

European Option Pricing and Hedging Strategy Based on the Finite Moment Log-Stable Process

Congyin Fan¹, Jiayi Che²

¹School of Finance, Guizhou University of Commerce, Guiyang Guizhou

²School of Management, Guizhou University of Commerce, Guiyang Guizhou

Email: fcy8843@163.com, chejiayi1993@outlook.com

Received: August 6th, 2019; accepted: August 21st, 2019; published: August 28th, 2019

Abstract

The empirical test suggests that the log-return series of stock price in US market reject the normal distribution and admit instead a subclass of the asymmetric distribution. Therefore, the European option pricing and variance optimal hedging strategy are investigated based on the finite moment log-stable process (FMLS) in this paper. Firstly, the pricing formula of European option is derived by using the principle of convolution pricing, and we design a mathematical experiment to test this formula. Secondly, according to the principle of option hedging, the variance optimal hedging of the European option obtained under the FMLS frame by solving a nonlinear optimization problem. Finally, the numerical results are simulated and we compare the results between the FMLS and Black-Scholes (BS) models to observe the ability of capture risk of FMLS model.

Keywords

Finite Moment Log-Stable Process, Option Pricing, Variance Optimal Hedging, Implied Volatility

基于FMLS模型的欧式期权定价与对冲策略

范聪银¹, 车嘉懿²

¹贵州商学院财政金融学院, 贵州 贵阳

²贵州商学院管理学院, 贵州 贵阳

Email: fcy8843@163.com, chejiayi1993@outlook.com

收稿日期: 2019年8月6日; 录用日期: 2019年8月21日; 发布日期: 2019年8月28日

摘要

实证研究表明美国市场上股票的对数收益并不服从正态分布而是服从非对称的分布。为此, 我们基于有

限矩对数稳态过程(FMLS)来研究欧式期权的定价与方差最优对冲策略。首先, 利用卷积定价原理推导FMLS框架下欧式期权的定价公式, 并设计相应的数学实验对该公式进行检验; 其次, 根据期权对冲的基本原理, 本文通过求解一个非线性优化问题得到FMLS框架下欧式期权的方差最优对冲策略; 最后, 为了能够直观地看到FMLS模型对风险的捕捉能力, 本文还进行了相应的数值模拟并同Black-Scholes (BS)模型下的结果进行比较。

关键词

有限矩对数稳态过程, 期权定价, 方差最优对冲, 隐含波动率

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在当下的金融市场中, 期权是一种非常重要的金融衍生品, 而且期权的定价也一直都是一个非常热门的话题。1973年 Black、Scholes 以及 Merton [1]共同提出用几何布朗运动来驱动股票的演变过程并推导出了欧式期权的定价公式, 即著名的 BS 公式。由于 BS 公式极为简便, 为此 BS 模型在金融界和业界都引起了高度的重视, 可以说 BS 模型的提出是金融数学和金融工程界的一次革命。但是, 实证研究表明 BS 模型并非是完美无瑕的, 首先, 由 BS 模型所得到期权理论价格同市场的真实价格存在误差并且该误差不是白噪音; 其次, BS 模型不能解释期权“隐含波动率微笑”的现象; 另外, 在 BS 框架下股票的对数收益被假设服从正态分布, 这同实际往往存在较大的差异。所以, 为了能够让理论更加反应真实的情况, 理论研究者用不同的模型来重新对期权的定价进行研究, 比如 t 分布模型[2]、GEV 模型[3]、CGMY 模型[4]、Heston 模型[5]以及 FMLS 模型[6]等等。

在众多的修正模型中, FMLS 模型是常常被用来驱动股票的动态演变过程, 因为该模型能够同时反应期权的隐含波动率微笑以及股票对数收益的分布出现非正态的情况, 因此, 越来越多的学者在 FMLS 框架下对金融衍生产品进行了研究。在金融衍生品的定价模型中, 数学上为了刻画由 FMLS 模型中纯跳所引起的非局部性, 通常会用一个具有左分数阶导数的偏微分方程来驱动衍生产品价值的变化过程[7]。在此基础上, Zhang 等[8]研究了 FMLS 框架下的欧式看涨期权, 在这篇论文中, 作者建立了一个具有二阶数值格式并从理论上对该数值格式进行严格的误差分析和稳定分析。Chen [9]根据预测校正的思想结合有限元的数值方法对具有 FMLS 模型的美式看跌期权进行了研究; 由于分数阶导数和自由边界的存在使得整个数学模型的求解十分困难, 为此在进行求解该模型前, Chen 等[10]做了相应的坐标变换把自由边界问题变成一个固定边界问题。Wang 还利用线性互补的方法来求解 FMLS 框架下美式期权。Fan [11]在 FMLS 框架下研究具有有限到期日的股票抵押定价问题, 在这个框架下股票抵押定价的模型是一个具有分数阶的自由边界问题, 为了求解该问题, 作者引入了一个非线性项的惩罚项以消除自由边界。

为了进一步完备 FMLS 框架下期权的定价理论, 本文研究了该框架下的欧式期权定价问题。我们利用傅里叶变换方法得到欧式看涨期权定价公式并为该公式设计高效的数值算法; 另外在此基础上本文还求出了该框架下欧式看涨期权的方差最优对冲策略。为了凸显 FMLS 模型的优越之处, 在论文的最后一部分我们以经典的 BS 模型作为基础, 通过仿真模拟来观察在两个不同模型下欧式期权的价值、隐含波动率以及方差最优对冲策略的差异, 并结合相应的经济背景进行深入分析。

2. 欧式期权定价公式

在 FMLS 框架下, 股票价格可以被下面的随机过程所驱动[6]

$$S_T = S_t \exp[(r-D)\tau] \exp(-\nu\tau + \sigma L_t^{\alpha,-1}), \quad (1)$$

其中 r 和 D 分别表示无风险利率和股票的连续红利率, 为了方便探讨本文假设 $D=0$, σ 是一个非负实数, $\tau=T-t$, $L_t^{\alpha,-1}$ 是一个 α 稳态的随机变量, 并且 $L_t^{\alpha,-1} \sim L_\alpha(0, \tau^\alpha, -1)$, ν 是凸性调整且 $\nu = -\sigma^\alpha \sec(\alpha\pi/2)$ 。

