

# Reliability Model of Three Parts Series Repairable System

Ying Wang

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan  
Email: 2909642969@qq.com

Received: Dec. 24<sup>th</sup>, 2018; accepted: Jan. 14<sup>th</sup>, 2019; published: Jan. 21<sup>st</sup>, 2019

---

## Abstract

This paper studies the components that do not obey the exponential distribution, establishes the series repairable system model of three different types of components by supplementary variable method, and solves the instantaneous availability and steady availability by Laplace transform. The results of single component and double components are verified, and extended to  $n$  components series repairable systems and verified with special cases. Hope to be able to solve the relevant calculation of different component systems in real life.

## Keywords

Supplementary Variable Method, Laplace Transform, Steady State Availability

---

# 三部件串联可修系统的可靠性模型

王 盈

南华大学数理学院, 湖南 衡阳  
Email: 2909642969@qq.com

收稿日期: 2018年12月24日; 录用日期: 2019年1月14日; 发布日期: 2019年1月21日

---

## 摘 要

本文针对不服从指数分布的部件进行研究, 通过补充变量法建立三个不同型部件串联可修系统模型, 并通过拉普拉斯变换求解其瞬时可用度与稳态可用度。再对单、双部件结果进行验证, 推广至 $n$ 部件串联可修系统并取特例进行验证。希望能解决现实生活中关于不同型部件系统的相关计算。

## 关键词

补充变量法, 拉普拉斯变换, 稳态可用度

Copyright © 2019 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

系统是指由一些基本部件(其中也可以包括人)组成的完成某种指定功能的整体[1]。根据部件之间的关系, 可将系统分为串联系统, 并联系统等。串(并)联系统类似物理学上的串(并)联电路。若有  $n$  个部件构成串联系统, 当且仅当  $n$  个部件均正常工作时系统正常。若有  $n$  个部件构成并联系统, 只要有一个部件正常工作, 系统就正常工作。串联系统举例来说就如工厂生产流水线, 只要其中一个环节出现问题, 就无法完成生产流水线的根本目的。系统根据是否可修分为两类, 是否可修则取决于技术经济问题。可修系统是指符合经济价值的系统, 不可修系统则是不符合经济价值的系统。在现实生活中, 电冰箱中制冷循环过程, 机器人需要串接十四组马达的伺服驱动器, 均是串联系统。显然串联系统在人们生活中无处不在。因此对于可修复串联系统的研究有极高的价值与意义。

本文针对部件不一定服从指数分布这一问题进行研究。可用于现实生活中计算不同型部件的串联系统的瞬时可用度与稳态可用度。目前对于三部件系统可靠性的研究, 文献[2]针对修理工休假情况下的三部件系统进行讨论, 通过补充变量法、拉普拉斯变换得出了休假情况下的可用度、可靠度。文献[3]在休假情况的基础上运用补充变量法对有优先修理权的三部件进行研究, 得出系统的瞬态和稳态的可用度。文献[4]同样是在对休假情况下三部件串并联系统进行讨论, 通过向量 Markov 过程方法、Laplace 变换工具和补充变量法得出稳态下修理工处于休假状态的概率。文献[5]利用泛函分析方法对单部件可修系统的瞬时可用度, 牢固可靠度进行分析。文献[6]则是在考虑修理工休假情况下的单部件可修系统。文献[7]则是针对两部件建立可靠性模型再通过泛函方法转换为抽象柯西问题。文献[8]则在基于文献[7]的结论证明了系统是稳定可解的。文献[1]对两个不同型部件串联可修系统进行研究, 但并未对三个乃至  $n$  个不同型部件进行讨论。本文将基于以上论文对三个不同型部件串联非马尔科夫可修系统采用补充变量法, 将其转化为广义马尔科夫系统来建立数学模型并求解。再推广到  $n$  部件讨论其一般性。

## 2. 系统假设与状态描述

### 2.1. 系统假设

三部件串联系统逻辑框图, 如图 1 所示:

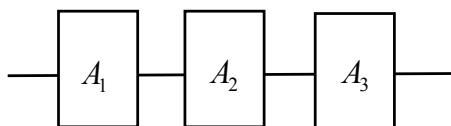


Figure 1. Logic block diagram of series system of three different types of components

