Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(2), 193-202**
Published Online February 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.82022

A Kind of Quartic Li's Oval

Xiangjiang Li

Engineering Training Center, Changsha University of Science & Technology, Changsha Hunan
Email: cslixj@163.com

Received: Jan. 22nd, 2019; accepted: Feb. 6th, 2019; published: Feb. 13th, 2019

Abstract

In this paper, a definition of Li's oval is provided, and the definitions of the oval center, the long radius, the short radius, and the symmetrical radius of the oval are provided. A kind of quartic equation is given and proved to be an oval equation. This proves some decision theorems for some quartic equations to become the Li's oval equation, the tangent equation and normal equation of the oval and the volume formula of rotating oval ball is provided. Finally, an example is given to verify the effectiveness of the simulation.

Keywords

Li's Oval, Oval Equation, Oval Center, Long Radius, Short Radius, Symmetric Radius

一类四次李氏卵圆

李湘江

长沙理工大学，工程训练中心，湖南 长沙
Email: cslixj@163.com

收稿日期：2019年1月22日；录用日期：2019年2月6日；发布日期：2019年2月13日

摘　要

本文给出了李氏卵圆的定义，并给出了卵圆的卵心，卵圆的长半径、短半径和对称半径等相关概念的定义，给出一类四次方程，并证明其为李氏卵圆方程。给出了某些四次方程为李氏卵圆方程的判定定理，给出了此类李氏卵圆的切线方程和法线方程，旋转卵球体的体积公式。最后给出实例与仿真验证，能达到吻合的效果。

关键词

李氏卵圆，卵圆方程，卵心，长半径，短半径，对称半径

文章引用: 李湘江. 一类四次李氏卵圆[J]. 应用数学进展, 2019, 8(2): 193-202.
DOI: 10.12677/aam.2019.82022

1. 引言

卵圆又称卵形线，是鸟类、禽类和爬行动物卵的纵截面图形。人类对卵形线的直观认识由来已久，但对它的研究进展却较缓慢。有名的卵形线主要有：

1) 笛卡尔卵形线[1]：A，B 是平面内两个定点，m，n，b 是三个固定正数，平面内满足 $m \cdot PA + n \cdot PB = b$ 的点 P 的轨迹称为笛卡尔卵形线。若定义焦距 $2a$，中点为原点，则笛卡尔卵形线方程为

$$m\sqrt{(x-a)^2+y^2}+n\sqrt{(x+a)^2+y^2}=b$$

2) 卡西尼卵形线[2]：A，B 是平面内两个定点，a，c 是两个正数，$AB = 2c$，平面内满足 $PA \cdot PB = a^2$ 的点 P 的轨迹称为卡西尼卵形线，即到两定点之距的乘积为常数的点的轨迹，其方程为

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2c^2\left(x^2-y^2\right)=a^4-c^4$$

然而这些卵形线的参数范围限制较大，其应用受到很大制约。后来，由于科学及工程学的发展需要，特别是道路工程、建筑工程、医学眼科领域中卵圆的应用日益广泛，实际应用中卵圆大都是通过圆和椭圆的拼凑或组合形式即分段函数的形式给出[3] [4] [5]。然而对卵圆的理论基础研究却相对滞后，时至今日，对卵圆甚至还没有一个明确的定义，仍然停留在圆和椭圆阶段[6] [7]，更未能新给出一个单一的数学方程表述的卵圆方程。

本文给出卵圆的一种精确定义，并且为了叙述方便，将新定义的卵圆取名为李氏卵圆。同时还严格证明了一类四次方程为满足所定义的卵圆方程，并给出了某些四次方程为李氏卵圆方程的判定定理，获得了这类卵圆的切线方程和法线方程及旋转卵球体的体积公式。

