

The Anti-Forcing Numbers of the Edge Deleted Ladder Graphs and the “L” Type Ladder Graphs

Zhenyun Han, Haiyuan Yao*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: hzymath@163.com, *hyyao@nwnu.edu.cn

Received: Jul. 20th, 2019; accepted: Aug. 2nd, 2019; published: Aug. 9th, 2019

Abstract

Through the classification calculation method, the anti-forcing number of the edge deleted ladder graphs is obtained, and the anti-forcing number of the “L” type ladder graphs is obtained. In the process, a combination proof of the Fibonacci sequence is obtained.

Keywords

Perfect Matching, Anti-Forcing Number, Anti-Forcing Spectrum, The Edge Deleted Ladder Graphs, The “L” Type Ladder Graphs

删边梯子图和“L”型梯子图的反强迫数

韩振云, 姚海元*

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州
Email: hzymath@163.com, *hyyao@nwnu.edu.cn

收稿日期: 2019年7月20日; 录用日期: 2019年8月2日; 发布日期: 2019年8月9日

摘要

通过分类计算的方法得到了删边梯子图的反强迫谱, 进而得到了“L”型梯子图的反强迫数, 过程中得到了斐波那契数列的一个组合证明。

*通讯作者。

关键词

完美匹配, 反强迫数, 反强迫谱, 删边梯子图, “L”型梯子图

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1997年, 李学良研究了有强迫单边的六角系统[1]。2007年, Vukičević 和 Trinajstić 在处理有缺陷的苯类化合物的过程中推广了强迫单边的概念, 提出了反强迫集和反强迫数的概念[2]。2016年雷洪川, 叶永南和张和平引入了图的完美匹配的反强迫数的概念[3]。2008年 Vukičević 和 Trinajstić 得出了卡塔型六角系统的反强迫数[4]。同年邓汉元给出了双链六角系统的反强迫数[5]。2011年张倩倩等人证明了卡塔型-亚苯基系统的反强迫数等于该系统中六角形的个数[6]。2013年蒋晓艳等人得到了硼氮富勒烯图的反强迫数[7]。2015年 Hwang 等引入了图的反强迫多项式的概念[8]。2017年邓凯和张和平证明了卡塔型六角系统的反强迫谱是连续的[9]。2018年姚海元等得到了循环梯状图完美匹配的反强迫谱和卢卡斯数列之间的关系[10]。2019年赵爽等加细了反强迫谱的概念, 引入了反强迫多项式的概念, 并计算了方格子等图类的反强迫多项式。总之, 反强迫数的研究, 大量的图类的反强迫谱/多项式有待计算[11]。本文主要研究了删边梯子图 IL_n^{-i} 的反强迫数, 得到了 IL_n^{-i} 的反强迫谱。并通过收缩 IL_n^{-i} 两条水平边的方法得到了“L”型梯子图的反强迫数, 由此得到了几个与斐波那契数列和卢卡斯数列相关的结果。本文将 $a \equiv b \pmod{2}$ 简记为 $a \equiv b$, 表示 a, b 同奇偶。

2. 预备知识

设 M 是 G 的一个完美匹配, $S \subseteq E(G)$, 若 M 是 $G-S$ 的唯一完美匹配, 则称 S 为 M 的一个反强迫集。 M 的最小反强迫集的大小称为 M 的反强迫数, 记为 $af(G, M)$ 。图 G 的最小反强迫数是一个整体概念, 其值等于 G 中所有完美匹配反强迫数的最小值, 记为 $af(G)$ 。类似的, 图 G 的反强迫数的最大值叫做 G 的最大反强迫数, 记为 $Af(G)$ 。设 \mathcal{A} 是 G 中 M -交错圈组成的集合。若 \mathcal{A} 中任意两个 M -交错圈不交或仅交于 M 中的边, 我们称 \mathcal{A} 是一个相容 M -交错集。图 G 的最大相容 M -交错集的大小记为 $c'(M)$ 。

引理 1 [11] 若 M 是图 G 的一个完美匹配, 则 $af(G, M) \geq c'(M)$, 若图 G 是平面二部图, 则 $af(G, M) = c'(M)$ 。

定义 1 我们把一个梯子图 $L_n = P_n \times P_2$ 水平放置, 其顶点从上到下、从左到右依次记为 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, 而后我们把在 L_n 中删去第 i 条竖直边 $a_i b_i$ 得到的图(如图 1 所示)称为删去第 i 条竖直边的删边梯子图。记为 IL_n^{-i} 。

