

# The Initial Boundary Value Problem of the Thermoelastic Coupled Beam Equations with Memory Term under Axial Force

Shuaibo Liu, Jianwen Zhang\*

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi  
Email: \*Zhangjianwen@tyut.edu.cn

Received: Mar. 25<sup>th</sup>, 2020; accepted: Apr. 10<sup>th</sup>, 2020; published: Apr. 17<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

In this paper, we study the initial boundary value of a thermally coupled beam equation with a memory term under the action of an axial force.

## Keywords

Axial Force, Memory Terms, Thermoelastic, Beam

---

# 轴向力作用下具有记忆项的热弹耦合梁方程组的初边值问题

刘帅博, 张建文\*

太原理工大学, 数学学院, 山西 太原  
Email: \*Zhangjianwen@tyut.edu.cn

收稿日期: 2020年3月25日; 录用日期: 2020年4月10日; 发布日期: 2020年4月17日

---

## 摘要

本文研究了轴向力作用下具有记忆项的热弹耦合梁方程的初边值的问题, 通过先验估计证明了系统弱解和正则解的存在唯一性。

---

\*通讯作者。

## 关键词

轴向力, 记忆项, 热弹耦合, 梁

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

1968年, Gurtin Monton E 等[1]提出了具有记忆项的热传导理论。之后关于含记忆性的各类非线性梁方程的初边值问题的研究有若干的进展[2]-[8], 比如2009年, Wang Junmin 等[2]研究了如下具有记忆项的热传导方程

$$\theta_t + \int_0^t g(t-\tau)\theta_{xx}(x,\tau)d\tau = 0$$

解的存在性。2011年, Lazo P P D [3]运用 Galerkin 方法证明了如下具有记忆项的波动方程

$$u_{tt} - M(|u_x|^2)u_{xx} + \int_0^t g(t-\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau = 0$$

整体解存在唯一性和稳定性。2011年, Santos M L [4]考虑热记忆项, 研究了如下热弹耦合杆方程组

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x = 0 \\ \theta_t - \theta_{xx} - \int_0^t g(t-\tau)\theta_{xx}(x,\tau)d\tau + \beta u_{tx} = 0 \end{cases}$$

解的存在唯一性及指数衰减率。

本文在前人的基础上考虑如下轴向力作用下具有记忆项热弹耦合梁方程组

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - \int_0^t k_1(t-\tau)u_{xxxx}(x,\tau)d\tau - M\left(\int_0^L |u_x|^2 dx\right)u_{xx} + \alpha\theta_{xx} = q(x) \\ \theta_t - \theta_{xx} - \int_0^t k_2(t-\tau)\theta_{xx}(x,\tau)d\tau - \alpha u_{xxt} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

在边界条件

$$u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0, \quad \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0 \quad (2)$$

和初始条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x) \quad (3)$$

下解的存在唯一性。

## 2. 预备知识

本文的讨论是基于以下的 Hilbert 空间:

$$S_1 = \{u \in H^4(0,L) \mid u, u_{xx} \in H_0^1(0,L)\}$$

$$S_2 = H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$$

且  $S_1 \subset S_2 \subset L^2$ 。

方程中的函数满足如下基本假设

(h1) 对函数  $M$ , 假设  $M \in C^1([0, \infty))$ , 且  $M$  为非负函数, 有

$$M(s) \geq a + bs (a, b > 0), \quad |M'(s)| < \sigma \tag{4}$$

其中  $\hat{M}(s) = \int_0^s M(z) dz$ , 其中  $\sigma$  为大于0的正常数。

(h2) 假设  $k_1(t) \in C^1[[0, \infty), [0, \infty)]$ ,  $k_1(t) \geq 0$ ,  $k_1'(t) \leq 0$ ,  $\int_0^\infty k_1(t) dt < a$ 。

(h3) 假设  $k_2(t) \in C^1[[0, \infty), [0, \infty)]$ ,  $k_2(0) = 0$ , 且  $1 - \int_0^\infty k_2(t) dt = l > 0$ ,  $\exists \xi > 0$ , 使得  $k_2'(t) \leq -\xi k_2(t)$ 。

