Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(1), 26-30
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.81003

Hans汉斯

Local Dynamical Behavior of Two Classes of Periodic Points

Xiaolin Li, Yan Wu*

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: *wuyan@lyu.edu.cn

Received: Dec. 11th, 2018; accepted: Jan. 2nd, 2019; published: Jan. 9th, 2019

Abstract

In this paper, by studying the existence of the conformal isomorphism of rational function near its attracting periodic point and superattracting periodic point, we give the local dynamical behavior of rational function at these two kinds of periodic points.

Keywords

Rational Function, Attracting Periodic Point, Superattracting Periodic Point

两类周期点的局部动力学性态

李晓琳，吴　艳*

临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: *wuyan@lyu.edu.cn

收稿日期：2018年12月11日；录用日期：2019年1月2日；发布日期：2019年1月9日

摘　要

本文通过研究有理函数在其吸性周期点和超吸性周期点附近共形同胚的存在性，给出了有理函数在这两类周期点的局部动力学性态。

关键词

有理函数，吸性周期点，超吸性周期点

*通讯作者。

文章引用: 李晓琳, 吴艳. 两类周期点的局部动力学性态[J]. 应用数学进展, 2019, 8(1): 26-30.
DOI: 10.12677/aam.2019.81003

1. 引言

复动力系统理论研究的是复解析映射迭代生成的动力系统，这一理论起源于 Fatou 和 Julia 的研究工作。有理函数在整个 Riemann 球面上的迭代开始于 Fatou 的一篇论文，他发现对几乎所有的点，有理函数 $f(z)=z^2/(z^2+2)$ 的轨道均收敛于 0，但有一个 Cantor 集例外。稍后，Fatou 和 Julia 独立地对有理函数的迭代进行了研究，发现了有理函数具有丰富的动力学性质，见参考文献[1]和[2]。本文主要介绍有理函数周期点附近的动力学性态，包括吸性周期点和超吸性周期点情形。

2. 预备知识

设 f 为 Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ 到自身的有理映射，次数 $\deg f \geq 2$。任取一点 $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$，称序列

$$z_0 = f^0(z_0), z_1 = f^1(z_0), z_2 = f^2(z_0), \cdots, z_n = f^n(z_0), \cdots$$

为 f 在点 z_0 的轨道或正向轨道，其中 f^n 表示 n 个 f 的复合映射。

一般而言，有理映射 f 的正向轨道是一个无穷序列，其复杂性是复动力系统理论所要研究的中心问题之一。然而，对于特定的初始点 z_0，轨道为有限点集时更值得关注。

若存在自然数 p，使得 $f^p(z_0)=z_0$，则称 z_0 为 f 的周期点。把具有上述性质的最小的自然数 p 称为 z_0 的周期，称 z_0 为 p 阶周期点。这时

$$\left\{z_0, z_1 = f(z_0), z_2 = f^2(z_0), \cdots, z_{p-1} = f^{p-1}(z_0)\right\}$$

称为一条周期轨道，或周期循环。特别地，当 $p=1$ 时，称 z_0 为 f 的一个不动点。

定义 2.1 见参考文献[3] 设 $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ 为有理映射 f 的周期为 p 的周期点。$\lambda = (f^p)'(z_0)$ 称为 z_0 的特征值。进一步，根据 λ 的取值情况可以对特征值进行如下分类：

1) 如果 $|\lambda|<1$，称 z_0 为吸性周期点，($\lambda=0$ 时称为超吸性不周期点)；

2) 如果 $|\lambda|>1$，称 z_0 为斥性周期点；

3) 如果 $|\lambda|=1$ 且对某个整数 n 成立 $\lambda^n=1$，称 z_0 为有理中性周期点；如果 $|\lambda|=1$ 但是 $\lambda^n \neq 1$，称 z_0 为无理中性周期点。

注 见参考文献[4] 同一条周期轨道上的不同周期点具有相同的特征值。设 M 为 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的非退化的 Mobius 变换(即次数为 1 的有理映射)，对于有理映射 f，称 $M^{-1}\circ f \circ M$ 为 f 的共轭映射。如果 z_0 为 f 的 p 阶周期点，易验证 $M^{-1}(z_0)$ 也为 $M^{-1}\circ f \circ M$ 的 p 阶周期点，且对应的特征值相等。在上述定义中，当 $z_0=\infty$ 时，特征值 λ 的计算事实上正是借助共轭变换 $M(z)=\dfrac{1}{z}$ 来实现的。