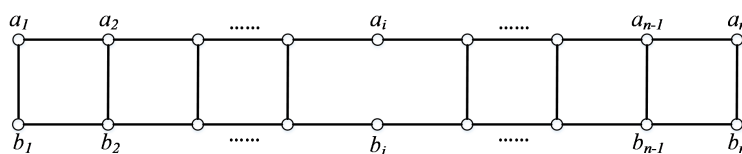


Figure 1. The edge deleted ladder graphs IL_n^{-i}

图 1. 删边梯子图 IL_n^{-i}

定义 2 设 IL_n^{-i} 是一个删边梯子图, 我们将 IL_n^{-i} 的两边 $a_{i-1}a_i, a_i a_{i+1}$ 收缩得到的图称为“L”型梯子图(如图 2 所示), 记为 LL_n^{-i} 。

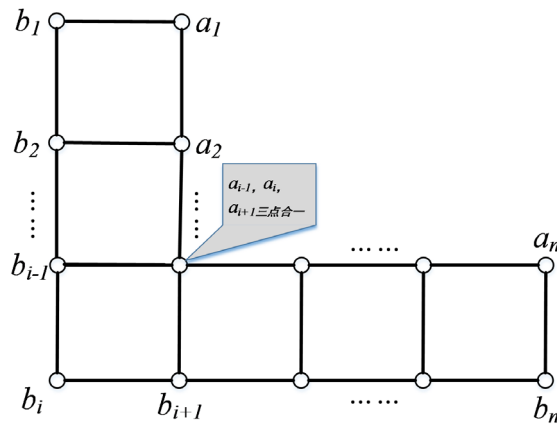


Figure 2. “L” type ladder graphs LL_n^{-i}

图 2. “L” 型梯子图 LL_n^{-i}

在 IL_n^{-i} 和 LL_n^{-i} 中将形如 $a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1}$ 的边称为**水平边**, 而形如 $a_i b_i$ 的边称为**垂直边**。当给定该图的一个完美匹配 M , 若 $a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1} \in M$, 则将其称为**水平匹配边**; 若 $a_i b_i \in M$, 则将其称为**垂直匹配边**, 垂直匹配边的总数记为 p , 特别的形如 $a_j b_j \in M (2 \leq j \leq n-1)$ 称为**内部垂直匹配边**。

类似文献[10]引理 3, 我们可证

引理 2 若 M 是 L_n 的包含 $p (0 \leq p \leq n)$ 条垂直匹配边的完美匹配, 则

$$af(L_n, M) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & p = 0 \\ \frac{n+p-2}{2}, & p \geq 1 \end{cases}.$$

引理 3 若 M 是 IL_n 的包含 $p (0 \leq p \leq n-2)$ 条垂直匹配边的完美匹配, 则 $p \equiv n$ 且其水平匹配边必成对出现, 即 $a_m a_{m+1} \in M \Leftrightarrow b_m b_{m+1} \in M$ 。

证明 设 M 是 IL_n 的完美匹配, 若 IL_n 的某一对水平边 $a_m a_{m+1} \in M, b_m b_{m+1} \notin M$, 则整个图无垂直匹配边且至少存在两个 M -非饱和的点, 与 M 是 IL_n 的完美匹配矛盾, 所以 $a_m a_{m+1} \in M$ 时必有 $b_m b_{m+1} \in M$ 。不妨设 M 有 $2q$ 条水平匹配边, 则 $p + 2q = |M| = n$, 因此 $p \equiv n \pmod{2}$ 。

引理 4 设 M 是删边梯子图 IL_n^{-i} 的一个完美匹配, $a_h b_h$ 是 M 的**内部垂直匹配边**, 不妨设 $h < i$, $M_1 = M \cap E(L_h)$; $M_2 = M \cap E(IL_{n-h+1}^{-(i-h+1)})$ 。则

$$af(IL_n^{-i}, M) = af(L_h, M_1) + af(IL_{n-h+1}^{-(i-h+1)}, M_2)。$$

证明 因为 $a_h b_h \in M$, 所以 $L_h \cap IL_{n-h+1}^{-(i-h+1)} = \{a_h b_h\}$, M_1, M_2 分别是 $L_h, IL_{n-h+1}^{-(i-h+1)}$ 上的完美匹配, 且 $M_h \cap M_{n-h+1} = \{a_h b_h\}$, $M_h \cup M_{n-h+1} = M$ 。

