**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2019, 8(10), 1650-1654
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.810194

Hans汉斯

# The Generalization of Stolz Theorem and Its Application

**Liying Wang, Dan Liu, Kai Mao**

Naval Aviation University, Yantai Shandong
Email: ytliyingwang@163.com

Received: Oct. 3rd, 2019; accepted: Oct. 22nd, 2019; published: Oct. 29th, 2019

## Abstract

**For solving sequence limit problem with indeterminate form, Stolz Theorem is a valid tool. In this paper, the conditions of Stolz Theorem were weakened, and a general Theorem form was given, discussing the application of the generalization of Stolz Theorem by some examples.**

## Keywords

**Stolz Theorem, Sequence with Indeterminate Form, Limit**

# Stolz定理的推广及其应用

**王丽英，刘　丹，毛　凯**

海军航空大学，山东　烟台
Email: ytliyingwang@163.com

收稿日期：2019年10月3日；录用日期：2019年10月22日；发布日期：2019年10月29日

## 摘　要

**Stolz定理是求解未定式型数列极限的一个有效工具。本文弱化了Stolz定理成立的条件，给出了更一般形式的Stolz定理及其严格的证明过程。通过一道大学生数学竞赛题目阐述推广后的Stolz定理在求解数列极限中的灵活应用。**

## 关键词

**Stolz定理，未定式型数列，极限**

文章引用: 王丽英, 刘丹, 毛凯. Stolz 定理的推广及其应用[J]. 应用数学进展, 2019, 8(10): 1650-1654.
DOI: 10.12677/aam.2019.810194

## 1. 引言

Stolz 定理是求解未定式型数列极限的一个非常有效的工具，常被称为数列极限的“L’Hospital 法则”，在研究生入学考试和大学生数学竞赛中得到了广泛应用。目前，有很多学者对其推广形式进行了研究，如文献[1] [2]。本文对 Stolz 定理进行了分析，弱化了其成立的条件，给出了更一般形式的 Stolz 定理。不同于已有文献，给出了其严格的证明过程。最后，通过一道大学生数学竞赛题目具体说明了推广的 Stolz 定理的应用。

## 2. Stolz 定理

文献[3]中给出的两种形式的 Stolz 定理是处理 $\frac{*}{\infty}$ 型和 $\frac{0}{0}$ 型数列极限的有效工具，阐述如下：

定理 1：($\frac{*}{\infty}$ 型)设数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足：1) 数列 $\{y_n\}$ 从某一项开始严格单调增加；2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$；3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$ (其中 $A$ 为有限数、$+\infty$、$-\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$。

注 1：定理 1 在应用过程中，不能笼统地说若 $A=\infty$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\infty$，不一定有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$ 成立。

例如，分别取 $x_n=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]n^2$，$y_n=n$。即 $\{x_n\}=\{0,2^2,0,4^2,\cdots\}$，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\infty$，但是 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}=\{0,2,0,4,\cdots\}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\neq\infty$。

定理 2：($\frac{0}{0}$ 型)设数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足：1) 数列 $\{y_n\}$ 从某一项开始单调递减趋于 0；2) 数列 $\{x_n\}$ 趋于 0 (但未必单调)；3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}=A$ (其中 $A$ 为有限数、$+\infty$、$-\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}$。

注 2：由 Stolz 定理，能得到以下几个非常有用的结论：1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$；2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $x_i>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$；3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{1+2+\cdots+n}=a$；4) 若 $x_i>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$。

以上结果分别称之为算术平均值、几何平均值、加权平均值极限定理；第 4 个结果从理论上说明了正项级数敛散性判别法中，根值法较比值法的判别范围更加广泛。

## 3. Stolz 定理的推广

定理 3：($\frac{*}{\infty}$ 型)设数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足：1) 存在正整数 $p$，$N_0$，使得 $y_n<y_{n+p}$，$n\geq N_0$；2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$；