(h4) 假设  $q(x) \in L^2(0, L)$ 。

### 3. 主要结论

#### 3.1. 弱解的存在性

**定理 1** 若  $u_0 \in S_2, u_1, \theta_0 \in H_0^1(0, L)$ , 且假设 (h1)~(h4) 成立, 则存在  $u \equiv u(x, t), \theta \equiv \theta(x, t)$  使得  $u \in L^\infty(0, T; S_2)$ ,  $u_t \in L^\infty(0, T; L^2)$ ,  $\theta \in L^\infty(0, T; L^2)$ ,  $T > 0$ 。且在下述定义下满足方程(1), 即对几乎处处的  $t \in (0, T)$  有

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u, \omega) + (u_{xx}, \omega_{xx}) - \int_0^t k_1(t-\tau)(u_{xx}, \omega_{xx}) d\tau + M(\|u_x(t)\|_2^2)(u_x, \omega_x) + \alpha(\theta_{xx}, \omega) = (q(x), \omega) \\ \frac{d}{dt}(\theta, \tilde{\omega}) + (\theta_x, \tilde{\omega}_x) + \int_0^t k_2(t-\tau)(\theta_x, \tilde{\omega}_x) d\tau - \alpha(u_{xxt}, \tilde{\omega}) = 0 \end{cases}, \quad \forall \omega \in S_2, \tilde{\omega} \in H_0^1 \tag{5}$$

**证明:** 1) 构造近似解: 设  $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$  和  $\{\tilde{\omega}_j\}_{j=1}^\infty$  分别是  $S_2$  和  $H_0^1$  的标准正交基, 使得  $u_0, u_1 \in \text{span}\{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $\theta_0 = \tilde{\omega}_1$ , 记

$$u^m(x, t) = \sum_{j=1}^m r_j(t) \omega_j(x), \quad \theta^m(t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) \tilde{\omega}_j(x)$$

其中  $r_j(t), h_j(t)$  为未知函数, 仿(5)作如下关于  $u^m(x, t)$  的方程组

$$\begin{cases} (u_t^m, \omega_j) + (u_{xx}^m, \omega_{jxx}) - \int_0^t k_1(t-\tau)(u_{xx}^m, \omega_{jxx}) d\tau + M(\|u_x^m(t)\|_2^2)(u_x^m, \omega_{jx}) + \alpha(\theta_{xx}^m, \omega_j) = (q(x), \omega_j) \\ (\theta_t^m, \tilde{\omega}_j) + (\theta_x^m, \tilde{\omega}_{jx}) + \int_0^t k_2(t-\tau)(\theta_x^m, \tilde{\omega}_{jx}) d\tau - \alpha(u_{xxt}^m, \tilde{\omega}_j) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

另外有

$$\begin{cases} u^m(x, 0) = u_0^m \rightarrow u_0 \in S_2 \\ u_t^m(x, 0) = u_1^m \rightarrow u_1 \in L^2 \\ \theta^m(x, 0) = \theta_0^m \rightarrow \theta_0 \in L^2 \end{cases} \tag{7}$$

根据常微分的解的存在唯一性理论可知, 方程(6) (7)存在唯一解, 下面进行先验估计。

2) 先验估计

以下讨论中  $C$  表示与  $m, T$  无关的常数, 它在不同的地方代表不同的表达式中可能有不同的值。

记

$$(k \circ \varphi)(t) = \int_0^t k(t-\tau) \int_0^L |\varphi(t) - \varphi(\tau)| dx d\tau \tag{8}$$

令方程组(6)中两式分别与  $r_{j\mu}$  和  $h_j$  做积, 并对  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  求和, 得

$$\begin{aligned} & (u_t^m, u_t^m) + (u_{xx}^m, u_{xx}^m) - \int_0^t k_1(t-\tau)(u_{xx}^m(\tau), u_{xx}^m(\tau)) d\tau \\ & + M \left( \|u_x^m(t)\|_2^2 \right) (u_x^m, u_x^m) + \alpha(\theta_{xx}^m, u_t^m) = (q(x), u_t^m) \end{aligned} \quad (9)$$

$$(\theta_t^m, \theta^m) + (\theta_x^m, \theta_x^m) + \int_0^t k_2(t-\tau)(\theta_x^m(\tau), \theta_x^m(\tau)) d\tau - \alpha(u_{xx}^m, \theta_x^m) = 0 \quad (10)$$