一方面, 令 \mathcal{A} 是 IL_n^{-i} 的相容 M -交错集, 令 $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cap E(L_h)$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \cap E(IL_{n-h+1}^{-(i-h+1)})$ 。由于 $a_h b_h \in M$, $a_{h-1} a_h, a_h a_{h+1}, b_{h-1} b_h, b_h b_{h+1} \notin M$ 。对于任意的 M -交错圈 $C \in \mathcal{A}$, $a_{h-1} a_h$ 和 $a_h a_{h+1}$ 不能同时在 C 中, $b_{h-1} b_h$ 和 $b_h b_{h+1}$ 也不能同时在 C 中。若 $a_{h-1} a_h \in C$, 则 $a_h b_h, b_{h-1} b_h \in C$, 此时 $C \in \mathcal{A}_1$ 是一个 M_1 -交错圈。同理, 若 $a_h a_{h+1} \in C$, 则 $a_h b_h, b_h b_{h+1} \in C$, 因此 $C \in \mathcal{A}_2$ 是一个 M_2 -交错圈。否则就有 $a_h b_h \notin C$ 。所以 $C \in \mathcal{A}$ 是一个 M_1

-交错圈或 M_2 -交错圈, 因此 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, 即 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ 。对任意的 $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$, 若 $C_1, C_2 \in \mathcal{A}_1$ (或 \mathcal{A}_2), 则 C_1, C_2 是 M_1 -相容 (或 M_2 -相容) 的。不然 $C_j \in \mathcal{A}_j$ 是 M_j -相容的, $j=1, 2$, 故 $c'(M) \leq c'(M_1) + c'(M_2)$ 。

另一方面, 令 \mathcal{A}_j 是相容 M_j -交错集, $j=1, 2$, 令 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ 。设 $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ 是两个任意 M -交错圈, 若 $C_1, C_2 \in \mathcal{A}_j$, 则 C_1, C_2 是相容 M_j -交错集, $j=1, 2$, 否则设 $C_1 \in \mathcal{A}_1, C_2 \in \mathcal{A}_2$ 。若 $C_1 \cap C_2 = \{a_h b_h\}$, 则 C_1 和 C_2 是 M -相容的。若 C_1, C_2 中最多有一个圈包含 $a_h b_h$, 则 C_1 和 C_2 不交, C_1 和 C_2 也是 M -相容的。因此,

$$c'(M) \geq c'(M_1) + c'(M_2)。$$

综上所述, $c'(M) = c'(M_1) + c'(M_2)$, 故

$$af(IL_n^{-i}, M) = af(L_h, M_1) + af(IL_{n-h+1}^{-(i-h+1)}, M_2)。$$

引理 5 [11] 图 G 的反强迫多项式是一个有如下形式的计数多项式:

$$Af(G, x) = \sum_{M \in \mathcal{M}(G)} x^{af(G, M)}。$$

若 G 没有完美匹配, 则 $Af(G, x) = 0$; 若 G 有唯一的完美匹配, 则 $Af(G, x) = 1$ 。特别地, 对空图我们有 $Af(G, x) = 1$ 。

合并反强迫多项式的同类项, 得到如下结论。

引理 6 [11] 图 G 的反强迫多项式有如下等价定义:

$$Af(G, x) = \sum_{i=af(G)}^{Af(G)} v(G, i) x^i,$$

其中 $v(G, i)$ 表示反强迫数为 i 的完美匹配的个数。

引理 7 [8] 图 G 的反强迫多项式有如下性质:

- 1) $Af(G, 1)$ 表示 G 的完美匹配的个数;
- 2) $\left. \frac{d}{dx} Af(G, x) \right|_{x=1}$ 表示 G 的所有完美匹配的反强迫数之和;
- 3) $\frac{\left. \frac{d}{dx} Af(G, x) \right|_{x=1}}{Af(G, 1)}$ 表示 G 的平均反强迫数。

引理 8 [10] 梯子图 L_n 中含有 $2q = n - p$ 条水平匹配边的完美匹配个数是 $\binom{n-q}{q} = \binom{n+p}{p}$ 。