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+p}-x_n}{y_{n+p}-y_n}=A$(其中 $A$ 为有限数、$+\infty$、$-\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+p}-x_n}{y_{n+p}-y_n}$。

证明：首先注意到对任意的自然数 $n$，都存在自然数 $m$，$i$，使得 $n=mp+i$，$0\le i\le p-1$，且满足 $n\to\infty\Leftrightarrow m\to\infty$。

1) 若 $A$ 为有限数。根据数列极限与其子列极限的关系知，对于任意的 $0\le i\le p-1$，都有 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{x_{(m+1)p+i}-x_{mp+i}}{y_{(m+1)p+i}-y_{mp+i}}=A$。

由极限定义知，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $m\ge N$ 时，有 $A-\varepsilon<\dfrac{x_{(m+1)p+i}-x_{mp+i}}{y_{(m+1)p+i}-y_{mp+i}}<A+\varepsilon$。

又根据已知条件，总有 $y_{(m+1)p+i}>y_{mp+i}$，从而得到一连串不等式 $A-\varepsilon<\dfrac{x_{mp+i}-x_{(m-1)p+i}}{y_{mp+i}-y_{(m-1)p+i}}<A+\varepsilon$，$A-\varepsilon<\dfrac{x_{(m-1)p+i}-x_{(m-2)p+i}}{y_{(m-1)p+i}-y_{(m-2)p+i}}<A+\varepsilon$，$\cdots$ $A-\varepsilon<\dfrac{x_{(N+1)p+i}-x_{Np+i}}{x_{(N+1)p+i}-x_{Np+i}}<A+\varepsilon$。

利用比例性质，可得 $A-\varepsilon<\dfrac{x_{mp+i}-x_{Np+i}}{y_{mp+i}-y_{Np+i}}<A+\varepsilon$。注意到

$$\frac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}-A=\frac{y_{mp+i}-y_{Np+i}}{y_{mp+i}}\cdot\left(\frac{x_{mp+i}-x_{Np+i}}{y_{mp+i}-y_{Np+i}}-A\right)+\frac{x_{Np+i}-Ay_{Np+i}}{y_{mp+i}}。$$

由三角不等式，即得 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}=A$，$0\le i\le p-1$。从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A$。

2) 若 $A=+\infty$，则当 $n$ 足够大时，有 $x_{n+p}-x_n>y_{n+p}-y_n>0$。于是由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ 易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+p}-y_n}{x_{n+p}-x_n}=0$。由 1)的证明可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$。

3) 若 $A=-\infty$，令 $z_n=-x_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_{n+p}-z_n}{y_{n+p}-y_n}=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+p}-x_n}{y_{n+p}-y_n}=+\infty$。由 2)的证明，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{y_n}=+\infty$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=-\infty$。

定理 4：($\dfrac{0}{0}$ 型)设数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足：1) 存在正整数 $p$，$N_0$，使得 $y_{n+p}<y_n, n\ge N_0$；2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+p}}{y_n-y_{n+p}}=A$(其中 $A$ 为有限数、$+\infty$、$-\infty$)。则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+p}}{y_n-y_{n+p}}$。

证明：首先注意到对任意的自然数 $n$，都存在自然数 $m$，$i$，使得 $n=mp+i$，$0\le i\le p-1$，且满足 $n\to\infty\Leftrightarrow m\to\infty$。

1) 若 $A$ 为有限数。根据数列极限与其子列极限的关系知，对于任意的 $0\le i\le p-1$，都有 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{x_{mp+i}-x_{(m+1)p+i}}{y_{mp+i}-y_{(m+1)p+i}}=A$。

注意到，总有 $y_{mp+i}>y_{(m+1)p+i}$。再由极限定义，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N$，使得当 $m\ge N$ 时，恒成立

$$A-\varepsilon<\frac{x_{mp+i}-x_{(m+1)p+i}}{y_{mp+i}-y_{(m+1)p+i}}<A+\varepsilon,$$

