamma_{st}(G)=f(V)$ 的符号全控制函数称 f 为图 G 的一个最小符号全控制函数。

从定义 1 可以看出以下性质。

性质：设 G 是 $n(n>1)$ 个顶点的简单图。若 $f=(V_{-1},V_{+1})$ 是图 G 一个最小符号全控制函数，则有以下结论成立。

i) $|V_{-1}|+|V_{+1}|=n$

ii) $\gamma_{st}(G)=|V_{+1}|-|V_{-1}|$

定义 2 [5]：设 n,k 都是正整数且 $n>2k$。广义 Petersen 图 $P(n,k)$ 是具有 $2n$ 个顶点的图，它的顶点集 $V(P(n,k))$ 和边集 $E(P(n,k))$ 分别为：

$$V(P(n,k))=\{u_1,u_2,\cdots,u_n,v_1,v_2,\cdots,v_n\}$$
$$E(P(n,k))=\{u_iu_{i+1},u_iv_i,v_iv_{i+k}\,|\,i\in Z_n\}$$

定义 3 [14]：设 n 和 k 是正整数且 $n\ge 3,2\le 2k<n$。Double 广义 Petesen 图 $DP(n,k)$ 是 $4n$ 个顶点的简单图，它的顶点集 $V(P(n,k))$ 和边集 $E(P(n,k))$ 分别为：

$$V(P(n,k))=\{x_i,u_i,v_i,y_i\,|\,i\in Z_n\}$$
$$E(P(n,k))=\{x_ix_{i+1},y_iy_{i+1},x_iu_i,y_iv_i,u_iv_{i+k},v_iu_{i+k}\,|\,i\in Z_n\}$$

显然，广义 Petersen 图 $P(n,k)$ 和 Double 广义 Petesen 图 $DP(n,k)$ 都是 3-正则图。

引理[6]：设 G 是一个 r-正则图。若 r 是奇数，则 $\gamma_{st}(G)\ge n/r$；若 r 是偶数，则 $\gamma_{st}(G)\ge 2n/r$。

3. 主要定理及其证明

定理 1：设图 G 是 $n(n>1)$ 个顶点的简单图。若 $f=(V_{-1},V_{+1})$ 是图 G 一个最小符号全控制函数，且 $\delta=\delta(G)\ge 1$，$\Delta=\Delta(G)$，则有以下结论成立。

i) $(\Delta-1)|V_{+1}|\ge(\delta+1)|V_{-1}|$；

ii) $|V_{+1}|\ge\dfrac{\delta+1}{\Delta+\delta}n$；

iii) $\gamma_{st}(G)\ge\dfrac{\delta+2-\Delta}{\Delta+\delta}n$；

证明：i) 假设 $f=(V_{-1},V_{+1})$ 是图 G 一个最小符号全控制函数，由性质，有

$$\begin{aligned}|V_{-1}|+|V_{+1}|=n&\le\sum\nolimits_{v\in V(G)}f(N(v))=\sum\nolimits_{v\in V(G)}d(v)f(v)\\&=\sum\nolimits_{v\in V_{+1}}d(v)-\sum\nolimits_{v\in V_{-1}}d(v)\le\Delta|V_{+1}|-\delta|V_{-1}|\end{aligned}$$

从而有

$$(\Delta-1)|V_{+1}|\ge(\delta+1)|V_{-1}|$$

ii) 由性质和 i)，推导出

$$(\Delta-1)|V_{+1}|\ge(\delta+1)(n-|V_{+1}|)=\delta n+n-\delta|V_{+1}|-|V_{+1}|$$

通过移项，得

$$|V_{+1}|\ge\frac{\delta+1}{\Delta+\delta}n$$

iii) 由性质和 i)，有

$$(\Delta+\delta)\gamma_{st}(G)=(\Delta+\delta)(2|V_{+1}|-n)\ge 2(\delta+1)n-(\Delta+\delta)n=(\delta+2-\Delta)n$$

故，有

$$\gamma_{st}(G)\ge\frac{\delta+2-\Delta}{\Delta+\delta}n$$

推论： 设 G 是一个 r-正则图，那么有 $\gamma_{st}(G) \ge \frac{n}{r}$。

注： 定理 1 的结果与引理的结论一致。

定理 2： 设图 G 是广义 Petersen 图 $P(n,k)$ 且 $n \equiv 0 \pmod 3, k \ne 0 \pmod 3$。那么

$$\gamma_{st}(P(n,k)) = \frac{2n}{3}$$

证明：令图 G 是广义 Petersen 图 $P(n,k)$，这里 $n \equiv 0 \pmod 3, k \ne 0 \pmod 3$。记

$$V(P(n,k)) = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$
$$E(P(n,k)) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} \mid i \in \mathrm{Z}_n\}$$

因此，有

$$|V(P(n,k))| = 2n, \ |E(P(n,k))| = 3n$$

由定理 1，有

$$\gamma_{st}(P(n,k)) \ge \frac{2n}{3}$$

下面我们定义图 G 的一个符号全控制数 f:

$$f(u_i) = \begin{cases} +1, \text{当} i \equiv 0, 2 \pmod 3 \\ -1, \text{当} i \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} +1, \text{当} i \equiv 0, 2 \pmod 3 \\ -1, \text{当} i \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