图 1. 三个不同型部件串联系统的逻辑框图

假设 1 在短时间内, 不可能出现两个或两个以上部件同时失效的情况, 设  $N(t)$  为  $t$  时间内部件损坏个数, 即对于充分小的  $\Delta t > 0$ , 有  $P\{N(t+\Delta t)-N(t) \geq 2\} = o(\Delta t)$  [1]。

假设 2 部件  $A_i$  的失效时间服从参数为  $\lambda_i$  的指数分布, 设  $\mu_i(x)$  为部件  $A_i$  在修复时间  $x$  内的修复可能。修复时间服从一般分布  $1 - e^{-\mu_i(x)^t}$ , 其中  $i=1,2,3$ 。

假设 3 部件失效后马上进行维修。

假设 4 部件之间相互独立。

### 2.2. 系统状态

用  $S(t)$  表示系统状态,

状态 0:  $S(t)=0$ , 无故障部件;

状态  $i$ :  $S(t)=i$ , 表示若  $t$  时刻部件  $A_i$  发生故障,  $i=0,1,2,3$

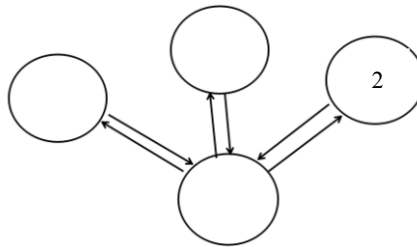


Figure 2. Three-component state transition diagram

图 2. 三部件状态转移图

### 3. 模型建立

$t$  为系统开始工作到目前状态的时间, 显然  $t \geq 0$ ; 记  $x_i(t)$  表示  $S(t)=i$  时, 立即开始维修且持续维修时间为  $x$ ,  $0 \leq x \leq t$ 。过程  $\{S(t), x(t); t \geq 0\}$  是一个连续时间下的广义马尔科夫过程[1]。由于指数分布的无记忆性, 可知  $t$  时刻前的过程与  $t$  时刻后的过程无关。令  $P_i(t, x)$  表示  $t$  时刻系统因第  $i$  个部件发生故障而使系统驻留的时间为  $x$  的概率。记  $G_i(x) = 1 - e^{-\mu_i(x)^t}$  为部件  $i$  的维修度,  $g_i(x) = G_i'(x)$  为维修度的概率密度函数。

从图 2 中可以看出: 当  $(t, t+\Delta t)$  内部件不发生故障时,  $S(t+\Delta t)=0$  必然  $S(t)=0$ 。  $S(t)=0$  有两种可能, 第一种是  $(0, t)$  内系统一直处于正常工作状态未曾失效; 第二种则是  $(0, t)$  内曾失效过但已经修复完成。因此:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda_1\Delta t - \lambda_2\Delta t - \lambda_3\Delta t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \mu_i(x) P_i(t, x) dx \cdot \Delta t + o(\Delta t)$$

从上式中可推出:

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) P_0(t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^t P_i(t, x) \mu_i(x) dx \quad (1)$$

类似可得:

$$\begin{aligned} P_i(t+\Delta t, x+\Delta x) - P_i(t, x) &= -\mu_i(x) \Delta x P_i(t, x) + o(\rho) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} P_i(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} P_i(t, x) &= -\mu_i(x) P_i(t, x) \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2} = \sqrt{2} \cdot \Delta t, \quad \Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta t.$$

系统初始条件:

$$P_0(0) = 1; P_i(0, x) = 0, i = 1, 2, 3 (x \geq 0) \tag{3}$$

边界条件:

$$P_i(t, 0) = \lambda_i P_0(t), i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

当  $x \geq t$  时  $P_i(t, x) = 0$ , 有  $\int_0^t P_i(t, x) \mu_i(x) dx = \int_0^{+\infty} P_i(t, x) \mu_i(x) dx$ 。