从而得到一连串不等式

$A-\varepsilon<\dfrac{x_{mp+i}-x_{(m+1)p+i}}{y_{mp+i}-y_{(m+1)p+i}}<A+\varepsilon$， $A-\varepsilon<\dfrac{x_{(m+1)p+i}-x_{(m+2)p+i}}{y_{(m+1)p+i}-y_{(m+2)p+i}}<A+\varepsilon$， $\cdots$

$A-\varepsilon<\dfrac{x_{(m+k-1)p+i}-x_{(m+k)p+i}}{y_{(m+k-1)p+i}-y_{(m+k)p+i}}<A+\varepsilon$。

利用比例性质，有 $A-\varepsilon<\dfrac{x_{mp+i}-x_{(m+k)p+i}}{y_{mp+i}-y_{(m+k)p+i}}<A+\varepsilon$。固定 $m$，令 $k\to\infty$，对上式取极限，有 $A-\varepsilon\le\dfrac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}\le A+\varepsilon$，于是，$A-\varepsilon\le\varliminf\limits_{m\to\infty}\dfrac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}\le\varlimsup\limits_{m\to\infty}\dfrac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}\le A+\varepsilon$。

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，有 $\varliminf\limits_{m\to\infty}\dfrac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}=\varlimsup\limits_{m\to\infty}\dfrac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}=A$，从而，$\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}=A$，$0\le i\le p-1$。于是由数列与其子列的关系知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A$。

2) 若 $A=+\infty$，则当 $n$ 足够大时，有 $x_n-x_{n+p}>y_n-y_{n+p}>0$。即 $n$ 足够大时 $x_n>x_{n+p}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n+p}}{x_n-x_{n+p}}=0$。由 1)的证明，即知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=0$，也即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$。

3) 若 $A=-\infty$，令 $z_n=-x_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n-z_{n+p}}{y_n-y_{n+p}}=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+p}}{y_n-y_{n+p}}=+\infty$。由 2)的证明，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{y_n}=+\infty$，也即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=-\infty$。

注 3：推广后的 Stolz 定理中的条件：存在正整数 $p$，$N_0$，使得比原定理中的条件数列 $\{y_n\}$ 从某一项开始严格单调增加要弱的多，这便使得其应用范围更加广泛，实际上已有的 Stolz 定理是本文给出定理的一种特殊形式，即 $p=1$。

推广后的 Stolz 定理在处理给出的已知条件中的递推公式不是相邻两项关系的数列极限问题显得更加方便实用。下面以第三届全国大学生数学竞赛预赛(2011 年非数学类)中的第二大题第 2)小问为例，加以说明。

**例：** 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，其中 $a,\lambda$ 为有限数，求证：如果存在正整数 $p$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$。

证明：令 $y_n=n$，则显然满足定理 3 的条件，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+p}-a_n}{n+p-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+p}-a_n}{p}=\frac{1}{p}\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\frac{\lambda}{p}$$

于是，由定理 3 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+p}-a_n}{n+p-n}=\frac{\lambda}{p}。$$

得证。

注 4：原例题讲解过程是采用了数列及其子列间的关系来证明的，详见文献[4]，比较两种证明过程，可以发现采用 Stolz 定理的推广形式更为简洁明了。

## 基金项目

山东省自然科学基金(ZR2014AM006)。

## 参考文献

[1] 吕文斌. 有关 Stolz 定理的推广及应用[J]. 大学数学, 2012, 28(1): 192-194.

[2] 张传芳, 杨春玲. 利用 Stolz 定理的推广定理求极限[J]. 高等数学研究, 2005, 8(5): 29-31.

[3] 高景德, 王祥珩. 交流电机的多回路理论[J]. 清华大学学报, 1987, 27(1): 1-8.

[4] 张天德, 窦慧, 崔玉泉. 全国大学生数学竞赛辅导指南[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.