根据(1)式, 结合文献 α 稳态的随机变量的性质[6]可以得到股票价格对数收益 $x_t = \ln(S_T/S_t)$ 的特征函数

$$\begin{aligned} \Phi_{FMLS}(\omega; t, T) &= \tilde{\mathbb{E}}_t \left[\exp(i\omega \ln(S_T/S_t)) \right] \\ &= \exp \left[i\omega(r-\nu)\tau - (i\omega\sigma)^\alpha \tau \sec \frac{\alpha\pi}{2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\tilde{\mathbb{E}}_t[\bullet]$ 为风险中性下的条件期望算子。

设 K 欧式期权的执行价格, Y_t 是如下的 FMLS 过程

$$Y_t = \nu\tau + \sigma L_t^{\alpha,-1}, \quad (3)$$

那么股票的驱动方程(1)式可以转化成下面的形式:

$$S_T = Ke^{X_T}, \quad (4)$$

其中, $X_T = X_t + r\tau + Y_t$, $X_t = \ln(S_t/K)$ 。

设 $C(t, X_t)$ 表示欧式看涨期权在时刻 t 的价值, 根据欧式期权的定价原理可知

$$\begin{aligned} C(t, X_t) &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t \left[(S_T - K)^+ \right] \\ &= K \tilde{\mathbb{E}}_t \left[(e^{X_T - r\tau} - e^{-r\tau})^+ \right] \\ &= K \int_{-\infty}^{\infty} (e^{y-r\tau} - e^{-r\tau})^+ f_{X_t}(y) dy, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $f_{X_t}(\bullet)$ 是给定时刻 t 的信息 X_t , 随机变量 X_T 的条件密度函数。由随机变量 X_T 的定义可知, 随机变量 X_T 的条件特征函数 $\Phi_X(\omega; t, T)$ 可以表示为

$$\Phi_X(\omega; t, T) = \tilde{\mathbb{E}}_t \left[\exp(i\omega X_T) \right] = \exp[i\omega(r\tau + X_t)] \tilde{\mathbb{E}}_t \left[\exp(i\omega Y_t) \right],$$

再由(2)式可得

$$\Phi_X(\omega; t, T) = \exp[i\omega(r\tau + X_t)] \exp \left[i\omega\nu\tau - (i\omega\sigma)^\alpha \tau \sec \frac{\alpha\pi}{2} \right]. \quad (6)$$

下面我们将以定理的形式给出 FMLS 框架下欧式看涨期权的定价公式。

定理 1 假设股票价格 S_t 在风险中性测度下满足(4)式, 那么以 K 为执行价格, T 为到期日的欧式看涨期权在 t 时刻的价格 $C(t, X_t)$ 可以表示为

$$C(t, X_t) = \frac{Ke^{-r\tau}}{\pi} \int_0^\infty \mathbf{R} \left\{ \frac{\Phi_X(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + \bar{\alpha})(i\omega + \bar{\alpha})} \right\} d\omega, \quad (7)$$

其中 $\tau = T - t$ 表示期权合约的剩余时间, $\mathbf{R}\{z\}$ 表示复数 z 的实部, $\bar{\alpha} > 0$ 。

证明 定义一个新函数

$$p(x) = e^{(1+\bar{\alpha})x} (e^{-x} - e^{-r\tau})^+,$$

其中 $\bar{\alpha}$ 是一个大于零的常数且 $x \in R$, 那么

$$\begin{aligned} (e^{x-r\tau} - e^{-r\tau})^+ &= e^{(1+\bar{\alpha})(\tau r-x)} e^{(1+\bar{\alpha})(x-r\tau)} (e^{x-r\tau} - e^{-r\tau})^+ \\ &= e^{(1+\bar{\alpha})(\tau r-x)} e^{(1+\bar{\alpha})(x-r\tau)} (e^{-(r\tau-x)} - e^{-r\tau})^+ \\ &= p(r\tau - x) e^{(1+\bar{\alpha})(y-r\tau)}, \end{aligned}$$

若令函数

$$h(x) = e^{(1+\bar{\alpha})x} f_{X_t}(x),$$

那么(5)式可以表示为

$$\begin{aligned} C(t, X_t) &= K \int_{-\infty}^{\infty} p(r\tau - y) e^{(1+\bar{\alpha})(y-r\tau)} f_{X_t}(y) dy \\ &= K e^{-r\tau(1+\bar{\alpha})} \int_{-\infty}^{\infty} p(r\tau - y) h(y) dy \\ &= K e^{-r\tau(1+\bar{\alpha})} (p * h)(r\tau), \end{aligned}$$

注意, 在 $\bar{\alpha} > 0$ 的情况下, 函数 $p(x) = e^{(1+\bar{\alpha})x} (e^{-x} - e^{-r\tau})^+$ 是绝对可积的, 那么根据卷积定理[12]有

$$\mathcal{F}(p * h) = \mathcal{F}(p) * \mathcal{F}(h)$$

其中 $\mathcal{F}(\bullet)$ 表示 Fourier 变换。于是在(8)式两边同时做 Fourier 变换, 经过简单积分计算可得

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left[\frac{C(t, X_t)}{K} e^{r\tau(1+\bar{\alpha})}\right](\omega) \\ &= \mathcal{F}(p)(\omega) \mathcal{F}(h)(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} p(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} h(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{(1+\bar{\alpha})x} (e^{-x} - e^{-r\tau})^+ dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{(1+\bar{\alpha})x} f_{X_t}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{r\tau} e^{i\omega x} e^{(1+\bar{\alpha})x} (e^{-x} - e^{-r\tau}) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{(1+\bar{\alpha})x} f_{X_t}(x) dx \\ &= \frac{e^{r\tau(1+\bar{\alpha})x} \Phi_X(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})}, \end{aligned}$$