两式相加, 并从 0 到  $t$  积分所得两式相加, 由假设(h1)及(8)式, 得

$$\begin{aligned} & F_m(t) + (k_1 \circ u_{xx}^m)(t) + \int_0^t \left[ k_1(s) \|u_{xx}^m\|_2^2 - (k_1' \circ u_{xx}^m)(s) \right] ds \\ & + 2 \int_0^t \left[ \int_0^s k_2(s-\tau)(\theta_x^m(\tau), \theta_x^m(s)) d\tau \right] ds + 2 \int_0^t \|\theta_x^m(s)\|_2^2 ds \\ & = F_m(0) + \int_0^t (q(x), u_t^m) ds \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} F_m(t) &= \|u_t^m\|_2^2 + \|u_{xx}^m\|_2^2 + \hat{M} \left( \|u_x^m\|_2^2 \right) + \|\theta^m\|_2^2 - \int_0^t k_1(s) ds \|u_{xx}^m\|_2^2 \\ F_m(0) &= \|u_1^m\|_2^2 + \|u_{0xx}^m\|_2^2 + \hat{M} \left( \|u_{0x}^m\|_2^2 \right) + \|\theta_0^m\|_2^2 - \int_0^t k_1(s) ds \|u_{0xx}^m\|_2^2 \end{aligned}$$

结合假设(h3), 由 Schwarz 不等式和 Young 不等, 得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^s k_2(s-\tau)(\theta_x^m(\tau), \theta_x^m(s)) d\tau \right| \\ &= \left| \int_0^L \int_0^s k_2(s-\tau) \theta_x^m(\tau) \theta_x^m(s) d\tau dx \right| \\ &\leq \eta \|\theta_x^m(s)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \int_0^L \left[ \int_0^s k_2(s-\tau) \theta_x^m(\tau) d\tau \right]^2 dx \\ &\leq \eta \|\theta_x^m(s)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \int_0^s k_2(\tau) d\tau \int_0^s k_2(s-\tau) \int_0^L |\theta_x^m(\tau)|^2 dx d\tau \\ &\leq \eta \|\theta_x^m(s)\|_2^2 + \frac{(1-l)k_2(0)}{4\eta} \int_0^s \|\theta_x^m(\tau)\|_2^2 d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $0 < \eta < 1$ . 则

$$\left| 2 \int_0^t \left[ \int_0^s k_2(s-\tau)(\theta_x^m(\tau), \theta_x^m(s)) d\tau \right] ds \right| \leq 2\eta \int_0^t \|\theta_x^m(s)\|_2^2 ds \quad (13)$$

由假设(h4), 得

$$2 \int_0^t (q(x), u_t^m(s)) ds \leq 2 \int_0^t \left[ \|q(x)\| \cdot \|u_t^m(s)\| \right] ds \leq \|q(x)\|_2^2 + \int_0^t F_m(s) ds \quad (14)$$

由(12)~(14), 得

$$F_m(t) + 2(1-\eta) \int_0^t \|\theta_x^m(s)\|_2^2 ds \leq F_m(0) + \|q(x)\|_2^2 + C \int_0^t F_m(s) ds \quad (15)$$

故由 Gronwall 引理可得

$$F_m(t) + 2(1-\eta) \int_0^t \|\theta_x^m(s)\|_2^2 ds \leq \left( F_m(0) + \|q(x)\|_2^2 \right) e^{Ct}$$

因此得到

$$\|u_t^m\| \leq C, \quad \|u_{xx}^m\| \leq C, \quad \|\theta^m\| \leq C, \quad \int_0^t \|\theta_x^m(s)\|_2^2 ds < C.$$