这里 $i \in \mathrm{Z}_n$

容易验证，对于每个顶点 $x \in V(G)$，有 $f(N(x)) = 1$。注意到此时图 G 中-1 点个数 t 为 $\frac{2n}{3}$，+1 点个数 s 为 $\frac{4n}{3}$。从而

$$f(V(G)) = s - t = \frac{2n}{3}$$

因此，有

$$\gamma_{st}(P(n,k)) \le \frac{2n}{3}$$

定理 2：证毕。

定理 3： 设图 G 是 Double 广义 Petesen 图 $DP(n,k)$ 且 $n \equiv 0 \pmod 3, k \ne 0 \pmod 3$。那么

$$\gamma_{st}(DP(n,k)) = \frac{4n}{3}$$

证明：令图 G 是 Double 广义 Petesen 图 $DP(n,k)$，这里 $n \equiv 0 \pmod 3, k \ne 0 \pmod 3$。记

$$V(P(n,k)) = \{x_i, u_i, v_i, y_i \mid i \in \mathrm{Z}_n\}$$
$$E(P(n,k)) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}, x_i u_i, y_i v_i, u_i v_{i+k}, v_i u_{i+k} \mid i \in \mathrm{Z}_n\}$$

因此，有

$$\left|V\left(P(n,k)\right)\right| = 4n,\ \left|E\left(P(n,k)\right)\right| = 5n$$

由定理 1，有

$$\gamma_{st}\left(P(n,k)\right) \geq \frac{4n}{3}$$

下面我们定义图 G 的一个符号全控制数 f:

$$f(x_i) = \begin{cases} +1, 当 i \equiv 0,2 \pmod 3 \\ -1, 当 i \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} +1, 当 i \equiv 0,2 \pmod 3 \\ -1, 当 i \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} +1, 当 i \equiv 0,2 \pmod 3 \\ -1, 当 i \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} +1, 当 i \equiv 0,2 \pmod 3 \\ -1, 当 i \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

这里 $i \in Z_n$

容易验证，对于每个顶点 $w \in V(G)$，有 $f\left(N(w)\right) = 1$。注意到此时图 G 中-1 点个数 t 为 $\frac{4n}{3}$，+1 点个数 s 为 $\frac{8n}{3}$。从而

$$f\left(V(G)\right) = s - t = \frac{4n}{3}$$

因此，有

$$\gamma_{st}\left(P(n,k)\right) \leq \frac{4n}{3}$$

定理 3 证毕。

基金项目

国家自然科学基金(No. 11701257, No.11801253, No. 11571005)，河南省教育厅高校重点项目(No. 18A110025, No. 18A110026)、河南省科技计划项目(182102310930, 182102310955)、(2017-JSJYYB-074)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1977) Graph Theory with Applications. Macmillan, London.

[2] Dunbar, J.E., Hedetniemi, S.T. and Al Henning, M. (2006) Signed Domination in Graphs. *Journal of Shanghai University*, **10**, 4-8.

[3] 尚华辉, 苗连英. 关于图的两类符号控制数的下界[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(21): 223-230.

[4] Zhang, Z.F., Xu, B.G. and Liu, L.Z. (1999) A Note on the Lower Bounds of Signed Domination Number of a Graph. *Discrete Mathematics*, **195**, 295-298. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(98)00189-7

[5] 徐保根. 图的控制与染色理论[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2013.

[6] Zelinka, B. (2001) Signed Total Domination Number of a Graph. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **51**, 225-229.

[7] Henning, M.A. (2004) Signed Total Domination in Graphs. *Discrete Mathematics*, **278**, 109-125. https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.06.002

[8] Xu, B.G. (2009) On Signed Cycle Domination Numbers in Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 1007-1012. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.01.007

[9] Volkmann, L. (2016) On the Signed Total Roman Domination and Domatic Numbers of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **214**, 179-186. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.06.006

[10] Asgharsharghi, L. and Sheikholeslami, S.M. (2017) Signed Total Roman Edge Domination in Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **37**, 1039-1053. https://doi.org/10.7151/dmgt.1984

[11] Moghaddam, S.M.H. (2016) New Bounds on the Signed Total Domination Number of Graphs. *Discussiones Mathematicae. Graph Theory*, **36**, 467-477. https://doi.org/10.7151/dmgt.1871

[12] 尚华辉, 谢凤艳. 关于图的两类符号全控制数[J]. 四川文理学院学报, 2016, 26(5): 17-20.

[13] Li, W.S., Xing, H.M. and Sohn, M.Y. (2013) On the Signed Total Domination Number of Generalized Petersen Graphs P(n,2). *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **50**, 2021-2026. https://doi.org/10.4134/BKMS.2013.50.6.2021

[14] Sakamoto, Y. (2019) Hamilton Cycles in Double Generalized Petersen Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **39**, 117-123. https://doi.org/10.7151/dmgt.2062