上式中的倒数第二个等号应用了 Fourier 变换的位移性质。接下来在上式两边同时作 Fourier 逆变换

$$\begin{aligned} C(t, X_t) &= \frac{K e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_X(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})} d\omega \\ &= \frac{K e^{-r\tau}}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{\Phi_X(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})} d\omega + \int_{-\infty}^0 \frac{\Phi_X(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})} d\omega \right] \\ &= \frac{K e^{-r\tau}}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{\Phi_X(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})} d\omega - \int_{-\infty}^0 \frac{\Phi_X(-\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(-i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(-i\omega + i\bar{\alpha})} d\omega \right] \\ &= \frac{K e^{-r\tau}}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\Phi_X(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})} + \frac{\Phi_X(-\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(-i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(-i\omega + i\bar{\alpha})} \right] d\omega, \end{aligned}$$

另外, 因为 X_t 是映射到实空间的随机变量, 那么根据文献[13]可知函数 Φ_x 的实部关于 ω 是一个偶函数, 虚部关于 ω 是一个奇函数, 所以不难发现上式第二个等号右边中括号内是两个共轭复数。于是

$$\begin{aligned} C(t, X_t) &= \frac{Ke^{-rt}}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\Phi_x(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})} + \frac{\Phi_x(-\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(-i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(-i\omega + i\bar{\alpha})} \right] d\omega \\ &= \frac{Ke^{-rt}}{\pi} \int_0^\infty \mathbf{R} \left\{ \frac{\Phi_x(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})} \right\} d\omega. \end{aligned}$$

下面我们将确定定价公式(7)中的参数 $\bar{\alpha}$ 。根据文献[13]的结论可知, 在公式(7)中参数 $\bar{\alpha}$ 必须要让函数 $\Phi_x(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)$ 有意义或者不等式 $\tilde{E}_t[S_T^{1+\bar{\alpha}}] < \infty$ 成立, 因为在 FMLS 框架下的资产价格是存在任何阶矩的, 所以对于任意的 $\bar{\alpha}$, 不等式 $\tilde{E}_t[S_T^{1+\bar{\alpha}}] < \infty$ 都是成立的, 此时按照文献[13]的做法, 本文取 $\bar{\alpha} = 1.5$ 。

因为本文的理论推导是在假设市场是无套利的前提下的, 那么欧式期权的平价公式是成立的, 所以对于 FMLS 框架下欧式看跌期权的定价公式我们直接利用平价公式求得, 即

$$C(t, X_t) + Ke^{-rt} = P(t, X_t) + S_t.$$

因为 $S_t = K \exp(X_t)$, 所以欧式看跌期权在时刻 t 的价格为

$$P(t, X_t) = C(t, X_t) + Ke^{-rt} - K \exp(X_t). \quad (8)$$

因为在定价公式(7)中含有一个无穷积分, 所以无法在计算上实现, 这就需要对公式中的无穷积分做近似处理。首先, 假设 A 为截断积分的上限, $\hat{C}(t, X_t)$ 表示用截断后的公式所计算出来的值, 那么如果是截断误差不高于任意大于 0 的数 ε , 即

$$\begin{aligned} |C(t, X_t) - \hat{C}(t, X_t)| &\leq \frac{Ke^{-rt}}{\pi} \int_0^\infty \left| \mathbf{R} \left\{ \frac{\Phi_x(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})} \right\} \right| d\omega \\ &\leq \frac{Ke^{-rt}}{\pi} \int_A^\infty \frac{\tilde{E}_t[e^{(1+\bar{\alpha})Y_T}]}{\sqrt{(\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} - \omega) + (1 + 2\bar{\alpha}^2)\omega^2}} d\omega \\ &\leq \frac{Ke^{-rt} \tilde{E}_t[e^{(1+\bar{\alpha})Y_T}]}{\pi} \int_A^\infty \frac{1}{\omega^2} d\omega \\ &= \frac{Ke^{-rt} \tilde{E}_t[e^{(1+\bar{\alpha})Y_T}]}{A\pi} < \varepsilon, \end{aligned}$$

所以只要积分上限 A 满足

$$A > \frac{Ke^{-rt} \tilde{E}_t[e^{(1+\bar{\alpha})Y_T}]}{\varepsilon\pi},$$

那么欧式看涨期权定价公式(7)的截断误差就不会大于 ε , 那么这时 FMLS 框架下欧式看涨期权的定价公式可以用下面的式子进行近似计算

$$C(t, X_t) = \frac{Ke^{-rt}}{\pi} \int_0^A \mathbf{R} \left\{ \frac{\Phi_x(\omega - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega + 1 + i\bar{\alpha})(i\omega + i\bar{\alpha})} \right\} d\omega \quad (9)$$

其次, 我们用梯形公式对(9)进行计算。本文取 $A = M\eta$, 令 $\omega_j = (j-1)\eta$, 且 $j = 1, 2, \dots, M+1$, 那么(9)式又可以由下面的式子近似地表示

$$C(t, X_t) \approx \frac{Ke^{-rt}}{\pi} \sum_{j=1}^{M+1} \mathbf{R} \left\{ \frac{\Phi_X(\omega_j - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega_j + 1 + \bar{\alpha})(i\omega_j + \bar{\alpha})} \right\} \eta. \tag{10}$$

3. 方差最优对冲策略

根据[14]中的结论可知, 传统的 Delta 对冲策略对 FMLS 框架下的欧式期权不再实用, 所以在这部分本文将为 FMLS 框架的欧式期权设计一个实用的对冲策略。事实上, 对冲可以理解市场参与者通过买卖风险资产来构造资产组合以实现未定权益终值的一种逼近。逼近程度的优劣通常用均方对冲误差的大小来衡量, 即

$$M_0 = \tilde{E}_0 \left[\tilde{C}_0 + \sum_{j=1}^N \mathcal{D}_j \Delta \tilde{S}_j - \tilde{C}_T \right]^2, \tag{11}$$

其中 $\tilde{E}_j[\bullet] = \tilde{E}_{t_j}[\bullet]$, $\tilde{S}_j = \exp(-rt_j)S_{t_j}$, $\tilde{C}_j = \exp(-rt_j)C(t_j, X_{t_j})$, $\Delta \tilde{S}_j = \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}$, \mathcal{D}_j 表示在时刻 t_j 期权出售方所持有的风险资产份额, 它是一个自融资(self-finance)交易策略。事实上, 在(11)中 $\sum_{j=1}^N \mathcal{D}_j \Delta \tilde{S}_j$ 表示的是在整个期权合约中期权出售方的交易累积收益。在(11)式中方括号内的表达式正好是期权出售方在整个合约内的对冲资产组合, 其目的是寻找最优的对冲策略 \mathcal{D}^* 使得期权金 \tilde{C}_0 和交易的累积收益的总和尽可能的接近未定权益终值得贴现 \tilde{C}_T , 亦即使对冲资产组合在初始时刻的均方误差 M_0 达到最小。接下来, 我们就根据这一思想来求出方差最优对冲策略 \mathcal{D}^* 以及该策略的具体算法。