由于上述关于  $t$  一致有界, 故对  $\forall T, t \in (0, T)$  内均成立。由 Poincare 不等式可得  $\|u^m\| \leq C$ 。

3) 收敛:

$u^m \rightarrow u$  在  $L^\infty(0, T; S_2)$  弱\*收敛

$u_t^m \rightarrow u_t$  在  $L^\infty(0, T; L^2)$  弱\*收敛

$\theta^m \rightarrow \theta$  在  $L^\infty(0, T; L^2)$  弱\*收敛

$\int_0^t \|\theta_x^m(s)\|_2^2 ds$  在  $L^\infty(0, T; L^2)$  弱\*收敛

$u^m \rightarrow u$  在  $L^2(0, T)$  中强收敛且几乎处处收敛

对  $\forall \varphi \in L^1(0, T)$ , 有  $\omega\varphi \in L^1(0, T; L^2)$ , 那么有

$$\int_0^T (u_{xx}^m, \omega_{xx}) \varphi dt = \int_0^T \int_0^L u_{xx}^m \omega_{xx} \varphi dx dt = \int_0^T (u^m, \omega_{xxxx} \varphi) dt \rightarrow \int_0^T (u, \omega_{xxxx} \varphi) dt = \int_0^T (u_{xx}, \omega_{xx}) \varphi dt$$

即  $(u_{xx}^m, \omega_{xx}) \rightarrow (u_{xx}, \omega_{xx})$  在  $L^\infty(0, T)$  弱\*收敛。

$$\int_0^T (\theta_x^m, \tilde{\omega}_x) \varphi dt = \int_0^T \int_0^L \theta_x^m \tilde{\omega}_x \varphi dx dt = \int_0^T (\theta^m, \tilde{\omega}_{xx} \varphi) dt \rightarrow \int_0^T (\theta, \tilde{\omega}_{xx} \varphi) dt = \int_0^T (\theta_x, \tilde{\omega}_x) \varphi dt$$

即  $(\theta_x^m, \omega_x) \rightarrow (\theta_x, \omega_x)$  在  $L^\infty(0, T)$  弱\*收敛。

同理可得

$\int_0^t k_1(t-\tau)(u_{xx}^m, \omega_{xx}) d\tau \rightarrow \int_0^t k_1(t-\tau)(u_{xx}, \omega_{xx}) d\tau$  在  $L^\infty(0, T)$  弱\*收敛。

$M\left(\|u_t^m(t)\|_2^2\right)(u_x^m, \omega_x) \rightarrow M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)(u_x, \omega_x)$  在  $L^\infty(0, T)$  弱\*收敛。

由以上可知

$$\begin{cases} (u_t, \omega) + (u_{xx}, \omega_{xx}) - \int_0^t k_1(t-\tau)(u_{xx}, \omega_{xx}) d\tau + M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)(u_x, \omega_x) = q(L) \\ (\theta_t, \tilde{\omega}) + (\theta_x, \tilde{\omega}_x) - \int_0^t k_2(t-\tau)(\theta_x, \tilde{\omega}_x) d\tau = 0 \end{cases} \quad (16)$$

成立。定理 1 证毕。

**定理 2** 设  $(u, \theta)$ ,  $(v, \eta)$  是方程 (5) 的两个解, 且  $u, v \in L^\infty(0, T; S_2)$ ,  $\theta, \eta \in L^\infty(0, T; L^2)$ ,  $u_t, v_t \in L^\infty(0, T; L^2)$ , 以及假设  $(u, \theta)$ ,  $(v, \eta)$  满足初始条件:  $u(x, 0) = u_0$ ,  $u_t(x, 0) = u_1$ ,  $\theta(x, 0) = \theta_0$ ,  $v(x, 0) = v_0$ ,  $v_t(x, 0) = v_1$ ,  $\eta(x, 0) = \eta_0$  及  $u_0, v_0 \in S_2$ ,  $\theta_0, \eta_0 \in L^2$  且  $u_1, v_1 \in L^2$ ,  $u_0, v_0 \in S_2$ , 令  $(z, \lambda) = (u - v, \theta - \eta)$ , 则有