3. IL_n^{-i} 的反强迫数和反强迫谱

定理 1 若 M 是删边梯子图 IL_n^{-i} 的含有 $p \leq 2$ 条非内部垂直匹配边的完美匹配, 则

$$af(IL_n^{-i}, M) = \begin{cases} \frac{n-2}{2}, & p=0 \\ \frac{n-1}{2}, & p=1 \text{ 且 } i \text{ 为偶数} \\ \frac{n-3}{2}, & p=1 \text{ 且 } i \text{ 为奇数} \\ \frac{n-2}{2}, & p=2 \end{cases}。$$

证明 因为 IL_n^{-i} 是一个不可分解删边梯子图, 所以由引理 1 和分解引理知 IL_n^{-i} 的完美匹配 M 有 $p(p=0,1,2)$ 条垂直匹配边。下面根据 p 值分情况讨论:

情形 1 若 $p=0$, 此时删边梯子图 IL_n^{-i} 无垂直匹配边且 n 为偶数, 匹配方式如图 3 所示。

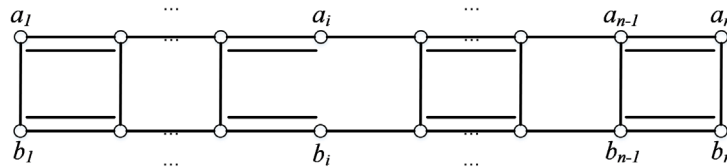


Figure 3. The case $p=0$ in IL_n^{-i}

图 3. IL_n^{-i} 中 $p=0$ 的情形

$$\text{所以 } af(IL_n^{-i}, M) = q - 1 = \frac{n-2}{2};$$

情形 2 若 $p=1$, 此时删边梯子图 IL_n^{-i} 仅有一条垂直匹配边, 不妨设 $a_i b_i$ 是这条垂直匹配边, 当 i 为偶数时, 匹配方式如图 4(a)所示; i 为奇数时, 匹配方式如图 4(b)所示。

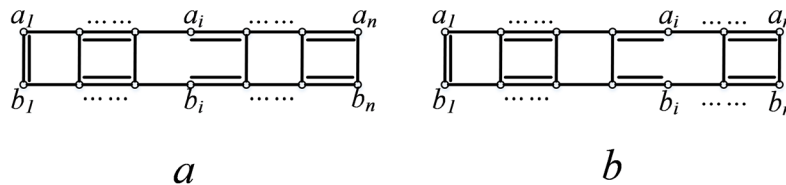


Figure 4. The case $p=1$ (a) i is even; (b) i is odd

图 4. $p=1$ 情形(a) i 为偶数; (b) i 为奇数

令 \mathcal{A} 是 IL_n^{-i} 的相容 M -交错集, 因为一个 M -交错圈至少包含两条垂直边, 当 i 是偶数时, 所有交错 4 圈和交错圈 $a_1 a_2 \cdots a_i a_{i+1} b_{i+1} b_i \cdots b_2 b_1 a_1$ 是 M -相容的, 且用完了每一个垂直单边, 又因包含 $a_1 b_1$ 的 M -相容交错圈必包含 $a_1 a_2$, 故 $|\mathcal{A}|_{\max} = \frac{n-1}{2}$; 当 i 是奇数时, 因没有 M -交错圈能包含 $a_i b_i$ 和 $a_{i-1} b_{i-1}$, 而其余垂直边均包含在 M -相容交错 4 圈中, 故 $|\mathcal{A}|_{\max} = \frac{n-3}{2}$ 。因此由引理 1 知

$$af(IL_n^{-i}, M) = \begin{cases} q = \frac{n-1}{2}, & i \text{ 为偶数} \\ q - 1 = \frac{n-3}{2}, & i \text{ 为奇数} \end{cases};$$

情形 3 $p=2$, 此时删边梯子图 IL_n^{-i} 有两条垂直匹配边且分别位于两边, 匹配方式如图 5 所示。

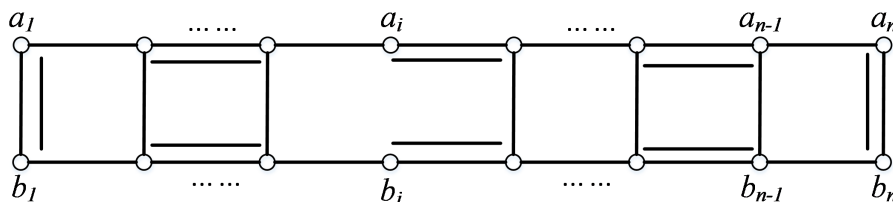


Figure 5. $p=2$ in IL_n^{-i}

图 5. IL_n^{-i} 中 $p=2$

所以由引理 1 知

$$af(IL_n^{-i}, M) = q = \frac{n-2}{2}$$

综上, 定理得证。

在 IL_n^{-i} 中, 我们把位于 $a_i b_i$ 左边的垂直匹配边的总数记为 p_1 , 位于 $a_i b_i$ 右边的垂直匹配边的总数记为 p_2 , 显然有 $p = p_1 + p_2 \equiv n$ 。

