Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(4), 589-594**
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84065

Hans汉斯

Judgment Conditions and Proof of Set Sequence Compactness in Metric Space $C(R^n)$

Mingze Zhao, Baoqiang Yan

Shandong Normal University, Jinan Shandong
Email: 976113325@qq.com

Received: Mar. 18th, 2019; accepted: Apr. 2nd, 2019; published: Apr. 9th, 2019

Abstract

Set sequence compactness is an important concept in functional analysis. Using the sequence compactness, one can turn infinite dimensional problems to finite dimensional problems. In this paper, we give a necessary and sufficient condition for set sequence compactness on metric space $C(R^n)$.

Keywords

Sequence Compactness, $C(R^n)$, ε-Net, Uniform Boundedness, Equicontinuity

度量空间$C(R^n)$中集合列紧性的判定条件及证明

赵明泽，闫宝强

山东师范大学，山东 济南
Email: 976113325@qq.com

收稿日期：2019年3月18日；录用日期：2019年4月2日；发布日期：2019年4月9日

摘　要

集合列紧在泛函分析中是一个重要的概念。可以将无限问题化为有限情形进行讨论。本文给出了距离空间$C(R^n)$中集合列紧的充分必要条件。

关键词

列紧性，$C(R^n)$，ε网，一致有界，等度连续

文章引用: 赵明泽, 闫宝强. 度量空间 $C(R^n)$中集合列紧性的判定条件及证明[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 589-594.
DOI: 10.12677/aam.2019.84065

1. 引言

设 $C(R^n)$ 空间是 R^n 上全体连续函数构成的空间。则对任意 $u(x)\in C(R^n)$，令

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\max\limits_{x\le k}|u(x)|}{1+\max\limits_{x\le k}|u(x)|},$$

其中 $k\in N$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$。集合的列紧性在泛函分析的学习中是一个基本且重要的概念，它还在拓扑学、偏微分方程等领域中有着广泛的应用。对于具体的距离空间上的紧性问题，常用构造 ε 网和一致有界且等度连续来讨论。本文通过集合列紧性的性质，构造相应的列紧条件证明了 $C(R^n)$ 空间的列紧性。

2. 预备知识

首先回忆一下在泛函分析中所学的关于紧性的一些常用定义与性质。

定义 1.1 [1] 设 (X,ρ) 是一个距离空间，A 为其一个子集，如果 A 中的任何点列在 X 中有一个收敛的子列，称 A 是列紧的。若这个子列还收敛到 A 中的点，则称 A 是自列紧的。如果空间 X 是列紧的，那么成 X 为列紧空间。

定理 1.1 [1] 设 (X,ρ) 是一个距离空间，为了其子集 M 是紧的当且仅当 M 是自列紧的。

定义 1.2 [2] 设 (X,ρ) 是距离空间，A 是 X 的一个子集，$B\subset A$，如果有 $\varepsilon>0$，使得以 B 中各点为心，以 ε 为半径的开球全体覆盖 $A\subset U_{x\in B}O(X,\varepsilon)$，则称 B 是 A 的 ε 网，如果 B 是有限集，则称 B 是 A 的有限 ε 网。

定义 1.3 [1] $C(M)$ 空间：设 M 是一个紧的距离空间，带有距离 ρ，$C(M)$ 表示 $M\to R^1$ 的一切连续映射的全体。定义

$$d(u,v)=\max_{x\in M}|u(x)-v(x)|,(\forall u,v\in C(M)).$$

通过验证可知 $(C(M),d)$ 是完备的距离空间。

定理 1.2 [1] (Arzela-Ascoli)为了 $F\subset C(M)$ 是一个列紧集，当且仅当 F 是一致有界且等度连续的函数族。

定义 1.4 [1] 设 (X,ρ) 是距离空间，A 是 B 的子集，如果 $\forall\varepsilon>0$，都存在着 A 的一个有限 ε 网，则称集合 A 是完全有界的。

3. 主要结论

定理 2.1 $C(R^n)$ 空间的子集 U 列紧的充要条件是

1) 对任意 k 属于 C，当 $\|x\|\le k$ 时，存在 $C_k>0$，使得 $\sup\limits_{\|x\|\le k}|u(x)|\le C_k$，对 $\forall u\in U$。

2) 对任意的 $k>0$，$\{u(x)|u\in U\}$ 在 $\|x\|\le k$ 上是等度连续的。

证明：首先证 $C(R^n)$ 空间是完备的。令 $\{u_n(x)\}$ 是 $C(R^n)$ 中的基本列，则

$$\rho\left(u_m(x),u_n(x)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_m(x)-u_n(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_m(x)-u_n(x)\right|}\to 0,(m,n\to 0).$$