$$\begin{cases} (z_t, \omega_j) + (z_{xx}, \omega_{jxx}) - \int_0^t k_1(t-\tau)(z_{xx}, \omega_{jxx}) d\tau + M\left(\|z_x(t)\|_2^2\right)(z_x, \omega_{jx}) + \alpha(\gamma_{xx}, \omega_j) = 0 \\ (\gamma_t, \tilde{\omega}_j) + (\gamma_x, \tilde{\omega}_{jx}) + \int_0^t k_2(t-\tau)(\gamma_x, \tilde{\omega}_{jx}) d\tau - \alpha(z_{txx}, \tilde{\omega}_j) = 0 \end{cases}$$

**证明:**与定理 1 先验估计类似, 可得到

$$\|z_t\|_2^2 + \|z_{xx}\|_2^2 + \|\lambda\|_2^2 \leq \left\{ \|u_1 - v_1\|_2^2 + \|u_{0xx} - v_{0xx}\|_2^2 + \|\theta_0 - \eta_0\|_2^2 \right\} e^C \quad (17)$$

其中  $C$  是关于  $\|u_1\|, \|v_1\|, \|u_{0xx}\|, \|v_{0xx}\|, \|\theta_0\|, \|\eta_0\|$  的连续函数。

**推论**方程(1)-(3)的解是唯一的。

**证明:**由(17)得, 当  $u_0 = v_0, u_1 = v_1, \theta_0 = \eta_0$  时, 得到  $\|z_t\|_2^2 + \|z_{xx}\|_2^2 + \|\lambda\|_2^2 \leq 0$ , 则有  $\|z_t\| = 0, \|z_{xx}\| = 0, \|\lambda\| = 0$ , 从而有  $u = v, \theta = \eta$ 。解的唯一性得证。

### 3.2. 正则性

本节我们假设

(h5)  $k_1(0) = 0$ ,  $k_1'(0) = 0$ ,  $k_2'(t) \leq 0$ ,  $k_2''(t) \geq 0$ 。

**定理 3** 若  $u_0 \in S_1, u_1, \theta_0 \in S_2$ , 且假设(h1)—(h5)成立, 则存在唯一的函数  $u \equiv u(x, t), \theta \equiv \theta(x, t)$  使得  $u \in L^\infty(0, T; S_1)$ ,  $u_t \in L^\infty(0, T; S_2)$ ,  $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ ,  $\theta \in L^\infty(0, T; S_2)$ ,  $\theta_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ ,  $T > 0$ 。且在下述定义下满足方程(1), 即对几乎处处的  $t \in (0, t)$  有

$$\begin{cases} (u_{tt}, \omega) + (u_{xx}, \omega_{xx}) - \int_0^t k_1(t-\tau)(u_{xx}, \omega_{xx}) d\tau + M(\|u_x(t)\|_2^2)(u_x, \omega_x) + \alpha(\theta_{xx}, \omega) = (q(x), \omega) \\ (\theta_t, \tilde{\omega}) + (\theta_x, \tilde{\omega}_x) + \int_0^t k_2(t-\tau)(\theta_x, \tilde{\omega}_x) d\tau - \alpha(u_{xxt}, \tilde{\omega}) = 0 \end{cases} \quad \forall \omega \in S_1, \tilde{\omega} \in S_2 \quad (18)$$

**证明:** 1) 构建近似解: 设  $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$  和  $\{\tilde{\omega}_j\}_{j=1}^\infty$  分别是  $S_1$  和  $S_2$  的标准正交基, 使得  $u_0, u_1 \in \text{span}\{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $\theta_0 = \tilde{\omega}_1$ , 记

$$u^m(x, t) = \sum_{j=1}^m r_j(t) \omega_j(x), \quad \theta^m(t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) \tilde{\omega}_j(x)$$

