Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(2), 357-364
Published Online February 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.82040

Discussion on Continuity and Discontinuous Points of Composite Functions

Limin Yang[1], Peng Ma[1], Jian Wu[2], Songqing Zhao[1], Jing Yu[1]

[1]School of Arts and Sciences, China University of Petroleum-Beijing at Karamay, Beijing
[2]College of Engineering, China University of Petroleum-Beijing at Karamay, Beijing
Email: ylm@cup.edu.cn

Received: Feb. 5th, 2019; accepted: Feb. 20th, 2019; published: Feb. 27th, 2019

Abstract

Suppose $y = g(x)$, $y_0 = g(x_0)$, $z = f(y)$, $U(x_0) \subset D_g$, $U(y_0) \subset D_f$, by [1], we have following conclusions. If (i) $g(x)$ is continuous at x_0, and (ii) $f(y)$ is continuous at y_0, then composite function $f[g(x)]$ is continuous at x_0. In this paper, we will use some examples to illustrate that $f[g(x)]$ is not necessarily continuous at x_0 under the assumption of (i) and (ii) at least one of them is not established. Moreover, when $f[g(x)]$ is discontinuous at x_0, the types of discontinuous points are not necessary to maintain the same types of x_0 for $g(x)$ and y_0 for $f(y)$.

Keywords

Composite Function, Continuity, Discontinuity, Neighborhood

关于复合函数的连续性与间断点类型的探讨

杨立敏[1]，马　鹏[1]，吴　剑[2]，赵嵩卿[1]，于　静[1]

[1]中国石油大学(北京)克拉玛依校区，文理学院，北京

文章引用: 杨立敏, 马鹏, 吴剑, 赵嵩卿, 于静. 关于复合函数的连续性与间断点类型的探讨[J]. 应用数学进展, 2019, 8(2): 357-364. DOI: 10.12677/aam.2019.82040

[2]中国石油大学(北京)克拉玛依校区，工学院，北京
Email: ylm@cup.edu.cn

收稿日期：2019年2月5日；录用日期：2019年2月20日；发布日期：2019年2月27日

摘　要

设函数 $y = g(x)$， $y_0 = g(x_0)$， $z = f(y)$， 以及邻域 $U(x_0) \subset D_g$，$U(y_0) \subset D_f$. 根据 [1] 中的论述, 如果 (i) $g(x)$ 在 x_0 点连续， (ii) $f(y)$ 在 y_0 点连续，则复合函数 $f[g(x)]$ 在 x_0 点连续。本文将通过构造简单的实例论证当 (i)、(ii) 中至少有一条不成立时， $f[g(x)]$ 在 x_0 点不一定能保证连续性， 且当 $f[g(x)]$ 在 x_0 点间断时，其间断点类型也未必与 x_0 之于 $g(x)$ 及 y_0 之于 $f(y)$ 的情况相同。

关键词

复合函数，连续，间断，邻域

1. 引言

复合函数是高等数学和数学分析中的一类常见函数, 其连续性是非常重要的性质, 有着广泛的用途, 如：函数在某点不连续, 则函数在这一点不可导。函数在某个区间上连续, 则函数在该区间上定积分、不定积分都存在。同时, 函数的间断点的类型也非常重要。例如, 函数在某区间上有有限个第一类间断点时, 函数在该区间上定积分存在, 不定积分却不存在。如何快速准确判断复合函数的连续性与间断点及其类型显得尤为必要, 本文将从内外函数出发, 结合实例给出复合函数连续性、间断点的类型及相关结论。

下面给出复合函数的定义。

定义 1.1. [1] *设函数 $z = f(y)$ 的定义域为 D_f, 函数 $y = g(x)$ 的定义域为 D_g, 且其值域 $R_g \subset D_f$, 则由下式确定的函数*

$$y = f[g(x)], \quad x \in D_g$$

称为由函数 $y=g(x)$ 与函数 $z=f(y)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D_g，变量 y 称为中间变量。

作为本文的预备知识，下面以引理的形式给出几个已经熟知的结论 [1]。

引理 1.1. (**复合函数的极限运算法则**) 设函数 $z=f[g(x)]$ 由 $y=g(x)$ 与函数 $z=f(y)$ 复合而成，$z=f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$，$\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq y_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{y\to y_0} f(y)=A.$$