定理 2 在风险中性环境下, 如果股票价格 S_t 满足指数随机过程(4), 其中 X 是一个右连左极的且具有独立增量的随机过程, 那么以 S_t 为标的资产, K 为执行价格, T 为到期日且对冲交易时间为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_N = T$ 的欧式看涨期权 C 的方差最优对策为

$$\mathcal{D}^* = \frac{\tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T \tilde{S}_j]}{\tilde{E}_{j-1}[\Delta \tilde{S}_j]} \approx \frac{e^{-r(T-t_j)} v_j - \tilde{C}_{j-1} \tilde{S}_{j-1}}{K \Phi_X(-2i; t_{j-1}, t_j) - \tilde{S}_{j-1}^2}, \tag{12}$$

且当 $j = N$ 时,

$$v_N = K^2 \sum_{i=1}^M [\exp(2z_i + 2x_{N-1}) - \exp(z_i + x_{N-1}) f(z_i)] \Delta$$

其中 $f(\bullet)$ 是随机变量 $X \sim L_\alpha((r+\nu)(T-t_{N-1}), \sigma(T-t_{N-1})^\alpha, -1)$ 的概率密度函数。当 $0 < j < N$ 时

$$v_j = \frac{K^2}{\pi} \sum_{i=1}^N [\exp(y_i + x_j) C(y_i + x_j) f(y_i)] \Delta',$$

其中

$$C(t, X_t) \approx \sum_{j=1}^{M+1} \mathbf{R} \left\{ \frac{\Phi_X(\omega_j - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega_j + 1 + \bar{\alpha})(i\omega_j + \bar{\alpha})} \right\} \eta,$$

$f(\bullet)$ 是随机变量 $X \sim L_\alpha((r+\nu)(t_j - t_{j-1}), \sigma(t_j - t_{j-1})^\alpha, -1)$ 的概率密度函数。

证明 因为随机变量 X 具有稳定的独立增量, 且在风险中性概率测度下贴现过程 \tilde{S} 和 \tilde{C} 都是鞅, 所以由文献[14]中的结论可知, FMLS 框架下离散时间下欧式看涨期权的对冲均方误差在初始时刻的值可以表示为

$$M_0 = \tilde{E}_0[\tilde{C}_T^2] - \tilde{C}_0 + \tilde{E}_0\left[\sum_{j=1}^N \mathcal{D}_j^2 \tilde{E}_{j-1}[\Delta\tilde{S}_j^2] - 2\mathcal{D}_j \tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T^2 \Delta\tilde{S}_j^2]\right]^2,$$

显然若要使 M_0 值最小, 那么对冲策略应该为

$$\mathcal{D}^* = \frac{\tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T^2 \Delta\tilde{S}_j^2]}{\tilde{E}_{j-1}[\Delta\tilde{S}_j^2]}. \quad (13)$$

由于随机变量 X 的分布信息是已知的, 所以根据(6)式我们可以把(13)中的分母计算出来, 即

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{j-1}[\Delta\tilde{S}_j^2] &= \tilde{E}_{j-1}[\tilde{S}_j^2 - \tilde{S}_{j-1}^2] = \tilde{E}_{j-1}[\tilde{S}_j^2] - \tilde{S}_{j-1}^2 \\ &= K^2 \tilde{E}_{j-1}[\exp(X_j^2)] - \tilde{S}_{j-1}^2 \\ &= K^2 \Phi_X(-2i; t_{j-1}, t_j) - \tilde{S}_{j-1}^2. \end{aligned}$$

又因为 \tilde{S} 和 \tilde{C} 都是鞅, 所以(13)式子中的分子可以表示为

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T^2 \Delta\tilde{S}_j^2] &= \tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T(\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1})] \\ &= \tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T \tilde{S}_j] - \tilde{S}_{j-1} \tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T] \\ &= \tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T \tilde{S}_j] - \tilde{S}_{j-1} \tilde{C}_{j-1}, \end{aligned}$$

事实上, 在上式中只有 $\tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T \tilde{S}_j]$ 是未知的, 接下了我们的目标就是求出这个部分的价值。因为

$$\tilde{E}_{j-1}[\tilde{C}_T \tilde{S}_j] = \exp[-r(T+t_j)] \tilde{E}_{j-1}[C_T S_j],$$

本文记 $v_j = \tilde{E}_{j-1}[C_T S_j]$, 那么计算方差最优对冲策略的 \mathcal{D}^* 就转化为设计 v_j 的算法。接下来我们将从 $j = N$ 和 $0 < j < N$ 两个方面来给出 v_j 的计算方法。

1) 先讨论 $j = N$ 的时候, 亦即 $t_j = T$, 那么此时

$$\begin{aligned} v_N &= \tilde{E}_{N-1}[C_T S_T] = \tilde{E}_{N-1}[(S - K)^+ S_T] \\ &= K^2 \tilde{E}_{N-1}[(e^{X_T} - 1)^+ e^{X_T}] \\ &= K^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^y - 1)^+ e^y f_{X_{N-1}}(y) dy, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $f_{X_{N-1}}(y)$ 是给定 X_{N-1} 的条件下 X_N 的条件密度函数。因为在 FMLS 框架下, 股票价格是一个指数 Levy 过程并且 $X_t = \ln(S_t/K)$, 也就是说 X_t 关于标的资产价格 S_t 是单调递减的, 所以根据文献[15]的结论可知, 条件密度函数 $f_{X_{N-1}}(X_N)$ 满足下面的关系

$$f_{X_{N-1}}(X_N) = f(X_N - X_{N-1}), \quad (15)$$

其中随机变量 $X_N - X_{N-1} \sim L_\alpha((r+\nu)(T-t_{N-1}), \sigma(T-t_{N-1})^{1/\alpha}, -1)$ 。那么结合(14)和(15)式并且作变量替换 $z = y - x_{N-1}$ 可得

$$\begin{aligned} v_N &= K^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^y - 1)^+ e^y f_{X_{N-1}}(y) dy \\ &= K^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(z + x_{N-1}) - 1)^+ \exp(z + x_{N-1}) f(z) dz \\ &= K^2 \int_{-x_{N-1}}^{+\infty} [\exp(2z + 2x_{N-1}) - \exp(z + x_{N-1})] f(z) dz. \end{aligned}$$