即三部件串联可维修系统的可靠性概率微分方程模型为:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_0(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) P_0(t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^{+\infty} P_i(t, x) \mu_i(x) dx \\ \frac{\partial}{\partial t} P_1(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} P_1(t, x) = -\mu_1(x) P_1(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial t} P_2(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} P_2(t, x) = -\mu_2(x) P_2(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial t} P_3(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} P_3(t, x) = -\mu_3(x) P_3(t, x) \\ P_0(0) = 1; P_1(0, x) = P_2(0, x) = P_3(0, x) = 0 \\ P_1(t, 0) = \lambda_1 P_0(t), P_2(t, 0) = \lambda_2 P_0(t), P_3(t, 0) = \lambda_3 P_0(t) \end{cases} \tag{5}$$

#### 4. 模型求解

利用初始条件和边界条件对模型(5)进行拉普拉斯变换, 记  $L[P_0(t)] = P_0^*(s)$   
 $L[P_i(t, x)] = P_i^*(s, x), i = 1, 2, 3$ , 得:

$$sP_0^*(s) - 1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) P_0^*(s) + \sum_{i=1}^3 \int_0^{+\infty} P_i^*(s, x) \mu_i(x) dx \tag{6}$$

$$sP_1^*(s, x) + \frac{\partial}{\partial x} P_1^*(s, x) = -\mu_1(x) P_1^*(s, x) \tag{7}$$

$$sP_2^*(s, x) + \frac{\partial}{\partial x} P_2^*(s, x) = -\mu_2(x) P_2^*(s, x) \tag{8}$$

$$sP_3^*(s, x) + \frac{\partial}{\partial x} P_3^*(s, x) = -\mu_3(x) P_3^*(s, x) \tag{9}$$

$$P_0^*(0) = \frac{1}{s}; P_1^*(0, x) = P_2^*(0, x) = P_3^*(0, x) = 0 \tag{10}$$

$$P_1^*(s, 0) = \lambda_1 P_0^*(s), P_2^*(s, 0) = \lambda_2 P_0^*(s), P_3^*(s, 0) = \lambda_3 P_0^*(s) \tag{11}$$

方程(7)是一个变量可分离方程, 分离变量两边积分并带入(11)式, 得

$$-sx + \ln|1 - G_1(x)| = \ln|P_1^*(s, x)| - \ln|P_1^*(s, 0)| \Rightarrow P_1^*(s, x) = e^{-sx} (1 - G_1(x)) P_1^*(s, 0)$$

$$P_1^*(s, x) = e^{-sx} (1 - G_1(x)) \lambda_1 P_0^*(s) \tag{12}$$

$$P_2^*(s, x) = e^{-sx} (1 - G_2(x)) \lambda_2 P_0^*(s) \tag{13}$$

$$P_3^*(s, x) = e^{-sx} (1 - G_3(x)) \lambda_3 P_0^*(s) \quad (14)$$

将(12), (13), (14)代入(6)可得

$$sP_0^*(s) - 1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_0^*(s) + \sum_{i=1}^3 \int_0^{\infty} e^{-sx} \lambda_i P_0^*(s) g_i(x) dx \quad (15)$$

根据拉普拉斯公式可得

$$sP_0^*(s) - 1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_0^*(s) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i P_0^*(s) g_i^*(s)$$

$$P_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i^*(s)} \quad (16)$$

再将(16)代入(12)可得

$$P_1^*(s, x) = \frac{e^{-sx} (1 - G_1(x)) \lambda_1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i^*(s)} \quad (17)$$

$P_2^*(s, x)$  与  $P_3^*(s, x)$  也可类似得出。

即

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i^*(s)} \\ P_1^*(s, x) = \frac{e^{-sx} (1 - G_1(x)) \lambda_1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i^*(s)} \\ P_2^*(s, x) = \frac{e^{-sx} (1 - G_2(x)) \lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i^*(s)} \\ P_3^*(s, x) = \frac{e^{-sx} (1 - G_3(x)) \lambda_3}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i^*(s)} \end{array} \right. \quad (18)$$