2. 定义

定义 1：平面曲线 L，若满足如下条件：

① L 有一条对称轴且是闭合的；

② L 处处光滑；

③ L 上有唯一一对对称点，设为 S，T 到对称轴的距离最大；

④ L 与其对称轴有且仅有两个交点，设为 P，Q，又 PQ 与 ST 交于一点设为 O，且 $OP > OQ$；

⑤ L 为凸曲线，且不含直线段。

则称曲线 L 为李氏卵圆，称点 O 为李氏卵圆的卵心，分别称点 P，Q 为李氏卵圆的小端点和大端点，称点 S，T 为李氏卵圆的对称端点，称 PQ 的中点 O' 为李氏卵圆的轴心，过 O' 作对称轴的垂线交李氏卵圆于 S' 和 T'，分别称线段 OP，OQ，OS (或 OT)，$O'S'$ (或 $O'T'$)，OO' 为李氏卵圆的长半径、短半径、对称半径、次对称半径、偏心距，其长度分别记为 a，b，c，g，h，并把正数 a，b，c $(a>b)$ 统称为李氏卵圆的三个特征参数。

若取李氏卵圆的卵心作坐标系原点，小端点方向作为轴的正向，则李氏卵圆在直角坐标系的示意图如图 1 所示。

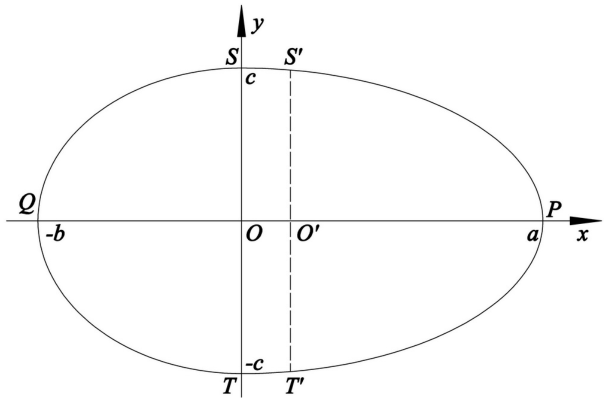


Figure 1. Li's Oval and its rectangular coordinate system
图 1. 李氏卵圆及其在直角坐标系示意图

3. 一类四次李氏卵圆方程

定理 1：设

$$a,b,c>0\text{，且 }b<a\le\left(3+2\sqrt{2}\right)b \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a-b}{a+b}x+\frac{2ab}{a+b}\right)^2}+\frac{y^2}{c^2}=1 \tag{2}$$

$$y=\pm 2c\sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{-x^2+(a-b)x+ab}}{(a-b)x+2ab} \tag{3}$$

$$x^2y^2+\frac{4ab}{a-b}xy^2+\frac{4abc^2}{(a-b)^2}x^2+\frac{4a^2b^2}{(a-b)^2}y^2-\frac{4abc^2}{a-b}x-\frac{4a^2b^2c^2}{(a-b)^2}=0 \tag{4}$$

$$(a-b)^2x^2y^2+4ab(a-b)xy^2+4abc^2x^2+4a^2b^2y^2-4abc^2(a-b)x-4a^2b^2c^2=0 \tag{5}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2ab\cos t}{a+b-(a-b)\cos t}, & t\in[0,2\pi] \\ y=c\sin t \end{cases} \tag{6}$$

则(2)~(6)都是相互等价的以 a，b，c 为长半径、短半径、对称半径的李氏卵圆方程。

为了证明定理 1，我们先证明如下引理：

引理 1：若(1)成立，则(2)~(6)互相等价。

证明：由(2)经过恒等变形即可得到(3)~(5)，故(2)~(5)互相等价。

将(6)的第一式代入下式的左边，得

$$\frac{a-b}{a+b}x+\frac{2ab}{a+b}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{2ab\cos t}{a+b-(a-b)\cos t}+\frac{2ab}{a+b}$$