引理 1.2. 设函数 $z=f[g(x)]$ 由 $y=g(x)$ 与 $z=f(y)$ 复合而成。记 $D_{f\circ g}$ 为复合函数的定义域，且 $\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$，而函数 $z=f(y)$ 在 $y=y_0$ 连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{y\to y_0} f(y)=f(y_0).$$

引理 1.3. 设函数 $z=f[g(x)]$ 由 $y=g(x)$ 与 $z=f(y)$ 复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$，若函数 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，且函数 $z=f(y)$ 在 $y=y_0$ 连续，则复合函数 $z=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 也连续。

引理 1.4. (**函数极限与数列极限的关系**) 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0$ $(n\in\mathbb{N}^+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

连续性在数学上是很优美的性质，引理 1.3 表达的意思总结起来就是：**“内函数连续，且外函数连续，则复合函数也连续”**。但人们很少关心当内函数或外函数间断时复合函数的连续性，以及当复合函数间断时，其间断点类型如何。鉴于此，本文将对复合函数的连续及间断情况做一全面的分析研究。

2. 内、外函数至少有一个间断时复合函数的连续性分析与实例证明

由于篇幅所限，本文仅给出其中一些结论的难以构造的实例，结论中所涉及的其他命题对应的实例读者可自行给出，文中不再赘述。

定理 2.1. 设函数 $y=g(x)$ 在 x_0 处连续，函数 $z=f(y)$ 在 y_0 处间断，则复合函数 $f[g(x)]$ 在 x_0 处可能连续，也可能间断。当 $f[g(x)]$ 在 x_0 处间断时，其间断点类型与 y_0 之于 $f(y)$ 的间断点类型未必相同。

例 2.1. 设函数 $g(x)=x^2+1$，$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & y<1;\\ y, & x\geq 1.\end{cases}$

易知，$y=g(x)$ 在 $x_0=0$ 点连续，且 $y_0=g(x_0)=1$ 是 $f(y)$ 的第二类间断点，而复合函数 $z=f[g(x)]$ 在 $x_0=0$ 点连续。

例 2.2. 设函数 $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 和 $f(y)=\begin{cases}1-y, & y<0;\\ y, & y\geq 0.\end{cases}$

易知, $y=g(x)$ 在 $x_0=0$ 点连续, 且 $y_0=g(x_0)=0$ 是 $f(y)$ 的第一类间断点, 下面利用引理 1.4 判别复合函数 $z=f[g(x)]$ 在 $x_0=0$ 点连续性。取如下两种形式的数列：

$$x'_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}>0 \text{ 和 } x''_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}>0,\ \ (n\in\mathbb{Z}^+).$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}x'_n=\lim_{n\to\infty}x''_n=0,$$

注意到

$$g(x'_n)=x'_n>0,\ \ g(x''_n)=-x''_n<0,$$

进一步, 有

$$f[g(x'_n)]=x'_n\to 0,\ \text{而}\ f[g(x''_n)]=1-x''_n\to 1,(n\to\infty).$$

所以, $x=0$ 为复合函数 $z=f[g(x)]$ 的第二类间断点。

例 2.3. 设函数 $g(x)=-x^2$, $f(y)=\begin{cases}1-y, & y\le 0;\\ 2, & y=0;\\ \dfrac{1}{y}, & y>0.\end{cases}$

注意到 $y=0$ 是 $z=f(y)$ 的第二类间断点, 且 $f[g(x)]=\begin{cases}1+x^2, & x\ne 0;\\ 2, & x=0.\end{cases}$ 而 $x=0$ 是复合函数 $z=f[g(x)]$ 的第一类间断点。

定理 2.2. 设 $x_0\in[a,b]$ 是函数 $y=g(x)$ 的第一类间断点, 且函数 $z=f(y)$ 连续, 则可分为如下情形况:

◇ 当 x_0 为可去间断点时, $\begin{cases}\text{若 } f[g(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)], \text{则函数 } f[g(x)] \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续;}\\ \text{若 } f[g(x_0)]\ne\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)], \text{则 } x_0 \text{ 是函数 } f[g(x)] \text{ 的可去间断点;}\end{cases}$