我们称函数 $f:U\to U$ 与函数 $g:V\to V$ 是共形共轭的，若存在共形映射 $\varphi:U\to V$，使得 $g=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$，即

$$\varphi(f(z)) = g(\varphi(z)).$$

在此定义下映射 f 和 g 在不同坐标系下被认作同一映射。这一定义也意味着迭代函数 f^n 和 g^n 也是共轭的，即 $g^n=\varphi\circ f^n\circ\varphi^{-1}$，同样有 f^{-1} 和 g^{-1} 共轭，即 $g^{-1}=\varphi\circ f^{-1}\circ\varphi^{-1}$。注意 φ 将函数 f 的周期点映射到 g 的周

期点。

解析映射在周期点附近迭代性态的研究起源于 1884 年 Koenigs 的工作、1897 年 Leau 的工作和 1903 年 Bottcher 的工作，见参考文献[5]和[6]。本文以下主要研究 f 在 0 点的局部迭代动力学性质。

3. 周期点附近的动力学性态

如果 z_0 是有理映射 g 的一个 p 阶周期点，易见可以通过一个 Mobius 变换将 g^p 共轭于一个以 0 为不动点的有理映射 f，且在 $z=0$ 附近 f 具有如下展开式：

$$f(z)=\lambda z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots. \tag{3.1}$$

在 0 点的邻域上，当 $\lambda\neq 0$ 时，f 近似于函数 $g(z)=\lambda z$，当 $\lambda=0$，$a\neq 0$ 时，f 近似于函数 $g(z)=az^p$，这里是否一定存在 g 到 f 的共轭函数 φ？答案依赖于函数 f 和乘子 λ。

定理 3.1 设 f 由(3.1)式表示，$0<|\lambda|<1$，则存在 $z=0$ 的一个邻域 U 及唯一一个共形映射 $\varphi:U\to\Delta_r$，这里 $\Delta_r=\{z\,\big|\,|z|<r\}$，使得 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$，且满足：

$$\varphi\circ f(z)=\lambda\varphi(z)$$

证明：考虑辅助函数 $\varphi_n(z)=\dfrac{1}{\lambda^n}f^n(z)$，它定义在 $z=0$ 附近。

首先证明 $\varphi_n(z)$ 在 $z=0$ 某个邻域内一致收敛。取常数 $c>0$ 使得 $c^2<|\lambda|<c<1$，再取 $z=0$ 的一个小邻域 $\Delta_\delta=\{z\,\big|\,|z|<\delta\}$，只要 $\delta>0$ 充分小，易见当 $z\in\Delta_\delta$ 时，有 $|f(z)|<c|z|$，故 $f(\Delta_\delta)\subset\Delta_\delta$。所以，对任意自然数 n，有

$$|f^n(z)|<c^n|z|<\delta c^n.$$

又由(2.1)可见，当 δ 充分小时，存在常数 $K>0$，使得 $z\in\Delta_\delta$ 时有

$$|f(z)-\lambda z|<K|z|^2,$$

故 $z\in\Delta_\delta$ 时，

$$|f^{n+1}(z)-\lambda f^n(z)|<K|f^n(z)|^2<K\delta^2c^{2n}.$$

从而有

$$|\varphi_{n+1}(z)-\varphi_n(z)|=\frac{1}{|\lambda|^{n+1}}|f^{n+1}(z)-\lambda f^n(z)|<\frac{K\delta^2}{|\lambda|}\left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n.$$

由 $\dfrac{c^2}{|\lambda|}<1$ 知，φ_n 在 Δ_δ 内是一致收敛的 Cauchy 序列。记 φ 为 φ_n 的极限函数，取 $U=\varphi^{-1}(\Delta_r)$，其中 Δ_r 为充分小的圆盘，使得 φ^{-1} 在其上为共形映射。易见 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$，且满足 $\varphi\circ f(z)=\lambda\varphi(z)$。证毕。

定理表明 f 在 0 点局部共轭于线性映射 $z\mapsto\lambda z$，这时 f 在 0 点附近与 $z\mapsto\lambda z$ 有相应的迭代性质，这就给出 f 在 0 点附近的局部动力学模型。