将上式右边化简，即得

$$\frac{a-b}{a+b}x+\frac{2ab}{a+b}=\frac{2ab}{a+b-(a-b)\cos t} \tag{7}$$

由(6)的第一式及(7)，得

$$x^2=\left[\frac{2ab}{a+b-(a-b)\cos t}\right]^2\cos^2 t=\left(\frac{a-b}{a+b}x+\frac{2ab}{a+b}\right)^2\cos^2 t$$

即

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a-b}{a+b}x+\frac{2ab}{a+b}\right)^2}=\cos^2 t \tag{8}$$

又由(6)的第二式得

$$\frac{y^2}{c^2}=\sin^2 t \tag{9}$$

(8)与(9)相加，并注意到 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$，即得(2)。故(6)与(2)等价，从而(2)~(6)互相等价。

引理 2：由参数式(6)所确定的函数 $y(x)$ 的一阶导数和二阶导数分别记为 $y_x'(t)$ 和 $y_x''(t)$，则

$$y_x'(t)=-\frac{c}{2ab(a+b)}\left[(a+b)-(a-b)\cos t\right]^2\cot t \tag{10}$$

$$y_x''(t)=-\frac{c}{4a^2b^2(a+b)^2}\cdot h(t)\cdot g(t) \tag{11}$$

其中

$$g(t)=-\frac{\left[a+b-(a-b)\cos t\right]^3}{\sin^3 t},\ t\in[0,2\pi] \tag{12}$$

$$h(t)=a+b-3(a-b)\cos t+2(a-b)\cos^3 t,\ t\in[0,2\pi] \tag{13}$$

证明：由(6)得

$$y_x'(t)=\frac{y_t'(t)}{x_t'(t)}=\frac{(c\sin t)'}{\left(\frac{2ab\cos t}{a+b-(a-b)\cos t}\right)'}$$

上式化简即得(10)。由(10)得

$$y_x''(t)=\frac{\left[y_x'(t)\right]'}{x_t'}=\frac{\left\{-\frac{c}{2ab(a+b)}\left[a+b-(a-b)\cos t\right]^2\cot t\right\}'}{\left(\frac{2ab\cos t}{a+b-(a-b)\cos t}\right)'}$$

上式化简即得

$$y_x''(t)=-\frac{c}{4a^2b^2(a+b)^2}\cdot\frac{\left[a+b-(a-b)\cos t\right]^3}{\sin^3 t}\cdot\left[a+b-3(a-b)\cos t+2(a-b)\cos^3 t\right] \tag{14}$$

由(14)即知(11)~(13)成立。

引理 3：设(1)成立，$h(t)$ 如(13)所示，则

$$h(t) \geq 0,\ t \in [0,\pi] \tag{15}$$

且(15)中的等号仅在$t=\dfrac{\pi}{4}$时成立。

证明：由(13)求得$h(t)$的一、二阶导数$h'(t)$，$h''(t)$

$$h'(t) = 3(a-b)\sin t\left(2\sin^2 t - 1\right) \tag{16}$$

$$h''(t) = 3(a-b)\cos t\left(5 - 6\cos^2 t\right) \tag{17}$$

由(16)，令$h'(t)=0$，得$h(t)$在$t\in(0,\pi)$上仅有一个稳定点$t=\dfrac{\pi}{4}$。

将$t=\dfrac{\pi}{4}$代入(17)得

$$h''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}(a-b) > 0$$

故知$t=\dfrac{\pi}{4}$是$h(t)$在$[0,\pi]$上的唯一极小值点[8]，从而也是$h(t)$在$[0,\pi]$上的最小值点，且最小值为

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = a+b-\sqrt{2}(a-b)$$

故

$$h(t) \geq a+b-\sqrt{2}(a-b),\ t\in[0,\pi] \tag{18}$$

且(18)中的等号仅在$t=\dfrac{\pi}{4}$处成立。又

$$a \leq \left(3+\sqrt{2}\right)b \Leftrightarrow a+b-\sqrt{2}(a-b) \geq 0 \tag{19}$$