定理 2 若 M 是删边梯子图 IL_n^{-i} 的一个包含 p 条垂直匹配边的完美匹配, 则

$$af(IL_n^{-i}, M) = \begin{cases} \frac{n+p-2}{2}, & p_1 = 0, \text{且 } a_{i-1}a_i \in M \text{ 或 } p_2 = 0 \text{ 且 } a_i a_{i+1} \in M, \\ \frac{n+p-4}{2}, & \text{其它.} \end{cases}$$

证明 当 IL_n^{-i} 无垂直匹配边则 $p_1 = p_2 = 0$; 当 $a_i b_i$ 只有一侧存在垂直匹配边则 $p_1 = 0, p_2 \neq 0$ 或 $p_1 \neq 0, p_2 = 0$; 当 $a_i b_i$ 两侧都存在垂直匹配边则 $p_1 p_2 \geq 1$ 。下面分情况讨论:

情况 1 若 $p_1 = p_2 = 0$, 整个删边梯子图无垂直匹配边, 即 $p = 0$, 所以由定理 1 易知

$$af(IL_n^{-i}, M) = q - 1 = \frac{n-2}{2} = \frac{n+p-2}{2};$$

情况 2 ① 若 $p_1 = 0, p_2 \neq 0$, $a_i b_i$ 只有右侧存在垂直匹配边, 不妨设离 $a_i b_i$ 最近的右侧垂直匹配边为 $a_j b_j$, 由引理 4 可知整个删边梯子图可以从 $a_j b_j$ 处分解成两个片段, 第一片段为删边梯子图 IL_j^{-i} , 第二片段为梯子图 L_{n-j+1} , 此处 $p_2 = p$ 。定义 $M_1 = M \cap E(IL_j^{-i})$ 是 IL_j^{-i} 上的完美匹配; $M_2 = M \cap E(L_{n-j+1})$ 是 L_{n-j+1} 上的完美匹配, 由引理 2 和引理 4 易知

$$af(IL_j^{-i}, M_1) = \begin{cases} \frac{j-1}{2}, & i \text{ 为偶数} \\ \frac{j-3}{2}, & i \text{ 为奇数} \end{cases};$$

$$af(L_{n-j+1}, M_2) = \frac{n-j+1+p_2-2}{2}。$$

故

当 i 为偶数时, 即 $a_{i-1}a_i$ 为匹配边时

$$\begin{aligned} af(IL_n^{-i}, M) &= af(IL_j^{-i}, M_1) + af(L_{n-j+1}, M_2) \\ &= \frac{j-1}{2} + \frac{n-j+1+p_2-2}{2} \\ &= \frac{n+p-2}{2} \end{aligned}$$

当 i 为奇数时, 即 $a_i a_{i+1}$ 为匹配边时

$$\begin{aligned} af(IL_n^{-i}, M) &= af(IL_j^{-i}, M_1) + af(L_{n-j+1}, M_2) \\ &= \frac{j-3}{2} + \frac{n-j+1+p_2-2}{2} \\ &= \frac{n+p-4}{2} \end{aligned}。$$

② $p_1 \neq 0, p_2 = 0$ 时同理可得

$$af(IL_n^{-i}, M) = \begin{cases} \frac{n+p-2}{2}, & a_i a_{i+1} \text{ 为匹配边} \\ \frac{n+p-4}{2}, & a_{i-1} a_i \text{ 为匹配边} \end{cases}$$