由此知对任意的 $m,n\in N$， $\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_m(x)-u_n(x)\right|\to 0$，$(m,n\to 0)$。事实上对每一个固定的 $j\in N$，对 $\forall\varepsilon>0$， $\exists N_j$，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_m(x)-u_n(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_m(x)-u_n(x)\right|}<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}},\left(m,n>N_j\right).$$

取第 j 项，它不会超过所有项的总和，故

$$\frac{1}{2^j}\frac{\max\limits_{\|x\|\le j}\left|u_m(x)-u_n(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le j}\left|u_m(x)-u_n(x)\right|}<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\Rightarrow\max\limits_{\|x\|\le j}\left|u_m(x)-u_n(x)\right|<\varepsilon.$$

这说明对任意的 $\|x\|\le k$， $\{u_n(x)\}$ 在 $\{x\|\|x\|\le k\}$ 上收敛，并且存在 $u^{*k}(x)\in C\left(R^n\right)$，使得 $\left|u_n(x)-u^{*k}(x)\right|\to 0$，$(n\to\infty)$， $\|x\|\le k$ 。

定义

$$u^*(x)=\begin{cases}u^{*1}(x),x\in\overline{B}(0,1);\\ u^{*2}(x),x\in\overline{B}(0,2);\\ \qquad\cdots\\ u^{*k}(x),x\in\overline{B}(0,k).\end{cases}$$

证明 $u_n(x)\xrightarrow{\rho}u^*(x)$，$(n\to\infty)$。事实上，就是要证明

$$\rho\left(u_n(x),u^*(x)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}\to 0,(n\to\infty)\text{。}$$

也就是要证明，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}<\varepsilon$$

要对无穷多项进行评估，常用“分段论证法”，这里在 n_0 项处分段，其中 n_0 充分大，使得 $\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$。

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}\\ &=\sum_{i=1}^{n_0}\frac{1}{2^i}\frac{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}+\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}\end{aligned}$$

为了有限项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$，对任意的 $n<n_0$，存在 N_n，使得

$$\max_{\|x\|\le n}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取定 $N=\{N_1,N_2,\cdots,N_{n_0}\}$，便有 $n>N$ 时，

$$\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\frac{\max_{\|x\|\le n}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}{1+\max_{\|x\|\le n}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}$$

$$<\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\max_{\|x\|\le n}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|<\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

无穷项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$，

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}{1+\max_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}<\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $n>N$ 时，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}{1+\max_{\|x\|\le i}\left|u_n(x)-u^*(x)\right|}<\varepsilon.$$

成立。故 $\left(C\left(R^n\right),\rho\right)$ 是完备的度量空间。

必要性：证明 $\{u\,|\,u\in U\}$ 在 $\|x\|\le k$ 上有上确界。因 $U\subset C\left(R^n\right)$ 是列紧集，从而子集 U 是完全有界集，则存在 U 的一个有限的 $\frac{1}{2^{k+1}}$ 网 $N\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)=\left\{u_1^k,u_2^k,\cdots,u_n^k\right\}\subset U$，并且 $U\subset U_{i=1}^{k}B\left(u_i^k,\frac{1}{2^{k+1}}\right),(i=1,2,\cdots,k)$。对 $\forall k>0$，存在 $u\in B\left(u_i^k,\frac{1}{2^{k+1}}\right)$，当 $n=1$ 时，有 $\rho\left(u,u_1^k\right)\le\frac{1}{2^{k+1}}$，即

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max_{\|x\|\le i}\left|u(x)-u_1^k(x)\right|}{1+\max_{\|x\|\le i}\left|u(x)-u_1^k(x)\right|}\le\frac{1}{2^{k+1}}.$$

当 i 取第 k 项，

$$\frac{1}{2^k}\frac{\max_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_1^k(x)\right|}{1+\max_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_1^k(x)\right|}\le\frac{1}{2^{k+1}}.$$

$$\max_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_1^k(x)\right|\le 1.$$

当 $n=2$ 时，$\rho\left(u,u_2^k\right)\le\frac{1}{2^{k+1}}$，即

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\max_{\|x\|\le i}\left|u(x)-u_2^k(x)\right|}{1+\max_{\|x\|\le i}\left|u(x)-u_2^k(x)\right|}\le\frac{1}{2^{k+1}}.$$

当 i 取第 k 项，

$$\max_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_2^k(x)\right|\le 1.$$

当 $n=k$ 时，$\rho\left(u,u_k^k\right)\le\frac{1}{2^{k+1}}$，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u(x)-u_k^k(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le i}\left|u(x)-u_k^k(x)\right|}\le\frac{1}{2^{k+1}}.$$

当 i 取第 k 项，

$$\max_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_k^k(x)\right|\le 1.$$