于是由(1)和(18)和(19)即知本引理结论成立。

定理1的证明：先证(3)的图形曲线L满足定义1的条件①~④。先考察(3)的带“+”号的显函数

$$y(x) = 2c\sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{-x^2+(a-b)x+ab}}{(a-b)x+2ab} \tag{20}$$

求出函数(20)的导数，并化简，得

$$y'(x) = -\frac{c(a+b)^2\sqrt{ab}x}{\left[(a-b)x+2ab\right]^2\sqrt{-x^2+(a-b)x+ab}} \tag{21}$$

设(3)的图形曲线为L，则显然L关于x轴对称且是闭合的，故L满足定义1的条件①。

由(21)知，$y(x)$的导数$y(x)$在$(-b,a)$上处处有限存在，在点$x=-b$，$x=a$处的导数均为∞，故知(20)的曲线即L的上半部在$x\in[-b,a]$上处处存在切线，从而是光滑的。由对称性知整个L都处处光滑。故L满足定义1的条件②。

又由(21)知仅在$x=0$处，$y'(0)=0$；且当$x<0$时，$y'(x)>0$，当$x>0$时，$y'(x)<0$，故$x=0$是函数(20)的唯一极大值点[8]，从而也是其最大值点。又由(20)知其最大值为$y(0)=c$，故L上存在唯一一对对称点$S(0,c)$和$T(0,-c)$，到对称轴x轴的距离最大，且最大距离为c。故L满足定义1的条件③。

在(3)中令$y=0$，得$x=a$及$x=-b$，故L与其对称轴x轴有且仅有两个交点$P(a,0)$和$Q(-b,0)$，又PQ与ST相交于坐标原点$O(0,0)$，且$OP=a>b=OQ$，故L满足定义1的条件④。

于是由引理 1 知，(2)~(6)的图形曲线 L 均满足定义 1 的条件①~④。

为证明(2)~(6)的图形曲线 L 都满足定义 1 的条件⑤，由引理 1 我们只须证明(6)的图形曲线 L 是凸的即可。设由(6)所确定的函数 $y(x)$ 的二阶导数记为 $y''_x(t)$，则由引理 2 及引理 3 即(11)和(12)和(15)知

$$y''_x(t) \le 0,\ t \in (0,\pi) \tag{22}$$

且(22)中的等号仅在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处成立。

由(22)知，L 的上半部是上凸的且不含直线段[8]，再由对称性知，L 的下半部是下凸的且不含直线段。故整个曲线 L 的是凸的且不含直线段，故 L 满足定义 1 的条件⑤。

故定理 1 的结论成立。

注 1：在(2)中，令 $b=a$，$a>c$，则(2)变成

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$$

上式显然为椭圆方程。故四次李氏卵圆方程(2)~(6)都是椭圆的推广。

定理 2：设

$$B,C,E>0\text{，且 } E \le BC \tag{23}$$

$$x^2y^2+Bxy^2+Cx^2+\frac{B^2}{4}y^2-Ex-\frac{BE}{4}=0 \tag{24}$$

则(24)为李氏卵圆方程，且卵圆的长、短、对称半径为

$$a=\frac{E+\sqrt{E^2+BCE}}{2C},\ b=\frac{-E+\sqrt{E^2+BCE}}{2C},\ c=\sqrt{\frac{E}{B}} \tag{25}$$

证明：考察如下四次方程

$$x^2y^2+Bxy^2+Cx^2+Dy^2-Ex-F=0 \tag{26}$$

比较(4)与(26)的系数，得

$$B=\frac{4ab}{a-b},\ C=\frac{4abc^2}{(a-b)^2},\ D=\frac{4a^2b^2}{(a-b)^2},\ E=\frac{4abc^2}{a-b},\ F=\frac{4a^2b^2c^2}{(a-b)^2} \tag{27}$$