情况 3 若 $p_1, p_2 \geq 1$, $a_i b_i$ 两侧都存在垂直匹配边不妨记离 $a_i b_i$ 最近的左右侧垂直匹配边分别为 $a_j b_j, a_k b_k$, 则梯子图 IL_n^{-i} 可分解成三段, 三个片段分别为 $L_j, IL_{k-j+1}^{-(i-j+1)}, L_{n-k+1}$; 不妨记 $M_1 = M \cap E(L_j), M_2 = M \cap E(IL_{k-j+1}^{-(i-j+1)}), M_3 = M \cap E(L_{n-k+1})$ 分别是三个片段上的完美匹配, p_1 和 p_2 分别是 L_j 和 L_{n-k+1} 上垂直匹配边的数目, 显然 $p_1 + p_2 = p$ 。由引理 2, 定理 1 和引理 4 可得

$$\begin{aligned} af(L_j, M_1) &= \frac{j+p_1-2}{2}; \\ af(IL_{k-j+1}^{-(i-j+1)}, M_2) &= \frac{k-j+1-2}{2}; \\ af(L_{n-k+1}, M_3) &= \frac{n-k+1+p_2-2}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} af(IL_n^{-i}, M) &= af(L_j, M_1) + af(IL_{k-j+1}^{-(i-j+1)}, M_2) + af(L_{n-k+1}, M_3) \\ &= \frac{j+p_1-2}{2} + \frac{k-j+1-2}{2} + \frac{n-k+1+p_2-2}{2} \\ &= \frac{n+p-4}{2} \end{aligned}$$

综上所述, 定理得证。

定理 3 IL_n^{-i} 的反强迫谱为

$$Spec_{af}(IL_n^{-i}) = \begin{cases} \left\{ \frac{n-3}{2} + f, \frac{n-1}{2} + f, \dots, \frac{n+p-4}{2} + f, \dots, \frac{2n-5}{2} + f \right\}, & n \geq 3 \text{ 且 } n \text{ 为奇数} \\ \left\{ \frac{n-2}{2}, \frac{n-2}{2} + f, \dots, \frac{n+p-4}{2} + f, \dots, \frac{2n-5}{2} + f \right\}, & n \geq 4 \text{ 且 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

其中将 IL_n^{-i} 按所有内部垂直匹配边分解为片段时, 若包含 a_i 的片段中仅含唯一的垂直匹配边 $a_j b_j$, 且 $i \neq j$ 时 $f = 1$, 否则 $f = 0$ 。

证明 按照 IL_n^{-i} 的完美匹配 M 中的垂直匹配边的条数 p 和 i, j 的同奇偶性分情况讨论:

情形 1 若 $p = 0$, 此时

$$af(IL_n^{-i}, M) = \frac{n-2}{2};$$

情形 2 若 $p = 1$, 此时包含 a_i 的片段中仅含唯一的垂直匹配边 $a_j b_j$, 根据定理 1 情况 2 可知当 $i \neq j$ 时,

$$af(IL_n^{-i}, M) = \frac{n+p-2}{2} = \frac{n-1}{2};$$

当 $i \equiv j$ 时,

$$af(IL_n^{-i}, M) = \frac{n+p-4}{2} = \frac{n-3}{2}。$$

此时

$$af(IL_n^{-i}, M) = \frac{n+p-4}{2} + f = \frac{n-3}{2} + f$$

情形 3 若 $p \geq 2$, 这时包含 a_i 的片段可能包含一条或两条垂直匹配边。

情形 3.1 当包含 a_i 的片段中仅含唯一的垂直匹配边 $a_j b_j$ 。若 $i \neq j$,

$$af(IL_n^{-i}, M) = \frac{n+p-2}{2} = \frac{n+p-4}{2} + 1 = \frac{n+p-4}{2} + f；$$

否则 $af(IL_n^{-i}, M) = \frac{n+p-4}{2} = \frac{n+p-4}{2} + 0 = \frac{n+p-4}{2} + f；$

情形 3.2 当包含 a_i 的片段包含两条垂直匹配边时,

$$af(IL_n^{-i}, M) = \frac{n+p-4}{2} = \frac{n+p-4}{2} + f。$$

综上, 结论成立。

根据以上结论, 我们可以得出 IL_n^{-i} 的反强迫多项式, 特别当 $n \equiv i \equiv 1$ 时有

推论 1 设 n, i 都为奇数, 则有

$$Af(IL_n^{-i}, x) = \sum_{p=1}^{n-2} |M_p| x^{\frac{n+p-4}{2}}。$$

其它情况下其形式过于复杂, 在此不作赘述, 仅给出几个具体例子:

$$Af(IL_8^{-3}, x) = 7x^3 + 9x^4 + 2x^5,$$

$$Af(IL_7^{-4}, x) = 8x^3 + 4x^4,$$

$$Af(IL_{16}^{-6}, x) = 19x^7 + 141x^8 + 303x^9 + 275x^{10} + 120x^{11} + 25x^{12} + 2x^{13}。$$