因为 $f(z)$ 是 $X_N - X_{N-1}$ 随机变量的密度函数, 且根据文献[16]可知函数 $f(z)$ 要比指数函数高阶无穷小, 所以我们就可以对上式中的无穷积分进行截断, 即

$$\begin{aligned} v_N &\approx K^2 \int_{-x_{N-1}}^d [\exp(2z + 2x_{N-1}) - \exp(z + x_{N-1})] f(z) dz \\ &\approx K^2 \sum_{j=1}^M \left\{ [\exp(2z_j + 2x_{N-1}) - \exp(z_j + x_{N-1})] f(z_j) \right\} \Delta, \end{aligned} \tag{16}$$

(16)中的最后一步是利用梯形公式而得到的, 其中 $M\Delta - x_{N-1} = d$ 是截断无穷积分的上限, $z_j = (j-1)\Delta - x_{N-1}$ 。为了保证计算的精度, 在数值仿真中本文取 $M = 10^6, \Delta = 0.001$ 。

2) 接下来考虑 $0 < j < N$ 的情况。首先根据重期望公式

$$v_j = \tilde{E}_{j-1} [S_j C_T] = \tilde{E}_{j-1} [\tilde{E}_j [S_j C_T]] = \tilde{E}_{j-1} [S_j \tilde{E}_j [C_T]], \tag{17}$$

在(17)中 $\tilde{E}_j [C_T]$ 可以直接根据欧式期权看涨公式(10)式得到, 即

$$C(t, X_t) \approx \frac{K}{\pi} \sum_{j=1}^{M+1} \mathbf{R} \left\{ \frac{\Phi_X(\omega_j - i - i\bar{\alpha}; t, T)}{(i\omega_j + 1 + \bar{\alpha})(i\omega_j + \bar{\alpha})} \right\} \eta,$$

其中

$$\begin{aligned} &\Phi_X(\omega; t_j, T) \\ &= \exp[i\omega(r\tau + X_j)] \exp\left[i\omega v\tau - (i\omega\sigma)^\alpha \tau \sec \frac{\alpha\pi}{2}\right] \\ &= \left[\cos(\omega r(\tau + X_j)) + i \sin(\omega r(\tau + X_j))\right] \exp\left[i\omega v\tau - (i\omega\sigma)^\alpha \tau \sec \frac{\alpha\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

很显然 $\tilde{E}_j [C_T]$ 是随机变量 X_j 的函数, 为方便叙述, 本文记 $C(X_j) = \tilde{E}_j [C_T]$, 所以

$$\begin{aligned} v_j &= K \tilde{E}_{j-1} [\exp(X_j) C(X_j)] \\ &= K \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x) C(x) f_{X_j}(x) dx \\ &= K \int_{-\infty}^{\infty} \exp(y + x_j) C(y + x_j) f(y) dy \\ &\approx K \sum_{i=1}^N [\exp(y_i + x_j) C(y_i + x_j) f(y_i)] \Delta', \end{aligned}$$

其中 a 和 b 是截断无穷积分的下限和上限, 且 $\Delta' = \frac{b-a}{N-1}, y_i = (i-1)\Delta' + a$ 。至此本文就完成了对定理 2 的证明。另外, 为了保证计算的精度, 在数值模拟中本文取 $N = 2 \times 10^6, \Delta' = 0.001$, 以及 $b = -a$ 。

4. 数值分析

为了使本文的研究具有说服力, 我们将在这个部分进行仿真实验。因为 FMLS 框架期权的定价公式以及方差最优对冲策略都会涉及到定理 1 当中的定价公式(7)的近似算法(10)式子, 所以再进行仿真模拟前先要对定价公式进行误差检验。因为当 $\alpha = 2$ 时 FMLS 模型会退化成为 BS 模型, 所以在检验部分我们分两步来进行, 第一步先检验 $\alpha = 2$ 的情况, 第二步检验 $\alpha \in (1, 2)$ 的情况。

对于 $\alpha = 2$ 的情况, 固定一组参数: $r = 0.05, \sigma = 0.2, \eta = 0.0026, T = 1, M = 2^{20}$, 把这组数据代入式子(10)当中算出一组值, 记为 $C_{FMLS}(\alpha = 2)$, 然后用经典的 BS 公式计算出一组值, 记为 C_{BS} 。在此本文要

强调的是, 当 FMLS 模型中的尾部指数 $\alpha = 2$ 时, $L_t^{\alpha-1} = \sqrt{2}W_t$, 所以在计算 C_{BS} 时, 要把经典 BS 公式中的波动率换成 $\sqrt{2}\sigma$, 即

$$C_{BS} = SN(d_1) - e^{-rT} KN(d_2),$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + 0.5\hat{\sigma}^2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{2}\sigma.$$

图 1(a)中所呈现的是 $C_{FMLS}(\alpha = 2)$ 和 C_{BS} 这两组值关于标的资产的曲线, 图 1(b)中是这两组值的绝对误差曲线, 其定义如下