由(27)得

$$D=\frac{B^2}{4},\ F=\frac{BE}{4} \tag{28}$$

将(28)代入(26)即得(24)。

由(27)中的第一、二、四等式，得

$$B=\frac{4ab}{a-b},\ C=\frac{4abc^2}{(a-b)^2},\ E=\frac{4abc^2}{a-b} \tag{29}$$

将(29)反解，即得(25)。

由(29)和(29)知 $a,b,c>0$ 且 $a>b \Leftrightarrow B,C,E>0$。

由(25)知

$$a \le \left(3+2\sqrt{2}\right)b$$

$$\Leftrightarrow E+\sqrt{E^2+BCE} \le \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(-E+\sqrt{E^2+BCE}\right) \Leftrightarrow \left(4+2\sqrt{2}\right)E \le \left(2+2\sqrt{2}\right)\sqrt{E^2+BCE}$$

$$\Leftrightarrow \left(4+2\sqrt{2}\right)^2 E^2 \le \left(2+2\sqrt{2}\right)^2\left(E^2+BCE\right) \Leftrightarrow \left(24+16\sqrt{2}\right)E^2 \le \left(12+8\sqrt{2}\right)\left(E+BC\right)E$$

$$\Leftrightarrow 8\left(3+2\sqrt{2}\right)E \le 4\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(E+BC\right) \Leftrightarrow 2E \le E+BC \Leftrightarrow E \le BC$$

故(1) $\Leftrightarrow$ (23)，于是由定理 1 即得本定理。

4. 四次李氏卵圆的切线方程和法线方程

定理 3：设 (x_0, y_0) 是四次李氏卵圆(2)上的一点，则过点 (x_0, y_0) 处的切线方程和法线方程分别为

$$y-y_0=-\frac{2abc^2\left(a+b\right)^2 x_0}{\left[\left(a-b\right)x_0+ab\right]^3 y_0}\left(x-x_0\right) \tag{30}$$

$$y-y_0=\frac{\left[\left(a-b\right)x_0+2ab\right]^3 y_0}{2abc^2\left(a+b\right)^2 x_0}\left(x-x_0\right) \tag{31}$$

证明：由(2)，令

$$F\left(x,y\right)=\frac{x^2}{\left(\frac{a-b}{a+b}x+\frac{2ab}{a+b}\right)^2}+\frac{y^2}{c^2}-1=0$$

则

$$y'_x=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2abc^2\left(a+b\right)^2 x}{\left[\left(a-b\right)x+2ab\right]^3 y}$$

于是四次李氏卵圆(2)上过点 (x_0, y_0) 的切线斜率为

$$K\left(x_0,y_0\right)=-\frac{2abc^2\left(a+b\right)^2 x_0}{\left[\left(a-b\right)x_0+2ab\right]^3 y_0} \tag{32}$$

由(32)即知(30)和(31)成立。

5. 旋转卵球体的体积

定理 4：设四次李氏卵圆(2)绕对称轴 x 轴旋转而成的旋转卵球体的体积为 V，则

$$V=4\pi c^2\frac{ab}{a+b}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3\ln\frac{a}{b}-2\frac{a+b}{a-b}\right] \tag{33}$$

证明：将(2)表成

$$y=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{\left(\alpha x+\beta\right)^2}} \tag{34}$$

其中

$$\alpha=\frac{a-b}{a+b},\ \beta=\frac{2ab}{a+b} \tag{35}$$

由文献[8]之 P_{273} 知所求体积

$$V = 2\pi\int_{-b}^{a} y^2 \mathrm{d}x \tag{36}$$

又

$$\frac{x^2}{(\alpha x+\beta)^2} = \frac{x^2}{\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^4}\cdot\frac{1}{\left(x+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2} - \frac{2\beta}{\alpha^3}\cdot\frac{1}{x+\dfrac{\beta}{\alpha}} \tag{37}$$