系统的瞬时可用度为  $A(t) = P_0(t)$ ，对它进行拉普拉斯变换得  $A^*(s) = P_0^*(s)$ ，所以

$$A^*(s) = P_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i^*(s)}$$

根据拉普拉斯终值定理可知系统的稳态可用度为  $A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sA^*(s)$ ，令  $\frac{1}{\mu_i} = \int_0^{\infty} x g_i(x) dx$  为修理时间均值，通过洛必达法则可得出稳态可用度为：

$$A = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i}{\mu_i}}$$

### 5. 验证与推广

重复上述方法可知单部件可修系统可靠性数学模型为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda_1 P_0(t) + \int_0^t P_1(t,x)\mu_1(x)dx \\ \frac{\partial}{\partial t}P_1(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}P_1(t,x) = -\mu_1(x)P_1(t,x) \\ P_0(0) = 1; P_1(0,x) = 0 \\ P_1(t,0) = \lambda_1 P_0(t) \end{cases}$$

其瞬时可用度与稳态可用度为

$$A^*(s) = P_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_1 - \lambda_1 g_1^*(s)}$$

$$A = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}}$$

当  $\lambda_1 = \lambda$  且  $\mu_1 = \mu$  时，与参考文献[6]推论 1 所得出的稳态可用度结果相同。双部件可修系统可靠性数学模型为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_0(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t P_i(t,x)\mu_i(x)dx \\ \frac{\partial}{\partial t}P_i(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}P_i(t,x) = -\mu_i(x)P_i(t,x), i = 1, 2 \\ P_0(0) = 1; P_1(0,x) = P_2(0,x) = 0 \\ P_1(t,0) = \lambda_1 P_0(t), P_2(t,0) = \lambda_2 P_0(t) \end{cases}$$

其瞬时可用度与稳态可用度为

$$A^*(s) = P_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i g_i^*(s)}$$

$$A = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{\mu_i}}$$

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  且  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  时与参考文献[8]所得出的稳态可用度结果相同。由上述公式可相应推广到  $n$  部件，可知其可靠性数学模型为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_0(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)P_0(t) + \sum_{i=1}^n \int_0^t P_i(t,x)\mu_i(x)dx \\ \frac{\partial}{\partial t}P_i(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}P_i(t,x) = -\mu_i(x)P_i(t,x), i = 1, 2, \dots, n \\ P_0(0) = 1; P_1(0,x) = P_2(0,x) = \dots = P_n(0,x) \\ P_i(t,0) = \lambda_i P_0(t), i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

其瞬时可用度与稳态可用度为

$$A^*(s) = P_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i^*(s)}$$

$$A = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}$$

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$  且  $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$  时, 其稳态可用度为

$$A = \frac{\mu}{\mu + n\lambda}$$

与参考文献[9]中  $n$  个相同部件串联可修系统的稳态可用度一致。

## 6. 小结

本文主要讨论在部件不服从指数分布情况下的三个不同型部件的串联可修系统, 并推广至  $n$  部件。通过验证可知所求结果是较为真实有效的。因此该结论对相关方面的研究, 具有较高的应用价值。并可用于解决实际生活中不同型部件系统的稳态可用度求解问题。

## 基金项目

南华大学研究生科学基金项目“可维修旁联系统可靠性分析与计算”(编号: 2018KYY089)。

## 参考文献

- [1] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] 张欣欣, 孟宪云, 陈胜强, 等. 修理工单重休假且两部件相依一部件温贮备的三部件退化可修系统[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2014, 31(4): 425-436.
- [3] 陈燕, 朱翼隼, 陈佩树. 单重休假且有优先修理权的三部件系统[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2014, 35(6): 738-744.
- [4] 胡林敏, 田瑞玲, 吴俊波, 等. 具有休假的三部件串并联可修系统的可靠性分析[J]. 燕山大学学报, 2007, 31(4): 299-303.
- [5] 刘东旭, 司文艺, 袁玉娇. 一类单部件可修复系统的稳定性即可靠性分析[J]. 延边大学(自然科学版), 2014(40): 15-19.
- [6] 唐应辉, 刘晓云. 一种新型的单部件可修系统[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(7): 106-111.
- [7] 陶有德, 乔兴, 于景元, 朱广田. 一类可修复计算机系统的数学模型[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2011(3): 330-332.
- [8] 陶有德, 于景元, 朱广田. 一类可修复计算机系统的稳定性和可靠性[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2011(1): 18-21.
- [9] 宋保维. 系统可靠性设计与分析[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)