推论 2

$$af(IL_n^{-i}) = \begin{cases} \frac{n-3}{2} + f, & n \geq 3 \text{ 且 } n \text{ 为奇数} \\ \frac{n-2}{2}, & n \geq 4 \text{ 且 } n \text{ 为偶数} \end{cases}。$$

推论 3 $Af(IL_n^{-i}) = n - 3 + f。$

定理 4 若 IL_n^{-i} 含 p 条垂直匹配边, 则其完美匹配个数为

$$|M_p| = \sum_{p_1=0}^p \binom{i-1+p_1}{2} \binom{n-i+p-p_1}{p-p_1}。$$

证明 设 a_i 左边和右边分别有 p_1, p_2 条垂直匹配边, $p_1 + p_2 = p。$

情形 1 当 i 为偶数时,

① $a_{i-1} a_i \in M$, p_1 必为偶数, 则 IL_n^{-i} 可以从 $a_{i-2} a_{i-1}$ 和 $a_i a_{i+1}$ 处分解开, 由引理 8 知

$$|M|_p = \sum_{\substack{p_1=0 \\ p_1=i}}^p \binom{i-2+p_1}{2} \binom{n-i+p_2}{2};$$

② $a_{i-1}a_i \notin M$, p_1 必为奇数, 同理

$$|M|_p = \sum_{\substack{p_1=1 \\ p_1 \neq i}}^p \binom{i-2+p_1}{2} \binom{n-i+p_2}{2};$$

情形 2 当 i 为奇数时,

① $a_{i-1}a_i \in M$, p_1 必为奇数,

$$|M|_p = \sum_{\substack{p_1=1 \\ p_1=i}}^p \binom{i-1+p_1}{2} \binom{n-i-1+p_2}{2}$$

② $a_{i-1}a_i \notin M$, p_1 必为偶数,

$$|M|_p = \sum_{\substack{p_1=0 \\ p_1 \neq i}}^p \binom{i-1+p_1}{2} \binom{n-i-1+p_2}{2}$$

综上所述,

$$\begin{aligned} |M_p| &= \sum_{\substack{p_1=0 \\ p_1=i}}^p \binom{i-2+p_1}{2} \binom{n-i+p-p_1}{p-p_1} + \sum_{\substack{p_1=0 \\ p_1 \neq i}}^p \binom{i-1+p_1}{2} \binom{n-i-1+p-p_1}{p-p_1} \\ &= \sum_{p_1=0}^p \binom{i-1+p_1}{2} \binom{n-i+p-p_1}{p-p_1} \end{aligned}$$

定理得证。

我们用在梯子图的所有完美匹配中减去含 $a_i b_i$ 的完美匹配的方法就可以得到以下推论。

推论 4 IL_n^{-i} 含 p 条竖直匹配边完美匹配个数

$$|M_p| = \binom{n+p}{2} - \sum_{p_1=0}^z \binom{i-1+p_1}{2} \binom{n-i+p_2}{2},$$

其中 $z = \min\{p-1, i-1\}, p_1 + p_2 = p-1, n \equiv p, p_1 \equiv i-1$ 。

推论 5 删边梯子图 IL_n^{-i} 完美匹配数

$$|M| = F_{n+1} - F_i F_{n-i+1} = \sum_{p=0}^{n-2} |M_p|。$$

由此可知, 对于给定的 i , IL_n^{-i} 的完美匹配数是一个具有特定初值的斐波那契数列。特别地, 当 $i = 2, 3$ 时分别为斐波那契数列和卢卡斯数列。

4. “L”型梯子图 LL_n^{-i} 的反强迫数

设 LL_n^{-i} 是收缩 IL_n^{-i} 的 $a_{i-1}a_i$ 和 $a_i a_{i+1}$ 两条边得到的“L”型梯子图。任取 IL_n^{-i} 的完美匹配 M^i , 必有 $a_{i-1}a_i, a_i a_{i+1}$ 之一(记为 e)属于 M^i , 则 $M = M^i - e$ 是 LL_n^{-i} 的完美匹配, 反之亦然。因而 IL_n^{-i} 中的 M^i -交错圈