由(35)得

$$a = \frac{\beta}{1-\alpha},\ b = \frac{-\beta}{1+\alpha} \tag{38}$$

则由(34)和(36)和(37)和(38)得

$$\begin{aligned} V &= \pi c^2 \int_{\frac{-\beta}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \left[1 - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^4}\cdot\frac{1}{\left(x+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2} + \frac{2\beta}{\alpha^3}\cdot\frac{1}{x+\dfrac{\beta}{\alpha}}\right]\mathrm{d}x \\ &= \pi c^2 \left[\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)x - \frac{\beta^2}{\alpha^4}\frac{1}{x+\dfrac{\beta}{\alpha}} + \frac{2\beta}{\alpha^3}\ln\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]_{-\beta/(1+\alpha)}^{\beta/(1-\alpha)} \\ &= \pi c^2 \left[-\frac{2\beta}{\alpha^2} - -\frac{2\beta}{\alpha^2} + -\frac{2\beta}{\alpha^3}\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right] \end{aligned}$$

即

$$V = 2\pi c^2 \beta\left[-\frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right] \tag{39}$$

将(35)代入(39)即得(33)。

注 2：当 $b \to a$ 时，有 $\alpha \to 0$，$\beta \to a$，于是由(39)，并运用洛必达[8]法则得

$$\lim_{b\to a} V = 2\pi c^2 a \lim_{\alpha\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+\alpha} + \dfrac{1}{1-\alpha} - 2}{3\alpha^2} = 2\pi c^2 a \lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{3\left(1-\alpha^2\right)} = \frac{4}{3}\pi a c^2$$

这正是半长、短轴为 a，c 的椭圆绕 x 轴(长轴)旋转而成的椭球体的体积公式。这也佐证了公式(33)的正确性。

6. 示例与仿真验证

6.1 示例

只要给出李氏卵圆的长、短、对称半径 $a,b,c\,(a>b)$ 三个特征参数值，代入(2)或(3)或(4)或(5)或(6)，即可得出具体的李氏卵圆方程。

例 1：取 $a=5$，$b=4$，$c=3$ 代入(2)，则得

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{1}{9}x + \dfrac{40}{9}\right)^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{40}$$

方程(40)图形如图 2 所示。

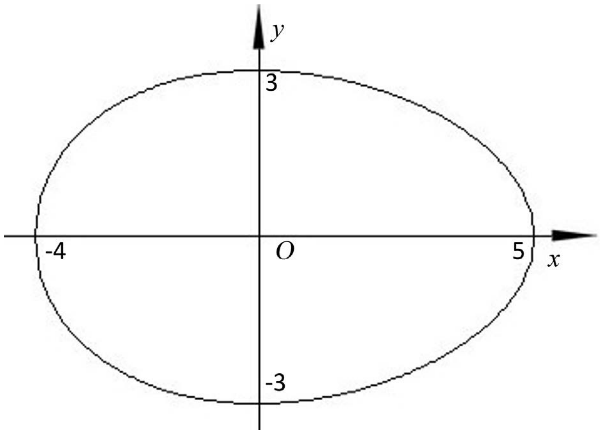
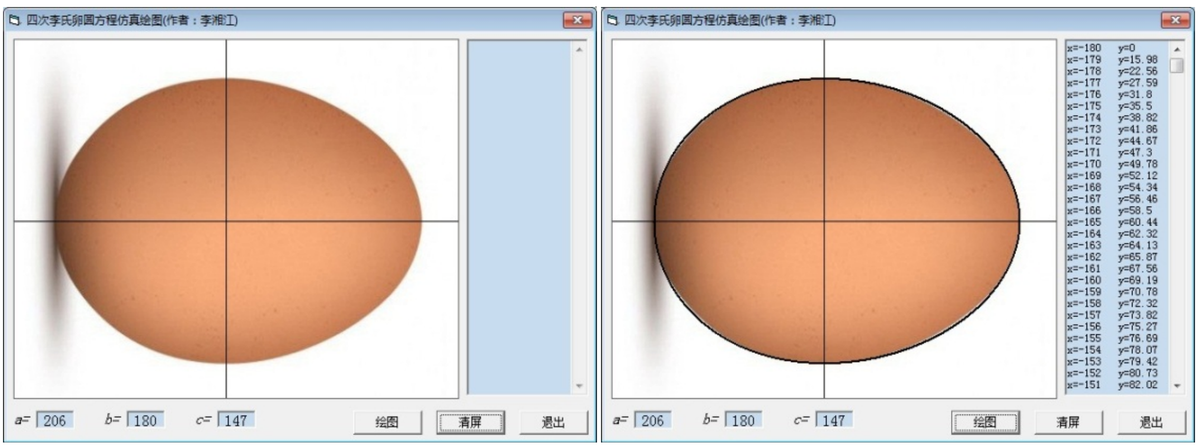