◇ 当 x_0 为跳跃间断点时, 我们根据 $g(x_0)$ 存在与否分成下面两种情况,

如果 $g(x_0)$ 不存在, $\begin{cases}\text{若 } f[g(x_0^-)]=f[g(x_0^+)], \text{则 } x_0 \text{ 是函数 } f[g(x)] \text{ 的可去间断点;}\\ \text{若 } f[g(x_0^-)]\ne f[g(x_0^+)], \text{则 } x_0 \text{ 是函数 } f[g(x)] \text{ 的跳跃间断点;}\end{cases}$

如果 $g(x_0)$ 存在, $\begin{cases}\text{若 } f[g(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)], \text{则函数 } f[g(x)] \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续;}\\ \text{若 } f[g(x_0)]\ne\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)], \text{则 } x_0 \text{ 是函数 } f[g(x)] \text{ 的可去间断点;}\\ \text{若 } \lim\limits_{x\to x_0^-}f[g(x)]\ne\lim\limits_{x\to x_0^-}f[g(x)], \text{则 } x_0 \text{ 是函数 } f[g(x)] \text{ 的跳跃间断点。}\end{cases}$

证明. 当 x_0 为可去间断点时, 我们注意到, 尽管有 $g(x_0)\ne\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, 但并不能保证 $f[g(x_0)]\ne f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]$ 一定成立, 因此, 当 $f[g(x_0)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]$ 时, 即 $f[g(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$ 时,函数 $f[g(x)]$ 在 x_0 点连续。而当 $f[g(x_0)]\ne f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]$ 时, x_0 为函数 $f[g(x)]$ 的可去间断点。

当 x_0 为跳跃间断点时, 在 $g(x_0)$ 不存在的条件下定理的结论显然。下面考虑 $g(x_0)$ 存在的情况。而 $g(x_0^-)\ne g(x_0^+)$ 并不能保证复合函数中有 $f[g(x_0^-)]\ne f[g(x_0^+)]$, 因此, 充分利用外函数的连续

性, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f[g(x)] = f[g(x_0^-)]$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f[g(x)] = f[g(x_0^+)]$, 三种结论显然成立。 □

定理 2.2 对应的实例很容易找到, 这里一并省略。在 x_0 为跳跃间断点的条件下, 还有下列的特殊情况值得我们注意。

注 2.1. 若 $|g(x_0^-)| \neq |g(x_0^+)|$ 且 $g(x_0)$ 不存在, 对于自变量符号不敏感的外函数, 诸如:

$$f(x) = a|x|^n + b,\quad f(x) = ax^{2n} + b,\quad f(x) = a(\cos x)^b,\text{ 等, 其中 } a\text{、}b \text{ 为常数, } n \text{ 为整数}$$

有 $f[g(x_0^-)] = f[g(x_0^+)]$, 于是 x_0 为复合函数 $f[g(x)]$ 的可去间断点。

注 2.2. 若 $|g(x_0^-)| \neq |g(x_0^+)|$ 且 $g(x_0)$ 存在, 对于自变量符号不敏感的外函数,

- 当 $|g(x_0^-)| = |g(x_0^+)| \neq |g(x_0)|$ 时, x_0 为复合函数 $z = f[g(x)]$ 的可去间断点;
- 当 $|g(x_0^-)| = |g(x_0^+)| = |g(x_0)|$ 时, 复合函数 $z = f[g(x)]$ 在 x_0 处连续。

定理 2.3. 设 x_0 是函数 $y = g(x)$ 的第二类间断点, 且函数 $z = f(y)$ 在 y_0 处连续, 则 $z = f[g(x)]$ 在 x_0 处可能连续, 也可能间断。当 x_0 为函数 $z = f[g(x)]$ 的间断点时, 其类型与 x_0 之于 $g(x)$ 未必相同。

例 2.4. 设函数 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x > 1; \\ x, & x \leq 1. \end{cases}$ $f(y) \equiv 1.$

注意到 $x = 1$ 是 $y = g(x)$ 第二类间断点, 但复合函数 $z = f[g(x)]$ 在 $x = 1$ 处连续。

例 2.5. 设函数 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x > 1; \\ x, & x \leq 1. \end{cases}$ $f(y) = \begin{cases} y, & y \leq 1; \\ \frac{1}{y}, & y > 1. \end{cases}$

$x = 1$ 是 $y = g(x)$ 第二类间断点, 且 $f[g(x)] = \begin{cases} x-1, & 1 < x < 2; \\ 2, & x \leq 1; \\ \frac{1}{x-1}, & x \geq 2. \end{cases}$ 易知 $x = 1$ 是复合函数 $z = f[g(x)]$ 的第一类间断点。