$$error = |C_{FMLS} - C_{BS}|,$$

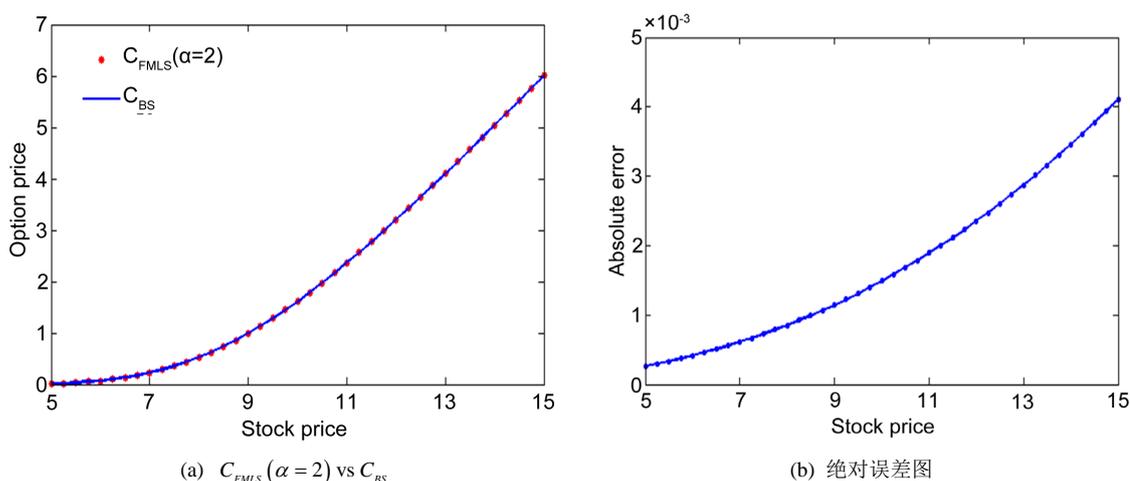


Figure 1. The strike price $K = 10$

图 1. 敲定价格 $K = 10$

从图 1(a)和图 1(b)中的曲线不难发现, 在相同参数下由 BS 和 FMLS 模型得到的欧式期权价值的最大误差不超过 0.0042, 那么由此可判断本文所推到的 FMLS 框架下的欧式期权的定价公式在 $\alpha = 2$ 的情况下是有效的。

由于当 $\alpha \in (1, 2)$ 时 FMLS 框架下的欧式期权的定价公式没有解析表达式, 所以本文用蒙特卡洛 (Monte Carlo) 方法来对公式 (4.11) 进行检验。不失一般性, 我们取 $\alpha = 1.52$, 其他参数 $r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 1, K = 15$, 在用 Monte Carlo 方法计算期权的价格时, 本文采用 20000 条模拟路径。在图 2(a)中红色实线表示由定价公式(10)计算出来的期权的价格, 蓝色点则表示由 Monte Carlo 计算出来的期权的价格; 图 2(b)中的点则是这两组值得误差(Monte Carlo 方法得到的值减去由(10)所得到的值)。由图 2(a)和图 2(b)中的曲线可知本文所对到的 FMLS 框架下的欧式期权的定价公式在 $\alpha \in (1, 2)$ 的情况下也是有效的。

5. 参数影响分析

在对定价公式进行检验后, 接下了本文将结合仿真结果来分析 FMLS 模型中的参数对期权价值的影响。为了观察尾部指数 α 对期权价格的影响, 本文在图 3 中呈现了不同 α 取值下的期权价值关于标的资产价格的曲线。根据图中的曲线可知欧式期权的价格关于 α 是单调递减的, 因为从 FMLS 模型本身来看,

如果 α 的值越小那么风险资产价格发生跳跃的可能性就会越大, 对于持有看涨期权的市场参与者来说就有可能获得更大的收益, 所以相应的期权的价值就会更大。

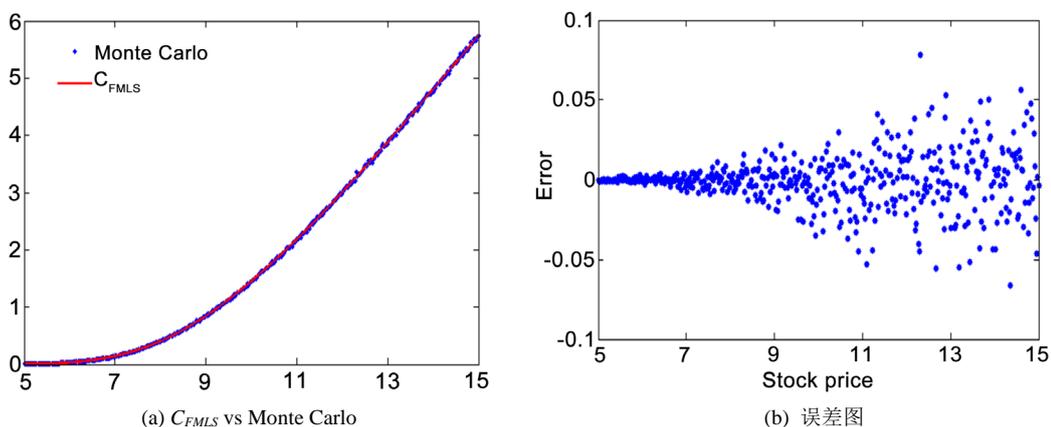


Figure 2. The strike price $K = 10$
图 2. 敲定价格 $K = 10$

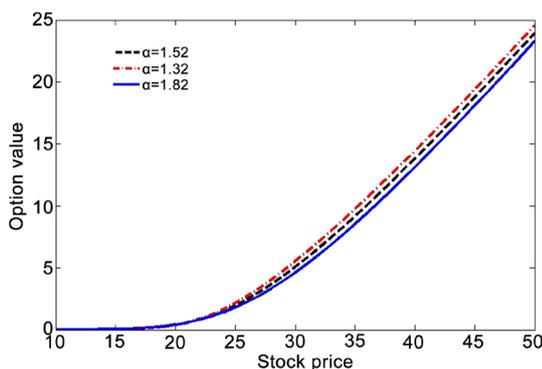


Figure 3. European call value, with $r = 0.05, T = 1, \sigma = 0.20, K = 30$
图 3. 欧式看涨期权价值, 模型参数 $r = 0.05, T = 1, \sigma = 0.20, K = 30$

图 4 中, 本文呈现了欧式看涨期权价值在不同参数 σ 下的曲线。由(1)式可知, σ 决定了股票对数收益分布的离散程度, 亦即 σ 的值越大分布就越扩散, 那么这就会是期权的价值变大, 所以理论上欧式看涨期权价值关于参数 σ 是单调递增的, 而图 4 中的曲线也正好反应这个事实。