Figure 2. Equation (40) graphics
图 2. 方程(40)图形

6.2 仿真验证

为了验证本文所建四次李氏卵圆方程图形与真实卵形对比效果，用计算机编写了一个仿真绘图程序。取一张鸡蛋照片作为绘图程序界面上绘图区的背景。通过像素分析和计算，获得图片中鸡蛋图像横向最大像素为 386，纵向最大像素为 294，在鸡蛋图片横向和纵向最大像素处画两条直线作为 x、y 轴，x 轴与 y 轴的交点即为鸡蛋的卵心，并将卵心位置设定为绘图区的原点。程序界面如图 3(a)所示。



(a) (b)

Figure 3. Drawing program of simulating
图 3. 仿真绘图程序

按四次李氏卵圆方程的需求量取鸡蛋以像素为单位的长、短、对称半径三个参数值，得出 $a=206$，$b=180$， $c=147$。则由式(3)即得其卵圆方程：

$$y=\pm 147\sqrt{37080}\,\frac{\sqrt{-x^2+26x+37080}}{26x+74160} \tag{41}$$

绘图程序使用方程式(41)在区间[−180, 206]中进行计算并通过描点法绘制图形，界面右侧文本框中显示方程取点的计算值。程序运行结果见图 3(b)。

图 3(b)中鸡蛋外轮廓的黑色绘图线是绘图程序根据卵圆方程式(41)绘制的卵圆图形，图线准确的通过鸡蛋的大端点、小端点和两个对称端点四个端点，与图片中鸡蛋外轮廓高度吻合。

7. 结语

在工程应用中，绘制卵圆及卵形曲线通常是用多段圆弧近似连接而成[5]，或由经过若干个点的自由曲线构成，或以椭圆弧为初始曲线利用几何变换生成[4]，或利用多焦点圆及椭圆生成等方法[3]。本文给出了卵圆的一种精确定义，提出了一类非常实用的三参数四次李氏卵圆方程。有了这种单一的卵圆方程就可以快速绘制出精确的卵圆图形，同时也给卵圆及其应用研究提供理论基础。

参考文献

[1] 莫叶. 笛卡尔卵形线的一些性质[J]. 数学通报, 1955, 4(11): 13-16.

[2] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1977: 392-393.

[3] 管贤根, 管杰. 多焦点圆及其椭圆和卵圆[J]. 图学学报, 2013, 34(2): 52-64.

[4] 宋业存, 祝燕琴. 一种生成卵形曲线的方法[J]. 工程图学学报, 2006, 27(1): 160-163.

[5] 张家平, 陈化新. 运用切线基线法测算卵形曲线要点解析[J]. 测绘工程, 2010, 19(1): 17-20.

[6] 刘绍学. 数学必修 2 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2007: 118-122.

[7] 刘绍学. 数学选修 2-1 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2007: 38-40.

[8] 同济大学应用数学系. 高等数学上册[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2002: 155, 153, 149, 273, 133.