例 2.6. 设函数 $g(x) = \begin{cases} xsin\dfrac{1}{x}, & x > 0; \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$ $f(y) = \begin{cases} y, & y \geq 0; \\ \frac{1}{y}, & y < 0. \end{cases}$

显然, $x = 0$ 是 $y = g(x)$ 第一类间断点, 且 $f(y)$ 在 $y = 1$ 处连续。取如下两种形式的数列:

$$x_n' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} > 0 \text{ 和 } x_n'' = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} > 0,\quad (n \in \mathbb{Z}^+).$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = 0,$$

注意到

$$g(x_n') = x_n' > 0,\quad g(x_n'') = -x_n'' < 0,$$

进一步, 有

$$f[g(x_n')] = x_n' \to 0,\ 而\ f[g(x_n'')] = -\frac{1}{x_n''}不存在, (n \to \infty).$$

所以, $x = 0$ 为复合函数 $z = f[g(x)]$ 的第二类间断点。

定理 2.4. *若 $y = g(x)$ 在 x_0 点间断, $z = f(y)$ 在 y_0 处也间断, 则复合函数 $z = f[g(x)]$ 在 x_0 点可能连续, 也可能间断, 并且其间断点类型不依赖于 x_0 之于 $g(x)$ 与 y_0 之于 $f(y)$ 的间断点情况。*

以下就定理 2.4 的结论给出相应的实例。

例 2.7. 设函数 $g(x) = \begin{cases} 1-x, & x > 1; \\ x, & x \le 1. \end{cases}$ $f(y) = \begin{cases} y, & y > 1; \\ 0, & y \le 1. \end{cases}$

注意到 $x = 1$ 是 $y = g(x)$ 第一类间断点, $y = 1$ 是 $z = f(y)$ 的第一类间断点, 且 $f[g(x)] = 0$, 易知复合函数 $z = f[g(x)]$ 在 $x = 1$ 处连续。

例 2.8. 设函数 $g(x) = \begin{cases} 1-x, & x > 1; \\ x, & x \le 1. \end{cases}$ $f(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & y > 1; \\ 0, & y \le 1. \end{cases}$

注意到 $x = 1$ 是 $y = g(x)$ 第一类间断点, $y = 1$ 是 $z = f(y)$ 的第二类间断点, 且 $f[g(x)] = 0$, 易知复合函数 $z = f[g(x)]$ 在 $x = 1$ 处连续。

例 2.9. 设函数 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0; \\ -x, & x \le 0. \end{cases}$ $f(y) = \begin{cases} 1, & y \ge 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$

注意到 $x = 0$ 是 $y = g(x)$ 第二类间断点, $y = 0$ 是 $z = f(y)$ 的第一类间断点, 且 $f[g(x)] = 1$, 易知复合函数 $z = f[g(x)]$ 在 $x = 0$ 点连续。

例 2.10. 设函数 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0; \\ x, & x \le 0. \end{cases}$ $f(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & y > 0; \\ y, & y \le 0. \end{cases}$

注意到 $x = 0$ 是 $y = g(x)$ 第二类间断点, $y = 0$ 也是 $z = f(y)$ 的第二类间断点, 且 $f[g(x)] = x$, 易知复合函数 $z = f[g(x)]$ 在 $x = 0$ 点连续。

例 2.11. 设函数 $g(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ $f(y) = \begin{cases} -1, & y \ge 0; \\ 1, & y < 0. \end{cases}$

显然, $x = 0$ 是 $y = g(x)$ 第一类间断点, $y = 0$ 也是 $z = f(y)$ 的第一类间断点, 且复合函数有形式：$f[g(x)] = \begin{cases} -1, & x \ge 0; \\ 1, & x < 0. \end{cases}$ 从而, $x = 0$ 也是复合函数 $z = f[g(x)]$ 的第一类间断点。

例 2.12. 设函数 $g(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ -1, & x\le 0.\end{cases}$ $f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & y>0;\\ y, & y\le 0.\end{cases}$