其中  $r_j(t)$ ,  $h_j(t)$  为未知函数, 仿(5)作如下关于  $u^m(x, t)$  的方程组

$$\begin{cases} (u_{tt}^m, \omega_j) + (u_{xxxx}^m, \omega_j) - \int_0^t k_1(t-\tau)(u_{xxxx}^m, \omega_j) d\tau - M(\|u_x^m(t)\|_2^2)(u_{xx}^m, \omega_j) + \alpha(\theta_{xx}^m, \omega_j) = (q(x), \omega_j) \\ (\theta_t^m, \tilde{\omega}_j) - (\theta_{xx}^m, \tilde{\omega}_j) - \int_0^t k_2(t-\tau)(\theta_{xx}^m, \tilde{\omega}_j) d\tau - \alpha(u_{xxt}^m, \tilde{\omega}_j) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

另外有

$$\begin{cases} u^m(x, 0) = u_0^m \rightarrow u_0 \in S_1 \\ u_t^m(x, 0) = u_1^m \rightarrow u_1 \in S_2 \\ \theta^m(x, 0) = \theta_0^m \rightarrow \theta_0 \in S_2 \end{cases} \quad (20)$$

根据常微分的解的存在唯一性理论可知, 方程(19)(20)存在唯一解, 下面进行先验估计。

2) 先验估计

与之前一样可得  $\|u_t^m\| \leq C$ ,  $\|u_{xx}^m\| \leq C$ ,  $\|\theta^m\| \leq C$ 。

将  $r_j = r_{jt}(0)$ ,  $h_j = h_{jt}(0)$  两式分别与方程组(19)中两式做积, 对  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  求和后, 得

$$\|u_{tt}^m(0)\|_2^2 + (u_{xxxx}^m(0), u_{tt}^m(0)) - M(\|u_x^m(0)\|_2^2)(u_{xx}^m(0), u_{tt}^m(0)) + \alpha(\theta_{xx}^m(0), u_{tt}^m(0)) = (q(x), u_{tt}^m(0)) \quad (21)$$

$$\|\theta_t^m(0)\|_2^2 + (\theta_{xx}^m(0), \theta_t^m(0)) - \alpha(u_{xxt}^m(0), \theta_t^m(0)) = 0 \quad (22)$$

结合假设(h4)应用 Schwarz 不等式, 得

$$\|u_{tt}^m(0)\|_2^2 \leq \left[ \|u_{0xxxx}^m\| + M(\|u_{0xx}^m\|_2^2) \|u_{0xx}^m\| + \alpha \|\theta_{0xx}^m\| + \|q(x)\| \right] \|u_{tt}^m(0)\| \quad (23)$$

$$\|\theta_t^m(0)\|_2^2 \leq \left[ \|\theta_{0xx}^m\| + \alpha \|u_{1xxt}^m\| \right] \|\theta_t^m(0)\| \quad (24)$$

因此得到

$$\begin{aligned} & u_{ttt}^m + u_{xxxxt}^m - \left[ M'(\|u_x^m(t)\|_2^2) + 2M(u_x^m, u_{xt}^m) \right] u_{xx}^m - M(\|u_x(t)\|_2^2) u_{xxt}^m \\ & - \int_0^t k_1'(t-\tau) u_{xxxx}^m(\tau) d\tau - k_1(0) u_{xxxxt}^m + \alpha \theta_{xxt}^m = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\theta_t^m - \theta_{xxt}^m - \int_0^t k_2'(t-\tau)\theta_{xx}^m(\tau) d\tau - k_2(0)\theta_{xx}^m - \alpha u_{xxt}^m = 0 \tag{26}$$

(25)(26)两式分别与  $u_{tt}^m$  与  $\theta_t^m$  做积, 并从 0 到  $t$  积分, 所得两式相加, 结合假设(h1)及(8)式, 得

$$F_m(t) + 2\int_0^t \int_0^s k_1'(s-\tau)(u_{xxx}^m(\tau), u_{ttt}^m(s)) d\tau ds - (k_2 \circ \theta_x^m)(t) + \int_0^t \left[ -k_2'(s)\|\theta_x^m\|_2^2 + (k_2'' \circ \theta_x^m)(s) \right] ds + 2\int_0^t \|\theta_{xt}^m\|_2^2 ds$$

$$= F_m(0) + \int_0^t M(\|u_x(t)\|_2^2)(u_{xxt}^m, u_{tt}^m) + \left[ M'(\|u_x(t)\|_2^2) + 2M(u_x^m, u_{xt}^m) \right] (u_{xx}^m, u_{tt}^m) ds \tag{27}$$