进一步，假设解析映射 f 以 $z=0$ 为超吸性不动点，即 f 在 $z=0$ 附近具有如下展开式：

$$f(z)=z^k+a_{k+1}z^{k+1}+\cdots,\ k\geq 2. \tag{3.2}$$

则有如下定理：

定理 3.2 设 f 由(3.2)式表示，则存在 $z=0$ 的一个邻域 U 及唯一一个共形映射 $\varphi:U\to\Delta_r$，这里

$\Delta_r = \{z \| z| < r < 1\}$，使得 $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$，且满足：

$$\varphi \circ f(z) = \varphi(z)^k$$

证明：取 $z=0$ 的邻域 $\Delta_\delta = \{z \| z| < \delta\}$ 充分小，使得 $f(\overline{\Delta_\delta}) \subset \Delta_\delta$，且 f 在 Δ_δ 内仅以 $z=0$ 为零点。由此可见，f 在 Δ_δ 内的阶数为 k，f^n 在 Δ_δ 的阶数为 k^n。所以，可以取定 $(f^n(z))^{1/k^n}$ 的一个分支，记为 φ_n，它是 Δ_δ 上的单值解析映射，$\varphi_n(0)=0$，$\varphi_n'(0)=1$。下证 φ_n 在 Δ_δ 内一致收敛。考虑

$$h_n(z) = \log_+ |\varphi_n(z)| = \frac{1}{k^n} \log_+ |f^n(z)|,$$

这里 $\log_+ x = \max\{\log x, 0\}$。当 Δ_δ 充分小时，对于 $z \in \Delta_\delta$，有

$$\left| \frac{f(z)}{z^k} \right| = |1 + a_{k+1} z + \cdots| < 2,$$

且 $f(\overline{\Delta_\delta}) \subset \Delta_\delta$，所以有

$$\begin{aligned} h_n(z) &\le \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{k^{j+1}} \log_+ \left| \frac{f(f^j(z))}{(f^j(z))^k} \right| + \log_+ |z| \\ &\le \log 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k^{j+1}} < \infty \end{aligned}.$$

这说明 $|\varphi_n(z)|$ 在 Δ_δ 上一致有界，故 $\{\varphi_n(z)\}$ 为 Δ_δ 上正规族。任取 $\{\varphi_n(z)\}$ 的一个收敛子序列 $\{\varphi_{n_j}(z)\}$，由于

$$\left| \varphi_{n_j} \circ f(z) - (\varphi_{n_j}(z))^k \right| = |\varphi_{n_j}(z)|^k \left| 1 - \left[\frac{f(f^{n_j}(z))}{(f^{n_j}(z))^k} \right]^{\frac{1}{k^{n_j}}} \right|,$$

且在 Δ_δ 内 $\frac{f(z)}{z^k} \to 1 (z \to 0)$，$f^n(z) \to 0 (n \to \infty)$，$|\varphi_n(z)|$ 一致有界，故

$$\left| \varphi_{n_j} \circ f(z) - (\varphi_{n_j}(z))^k \right| \to 0, \ j \to \infty.$$

这说明 $\{\varphi_{n_j}\}$ 的极限函数满足方程 $\varphi \circ f(z) = \varphi(z)^k$。将(2.2)式代入方程，比较两边系数即可导出极限函数的唯一性。故 $\{\varphi_n\}$ 在 Δ_δ 上一致收敛于极限函数 φ。证毕。

定理表明在 f 的超吸性周期点附近，f^p 局部共轭于映射 $z \mapsto z^k$，这是超吸性周期点的局部动力学模型。

基金项目

大学生创新创业训练计划项目(201710452006)，国家自然科学基金项目(11701250)。

参考文献

[1] 任福尧. 复解析动力系统[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1997.

[2] 乔建永. 重整化变换的复动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[3] 郑建华. 亚纯函数动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[4] Li, Y. and Qiao, J. (2000) The Uniqueness of Meromorphic Functions Concerning Small Functions. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **43**, 581-590.

[5] 李忠. 拟共形与 Teichmuller 空间[M]. 北京: 北京大学出版社, 2013.

[6] 李忠. 复分析导引[M]. 北京: 北京大学出版社, 2017.