显然, $x=0$ 是 $y=g(x)$ 第一类间断点, $y=0$ 是 $z=f(y)$ 的第二类间断点, 且复合函数有形式: $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x>0;\\ -1, & x\le 0.\end{cases}$ 从而, $x=0$ 是复合函数 $z=f[g(x)]$ 的第一类间断点。

例 2.13. 设函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ x, & x\le 0.\end{cases}$ $f(y)=\begin{cases}1, & y>0;\\ -1, & y\le 0.\end{cases}$

显然, $x=0$ 是 $y=g(x)$ 第二类间断点, $y=0$ 也是 $z=f(y)$ 的第一类间断点, 且复合函数有形式: $f[g(x)]=\begin{cases}-1, & x>0;\\ 1, & x\le 0.\end{cases}$ 从而, $x=0$ 是复合函数 $z=f[g(x)]$ 的第一类间断点。

例 2.14. 设函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ x-1, & x\le 0.\end{cases}$ $f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & y>0;\\ y, & y\le 0.\end{cases}$

显然, $x=0$ 是 $y=g(x)$ 第二类间断点, $y=0$ 也是 $z=f(y)$ 的第二类间断点, 且复合函数有形式: $f[g(x)]=\begin{cases}x, & x>0;\\ x-1, & x\le 0.\end{cases}$ 从而, $x=0$ 是复合函数 $z=f[g(x)]$ 的第一类间断点。

例 2.15. 设函数 $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x<0.\end{cases}$ $f(y)=\begin{cases}y, & y\ge 0;\\ 1-y, & y<0.\end{cases}$

由于 $x=0$ 是 $y=g(x)$ 第一类间断点, $y=0$ 也是 $z=f(y)$ 的第一类间断点, 考虑如下子列:

$$x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}>0 \text{ 和 } x_n''=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}>0,\ \ (n\in\mathbb{Z}^+).$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}x_n'=\lim_{n\to\infty}x_n''=0,$$

注意到

$$g(x_n')=x_n'>0,\ \ g(x_n'')=-x_n''<0,$$

进一步, 有

$$f[g(x_n')]=x_n'\to 0,\ \text{而}\ f[g(x_n'')]=1-x_n''\to 1,(n\to\infty).$$

所以, $x=0$ 为复合函数 $z=f[g(x)]$ 的第二类间断点。

例 2.16. 设函数 $g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ 1, & x<0. \end{cases}$ $f(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & y>0; \\ 1-y, & y\le 0. \end{cases}$

由于 $x=0$ 是 $y=g(x)$ 第一类间断点, $y=0$ 也是 $z=f(y)$ 的第二类间断点, 对于例 2.15 中的子列 $\{x'_n\}$ 与 $\{x''_n\}$, 易知

$$f[g(x'_n)]=\frac{1}{x'_n}\to\infty,\ 而\ f[g(x''_n)]=1-x''_n\to 1,(n\to\infty).$$

所以, $x=0$ 为复合函数 $z=f[g(x)]$ 的第二类间断点。

例 2.17. 设函数 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0; \\ -x, & x\le 0. \end{cases}$ $f(y)=\begin{cases} y, & y>0; \\ 1-y, & y\le 0. \end{cases}$ 易知 $f[g(x)]=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0; \\ -x, & x\le 0. \end{cases}$

$x=0$ 是 $y=g(x)$ 第二类间断点, $y=0$ 是 $z=f(y)$ 的第一类间断点, 但 $x=0$ 是复合函数 $z=f[g(x)]$ 的第二类间断点。

例 2.18. 设函数 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0; \\ -x, & x\le 0. \end{cases}$ $f(y)=\begin{cases} y, & y\ge 0; \\ \dfrac{1}{y}, & y<0. \end{cases}$ 易知 $f[g(x)]=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0; \\ -x, & x\le 0. \end{cases}$

$x=0$ 是 $y=g(x)$ 第二类间断点, $y=0$ 也是 $z=f(y)$ 的第二类间断点, 但 $x=0$ 是复合函数 $z=f[g(x)]$ 的第二类间断点。

总之, 除了内、外层函数都连续, 复合函数也连续外, 其他条件下都没有必然的结果。

基金项目

本文由克拉玛依校区《数学公共基础课课程群建设》、《大学物理及大学物理实验课程群建设》和新疆维吾尔自治区《石油类高校以培养高层次应用型人才为目标的数学公共课程教学的实践与探索》项目资助(2017JG095)。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(上) [M]. 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org