和 LL_n^{-i} 中的 M -交错圈一一对应。进一步我们有

定理 5 $af(LL_n^{-i}, M) = af(IL_n^{-i}, M^i)$ 。

证明 不妨设 $e = a_{i-1}a_i \in M^i$ ($M = M^i - e$), 任取 M^i 的最小反强迫集 S_a 。若 $a_i a_{i+1} \notin S_a$, 则令 $S'_a = S_a$, 否则令 $S'_a = S_a - a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}$, 由引理 3 可知 S'_a 就是 M 的一个反强迫集。因此

$$af(IL_n^{-i}, M^i) \geq af(LL_n^{-i}, M)。$$

反之, 不妨设 $b_{i-1}b_i \in M$, 记 $e = a_{i-1}a_i$, 则必有 $M^i = M + e$ 是 LL_n^{-i} 的一个完美匹配且 $e \in M^i$, 因此 S'_a 也是 M^i 的一个反强迫集。因此

$$af(IL_n^{-i}, M^i) \leq af(LL_n^{-i}, M)。$$

综上, 结论成立。

类似地, 我们可证明

推论 6 $f(LL_n^{-i}, M) = f(IL_n^{-i}, M^i)$ 。

推论 7 设 LL_n^{-i} 是一个“L”型梯子图, M 是 LL_n^{-i} 的一个有 p 条垂直匹配边的完美匹配, a_i, b_i 左、右侧的垂直匹配边数分别记为 p_1, p_2 , 我们有

$$af(LL_n^{-i}, M) = \begin{cases} \frac{n+p-2}{2}, & p_1 = 0 \text{ 且 } b_{i-1}b_i \in M \text{ 或 } p_2 = 0 \text{ 且 } b_i b_{i+1} \in M, \\ \frac{n+p-4}{2}, & \text{其它.} \end{cases}$$

基金项目

国家自然科学基金(11401475)。

参考文献

- [1] Li, X. (1997) Hexagonal Systems with Forcing Single Edges. *Discrete Applied Mathematics*, **72**, 295-301. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(95\)00116-9](https://doi.org/10.1016/0166-218X(95)00116-9)
- [2] Vukičević, D. and Trinajstić, N. (2007) On the Anti-Forcing Number of Benzenoids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **42**, 575-583. <https://doi.org/10.1007/s10910-006-9133-6>
- [3] Lei, H., Yeh, Y. and Zhang, H. (2016) Anti-Forcing Numbers of Perfect Matchings of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **202**, 95-105. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.08.024>
- [4] Vukičević, D. and Trinajstić, N. (2008) On the Anti-Kekule Number and Anti-Forcing Number of Cata-Condensed Benzenoids. *Mathematics in Chemistry*, **43**, 719-726. <https://doi.org/10.1007/s10910-006-9223-5>
- [5] Deng, H. (2008) The Anti-Forcing Number of Double Hexagonal Chains. *MATCH—Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **60**, 183-192.
- [6] Zhang, Q., Bian, H. and Vumar, E. (2011) On the Anti-Kekule Number and Anti-Forcing Number of Cata Condensed Phenylenes. *MATCH—Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **65**, 799-806.
- [7] 蒋晓艳, 程晓胜. 硼氮富勒烯图的反强迫数[J]. 湖南师范学院学报: 自然科学版, 2013, 33(3): 28-30.
- [8] Hwang, H.-K., Lei, H., Yeh, Y.-N. and Zhang, H. (2015) Distribution of Forcing and Anti-Forcing Numbers of Random Perfect Matchings on Hexagonal Chains and Crowns. <http://140.109.74.92/hk/?p=873>
- [9] Deng, K. and Zhang, H. (2017) Anti-Forcing Spectrum of Any Cata-Condensed Hexagonal System Is Continuous. *Frontiers of Mathematics in China*, **12**, 325-337. <https://doi.org/10.1007/s11464-016-0605-0>
- [10] 姚海元, 王杰彬, 王旭. 循环梯状图的完美匹配的反强迫谱与卢卡斯数[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2018, 54(2): 21-25.
- [11] Zhao, S. and Zhang, H. (2019) Forcing and Anti-Forcing Polynomials of Perfect Matchings for Some Rectangle Grids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **57**, 202-225. <https://doi.org/10.1007/s10910-018-0944-z>