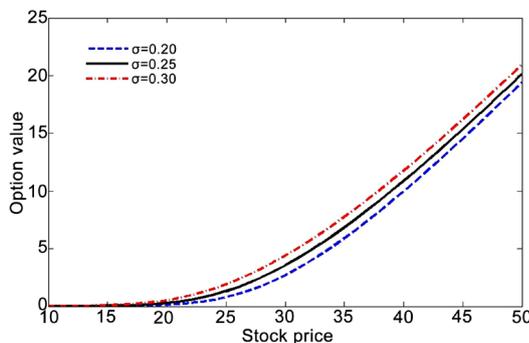


Figure 4. European call value, with $r = 0.05, T = 1, \alpha = 1.52, K = 35$
图 4. 欧式看涨期权价值, 模型参数 $r = 0.05, T = 1, \alpha = 1.52, K = 35$

另外为了能够说明 FMLS 模型能够捕捉欧式期权的隐含波动率, 本文从(10)提取出了欧式期权的隐含波动率曲线, 如图 5(a)和图 5(b)所示。由图中的曲线可知, 在不同的参数团下期权的隐含波动率曲线都成“微笑”形状, 这说明了 FMLS 模型能够捕捉欧式期权隐含波动率不是一个常数的现象。

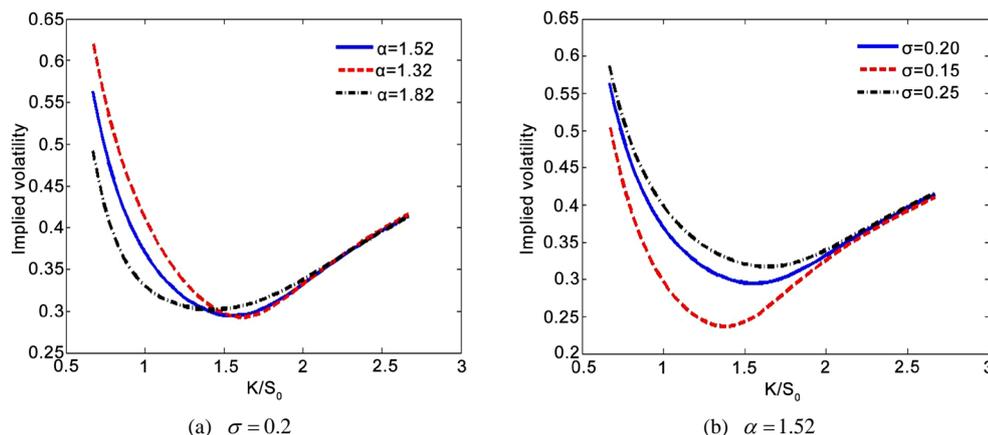


Figure 5. The implied volatility of European call with $r = 0.05, T = 1, K = 30$

图 5. 欧式看涨期权的隐含波动率, 模型参数 $r = 0.05, T = 1, K = 30$

接下来本文将考虑 FMLS 模型中的两个重要参数 α 和 σ 对方差最优对冲策略的影响, 另外为了作对比我们以 BS 模型下的 Delta 对冲策略作为参照, 在此需要说明的是著名学者 Tonkov [17]已经证明了在 BS 框架下方差最优对冲策略和 Delta 对冲策略是等价的。

图 6 中所呈现的是 BS 框架下的 Delta 对冲策略(BS Delta-Hedging)和 FMLS 框架下的方差最优对冲策略(FMLS VO-Hedging)曲线, 图中的横坐标是期权的价值状态。当期权的价值状态处于价内和平价时, FMLS 模型的方差最优对冲策略会高于 BS 模型的 Delta 对冲曲线; 而在价外时会出现相反的情况。由 FMLS 和 BS 模型金融含义可知, 投资者在 FMLS 框架下对股票价格相对较低时会做出较为敏感的反应, 即投资者会大量抛售期权, 相应的期权出售方也会做出较为相应的调整, 所以在这种情况下 FMLS 框架下的方差最优对冲策略会高于 BS 框架下 Delta 对冲; 而当股票价格相对较高时投资者在两种框架下的反应恰恰相反, 所以当期权处于价外状态时则会出现相反的情况。

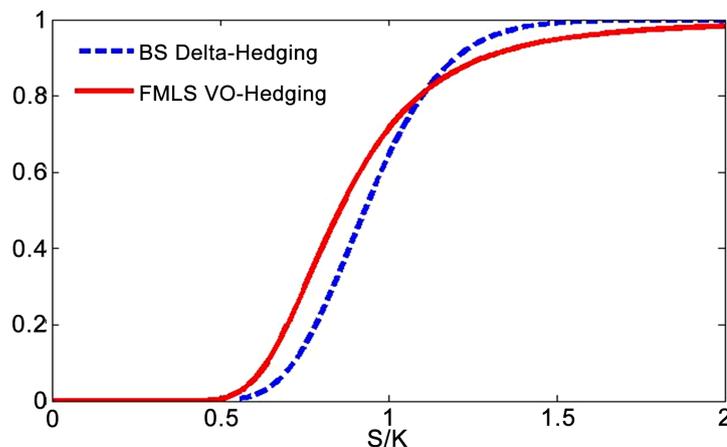


Figure 6. Hedging curve with $r = 0.05, T = 1, K = 30, \sigma = 0.2, \alpha = 1.52$

图 6. 对冲曲线, 模型参数 $r = 0.05, T = 1, K = 30, \sigma = 0.2, \alpha = 1.52$

在图 7(a)和图 7(b)本文分别绘制了不同 α 和 σ 的取值下方差对冲取的变换趋势。因为 α 是控制了 FMLS 随机变量后尾分布和跳跃情况, 且当 α 的值越小厚尾和跳跃现象就越明显, 此时期权出售方就会做出较为敏感的调整, 如图 7(a)所示。另外由于 σ 控制了 FMLS 模型的尺度参数, 即当 σ 越大时 FMLS 随机变量的分布就越分散, 其作用就类似于 BS 模型当中的波动率, 所以当期权的价值状态处于价内和平价是时方差最优对冲策略关于 σ 是单调递减的, 当期权的价值状态处于价外时方差最优对冲策略关于 σ 是单调递增的。