所以存在 $C_k=1+\max\limits_{1\le i\le k}\left\|u_i(x)\right\|$，使得

$$\sup_{\|x\|\le k}\left|u_i\right|\le C_k$$

证明 $\{u|u\in U\}$ 在 $\overline{B}(0,k)$ 上是等度连续函数。因为 $C\left(R^n\right)$ 是完备的空间，所以 $U\subset C\left(R^n\right)$ 是完全有界集，则存在 U 的一个 $\frac{\varepsilon'}{3}$ 网且是个有穷集，记 $N\left(\frac{\varepsilon'}{3}\right)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}\subset U$ 即对 $\forall\varepsilon>0$，$u(x)\in U$，$\exists u_i\in N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$，使得 $\left\|u(x)-u_i(x)\right\|<\frac{\varepsilon}{3}$。这就表明当取 $\varepsilon'>0$ 时，其中 $0<\dfrac{\frac{\varepsilon'}{3}\cdot 2^k}{1-\frac{\varepsilon'}{3}\cdot 2^k}<\frac{\varepsilon}{3}$，

$$\rho\left(u(x),u_i(x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\max\limits_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|}<\frac{\varepsilon'}{3}$$

整体小于 $\frac{\varepsilon'}{3}$，则取第 k 项同样小于 $\frac{\varepsilon'}{3}$，得

$$\frac{1}{2^k}\frac{\max\limits_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|}<\frac{\varepsilon'}{3}.$$

小于号两边同乘以 2^k 得

$$\frac{\max\limits_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|}{1+\max\limits_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|}<\frac{\varepsilon'}{3}\cdot 2^k.$$

再同乘以 $1+\max\limits_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|$ 得

$$\max_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|<\frac{\varepsilon'}{3}\cdot 2^k\cdot\left(1+\max_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|\right).$$

所以最后计算得

$$\max_{\|x\|\le k}\left|u(x)-u_i(x)\right|<\frac{\frac{\varepsilon'}{3}\cdot 2^k}{1-\frac{\varepsilon'}{3}\cdot 2^k}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

其次对这有穷函数 $N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，由函数的连续性知，对每一个 $1\le i\le n$ 及 $\forall\varepsilon>0$，

$\exists\delta_i(\varepsilon)>0$，当 $\rho(x_1,x_2)<\delta_i(\varepsilon)$ 时，有 $|u_i(x_1)-u_i(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$，$(i=1,2,\cdots,n)$。故对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta_i(\varepsilon)=\min\{\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon),\cdots,\delta_n(\varepsilon)\}$，使得对任意的 $u(x)\in U$，$x_i\le k$，当 $\rho(x_1,x_2)<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|u(x_1)-u(x_2)|&\le|u(x_1)-u_i(x_1)|\\&\quad+|u_i(x_1)-u_i(x_2)|+|u(x_2)-u_i(x_2)|\\&<2\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 U 是等度连续的。

充分性：设任意的 $\varepsilon>0$ 上，$\{u\}$ 在 $\overline{B}(0,k)$ 上是一致有界且等度连续的。由(Arzela-Ascoli)定理知 $C(\overline{B}(0,k))$ 是列紧的。只须证 U 存在有限的 ε 网。所以对任意的 $\varepsilon>0$，取 $n_0>0$。使得 $\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\le\frac{\varepsilon}{3}$。又通过 $\{u|u\in U\}_{\|x\|\le n_0}$ 是一致有界且等度连续的可知存在一个有限 $\frac{\varepsilon}{4}$ 网，记 $N\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}_{\|x\|\le n_0}$。取 $N(\varepsilon)=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\forall u\in\overline{B}(0,n_0)$，$\exists u_i\in N\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$，$(i=1,2,\cdots,k)$ 使得 $\|u-u_i\|_{\|x\|\le n_0}\le\frac{\varepsilon}{4}$，即

$$\begin{aligned}\rho(u,u_i)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\max_{\|x\|\le k}|u(x)-u_i(x)|}{1+\max_{\|x\|\le k}|u(x)-u_i(x)|}\\&=\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{2^i}\frac{\max_{\|x\|\le k}|u(x)-u_i(x)|}{1+\max_{\|x\|\le k}|u(x)-u_i(x)|}+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\max_{\|x\|\le k}|u(x)-u_i(x)|}{1+\max_{\|x\|\le k}|u(x)-u_i(x)|}\\&<\frac{\varepsilon}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{2^k}+\frac{\varepsilon}{2}\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明对任意的 $\varepsilon>0$，任意子集 $U\subset C(R^n)$ 在 $\|x\|\le k$ 上是自列紧的。

参考文献

[1] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 2004: 1-157.

[2] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 等. 实变函数与泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985: 1-119.