其中  $F_m(t) = \|u_{tt}^m\|_2^2 + \|u_{xxt}^m\|_2^2 + \|\theta_t^m\|_2^2 + \|\theta_x^m\|_2^2 \int_0^t k_2'(\tau) d\tau$ 。

由假设(h1)及定理 1 结论, 并由 Schwarz 不等式和 Young 不等式, 得到

$$M(\|u_x^m\|_2^2)(u_{xxt}^m, u_{tt}^m) + \left[ M'(\|u_x^m\|_2^2) + 2M(u_x^m, u_{xt}^m) \right] (u_{xx}^m, u_{tt}^m)$$

$$\leq \frac{1}{2}\sigma(\|u_{xx}^m\|_2^2 + \|u_{tt}^m\|_2^2) + 2M\|u_x^m\|_2^2 \cdot \|u_{xt}^m\|_2^2 \cdot \frac{1}{2}(\|u_{xx}^m\|_2^2 + \|u_{tt}^m\|_2^2)$$

$$+ M(\|u_x^m\|_2^2) \cdot \frac{1}{2}(\|u_{xxt}^m\|_2^2 + \|u_{ttt}^m\|_2^2) \tag{28}$$

$$\leq C(\|u_{xx}^m\|_2^2 + \|u_{tt}^m\|_2^2 + \|u_x^m\|_2^2 + \|u_{xt}^m\|_2^2 + \|u_{xxt}^m\|_2^2)$$

$$\leq CF_m(t)$$

由假设(h5), 及并结合 Schwarz 不等式和 Young 不等式, 得到

$$\left| \int_0^s k_1'(s-\tau)(u_{xxx}^m(\tau), u_{xtt}^m(s)) d\tau \right|$$

$$\leq \left| \int_0^L \int_0^s k_1'(s-\tau)u_{xxx}^m(\tau)u_{xtt}^m(s) d\tau dx \right|$$

$$\leq \eta \|u_{xtt}^m(s)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \int_0^L \left( \int_0^s k_1'(s-\tau)u_{xxx}^m(\tau) d\tau \right)^2 dx \tag{29}$$

$$\leq \eta \|u_{xtt}^m(s)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \int_0^s k_1'(\tau) d\tau \int_0^s k_1'(s-\tau) \int_0^L |u_{xxx}^m(\tau)|^2 dx$$

$$\leq \eta \|u_{xtt}^m(s)\|_2^2 + \frac{(1-l)k_1'(0)}{4\eta} \int_0^s \|u_{xxx}^m(\tau)\|_2^2 d\tau$$

其中  $0 < \eta < 1$ 。故

$$\left| \int_0^t \int_0^s k_1'(s-\tau)(u_{xxx}^m(\tau), u_{xtt}^m(s)) ds d\tau \right| \leq 2\eta \int_0^t \|u_{xtt}^m(s)\|_2^2 ds \leq 2\eta \int_0^t \|F_m(s)\|_2^2 ds \tag{30}$$

由(28)~(31), 可得

$$F_m(t) + 2\int_0^t \|\theta_{xt}^m\|_2^2 ds \leq F_m(0) + C \int_0^t F_m(s) ds \tag{31}$$

由 Gronwall 引理, 得

$$F_m(t) + 2\int_0^t \|\theta_{xt}^m\|_2^2 ds \leq F_m(0) e^{Ct}$$

因此得到

$$\|u_{tt}^m\| \leq C, \quad \|u_{xxt}^m\| \leq C, \quad \|\theta_t^m\| \leq C, \quad \int_0^t \|\theta_{xt}^m\|_2^2 ds \leq C$$