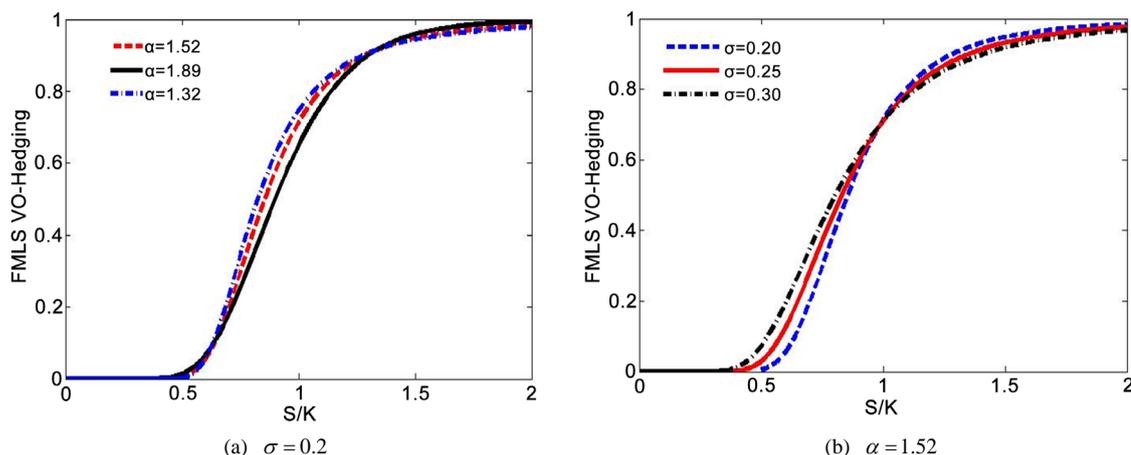


Figure 7. Variance optimal hedging curve of FMLS model with $r = 0.05, T = 1, K = 30$

图 7. FMLS 模型的方差最优对冲曲线, 模型参数 $r = 0.05, T = 1, K = 30$

6. 结论

本文在 FMLS 框架下研究了欧式期权的定价与方差最优对冲策略。我们利用傅里叶变化的方法得到了欧式看涨期权的定价公式, 并设计相应的数值实验对公式进行检验。在此基础上, 本文还根据方差最优对冲的原理通过求解一个非线性归划问题得到该框架下欧式看涨期权的方差最优对冲策略。在文章的第五部分, 本文以 BS 模型为基准分析 FMLS 模型中的重要参数对欧式期权价格和方差最优对冲策略的影响, 并根据模型的经济背景解释其经济含义。

基金项目

本文由贵州省科技厅科技计划项目(项目编号: 黔科合同基础(2019)1175 号)以及贵州省贵阳市白云区科技计划项目(项目编号: 白科合同(2017)37 号)资助。

参考文献

- [1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [2] Cassidy, D.T., Hamp, M.J. and Ouyed, R. (2010) Pricing European Options with a Log Student's T-Distribution: A Gosset Formula. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **389**, 5736-5748. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.08.037>
- [3] Markose, S. and Alentorn, A. (2011) The Generalized Extreme Value Distribution, Implied Tail Index, and Option Pricing. *The Journal of Derivatives*, **18**, 35-60. <https://doi.org/10.3905/jod.2011.18.3.035>
- [4] Carr, P., German, H., Madan, D. and Yor, M. (2002) The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation. *Journal of Business*, **75**, 305-320. <https://doi.org/10.1086/338705>
- [5] Heston, S.L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and

- Currency Options. *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343. <https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327>
- [6] Carr, P. and Wu, L. (2003) The Finite Moment Log Stable Process and Option Pricing. *The Journal of Finance*, **58**, 753-778. <https://doi.org/10.1111/1540-6261.00544>
- [7] Cartea, A. (2005) Dynamic Hedging of Financial Instruments When the Underlying Follows a Non-Gaussian Process. Working Paper. <https://doi.org/10.2139/ssrn.934812>
- [8] Zhang, H., Liu, F. and Turner, I. (2016) The Numerical Simulation of the Tempered Fractional Black-Scholes Equation for European Double Barrier Option. *Applied Mathematical Modelling*, **40**, 5819-5834. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.027>
- [9] Chen, W.T., Xu, X. and Zhu, S.P. (2015) A Predictor-Corrector Approach for Pricing American Options under the Finite Moment Log-Stable Model. *Applied Numerical Mathematics*, **97**, 15-29. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2015.06.004>
- [10] Chen, W. and Wang, S. (2005) A Finite Difference Method for Pricing European and American Options under a Geometric Levy Process. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **11**, 241-264. <https://doi.org/10.3934/jimo.2015.11.241>
- [11] Fan, C.Y., Xiang, K.L. and Chen, S.Z. (2018) Stock Loan Valuation Based on the Finite Moment Log-Stable Process. *Computers and Mathematics with Applications*, **75**, 374-387. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.09.015>
- [12] Katznelson, Y. (2004) An Introduction to Harmonic Analysis. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139165372>
- [13] Carr, P. and Madan, D. (1999) Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, **2**, 61-73. <https://doi.org/10.21314/JCF.1999.043>
- [14] Tankov, P. (2011) Pricing and Hedging in Exponential Levy Models: Review of Recent Results. In: Cousin, A., et al., Eds., *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010*, Springer, Berlin Heidelberg, 319-359. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14660-2_5
- [15] Lord, R., Fang, F. and Bervoets, F. (2008) A Fast and Accurate FFT-Based Method for Pricing Early-Exercise Options under Lévy Processes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **30**, 1678-1705. <https://doi.org/10.1137/070683878>
- [16] Nolan, J.P. (1997) Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, **13**, 759-774. <https://doi.org/10.1080/15326349708807450>
- [17] Liang, C.X. and Li, S.H. (2015) Option Pricing and Hedging in Incomplete Market Driven by Normal Tempered Stable Process with Stochastic Volatility. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **423**, 701-719. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.10.033>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网首页: <http://cnki.net/>, 点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”, 跳转至: <http://scholar.cnki.net/new>, 搜索框内直接输入文章标题, 即可查询; 或点击“高级检索”, 下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询。
2. 通过知网首页 <http://cnki.net/>顶部“旧版入口”进入知网旧版: <http://www.cnki.net/old/>, 左侧选择“国际文献总库”进入, 搜索框直接输入文章标题, 即可查询。

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org