又因为  $u_{xx}^m(0,t) = u_{xx}^m(L,t) = 0$ , 故由罗尔中值定理, 有

$\exists \xi_1 \in (0, L)$ , 使得  $u_{xxx}^m(\xi_1, t) = 0$ ,

由 Poincare 不等式, 得

$$\|u_{xxx}^m\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_{xxxx}^m\| < C$$

又因为  $\theta^m(0, t) = \theta^m(L, t) = 0$ , 故由罗尔中值定理, 得

$\exists \xi_2 \in (0, 1)$ , 使得  $\theta_x^m(\xi_2, t) = 0$ ,

由 Poincare 不等式, 得

$$\|\theta_x^m\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\theta_{xx}^m\| < C$$

3) 收敛性:

$u^m \rightarrow u$  在  $L^\infty(0, T; S_1)$  弱\*收敛。

$u_t^m \rightarrow u_t$  在  $L^\infty(0, T; S_2)$  弱\*收敛。

$\theta^m \rightarrow \theta$  在  $L^\infty(0, T; S_2)$  弱\*收敛。

$u^m \rightarrow u$  在  $H^1(0, T)$  中强收敛且几乎处处收敛。

$u_{tt}^m \rightarrow u_{tt}$  在  $L^\infty(0, T; L^2)$  弱\*收敛。

$\theta_t^m \rightarrow \theta_t$  在  $L^\infty(0, T; L^2)$  弱\*收敛。

$\int_0^t \theta_{xt}^m ds \rightarrow \int_0^t \theta_{xt} ds$  在  $L^\infty(0, T; L^2)$  弱\*收敛

$\theta^m \rightarrow \theta$  在  $L^2(0, T)$  中强收敛且几乎处处收敛。

由定理 2 的证明可证  $(u, \theta)$  满足初始条件  $u(0) = u_0, \theta(0) = \theta_0, u_t(0) = u_1$ 。进而可证解是唯一的。证毕。

## 4. 结论

本文主要讨论的轴向力作用下具有记忆项的热弹耦合梁方程组的初边值问题具有如下结论:

- 1) 在满足初始条件的情况下, 系统(1)~(3)弱解存在且唯一。
- 2) 在满足初始条件的情况下, 系统(1)~(3)正则解存在且唯一。

## 基金项目

国家自然科学基金(11872264)。

## 参考文献

- [1] Gurtin, M.E. and Pinkin, A.C. (1968) A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **31**, 113-126. <https://doi.org/10.1007/BF00281373>
- [2] Wang, J.M., Guo, B.Z. and Fu, M.Y. (2009) Dynamic Behavior of a Heat Equation with Memory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **32**, 1287-1310. <https://doi.org/10.1002/mma.1090>
- [3] Lazo, P.P.D. (2011) Global Solution for a Quasilinear Wave Equation with Singular Memory. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 7660-7668. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.069>
- [4] Santos, M.L. (2011) Exponential Decay to a Thermoelastic System with Indefinite Memory Dissipation in a Domain with Moving Boundary. *Acta Mathematica Hungarica*, **133**, 272-287. <https://doi.org/10.1007/s10474-011-0118-y>
- [5] Messaoudi, S.A. and Abdelfeteh, F. (2013) General Decay for a Porous-Thermoelastic System with Memory: The Case



- of Nonlinear Speeds. *Acta Mathematica Scientia*, **33**, 23-40. [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(12\)60192-1](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(12)60192-1)
- [6] Giorgi, C. and Naso, M.G. (2000) Exponential Stability of a Linear Viscoelastic Bar with Thermal Memory. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **1**, 45-66. <https://doi.org/10.1007/BF02505887>
- [7] Ball, J.M. (1973) Initial-Boundary Value Problem for an Extensible Beam. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **42**, 61-90. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(73\)90121-2](https://doi.org/10.1016/0022-247X(73)90121-2)
- [8] Zhang, J.W. and Wang, D.X. (2010) The Initial-Boundary Value Problem of a Nonlinear Thermoelastic Beam Equations. *Applied Mechanics and Materials*, **29-32**, 583-585. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.29-32.583>