Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(4), 565-573
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.94068

Hans汉斯

Multiplicity of Positive Solutions of *p*(*x*)-Kirchhoff Problems with Sign-Changing Weight Functions

Bin Shang

Department of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: shangbin0521@163.com

Received: Apr. 5th, 2020; accepted: Apr. 20th, 2020; published: Apr. 27th, 2020

Abstract

In this paper, the $p(x)$-Kirchhoff problem with sign-changing weight functions is studied. Based on variational method and Nehari manifold, it is proved the existence and multiplicity of positive solutions of the problem.

Keywords

Positive Solution, Nehari Manifold, Variational Method, $p(x)$-Kirchhoff Equation

带有变号权函数的*p*(*x*)-Kirchhoff类型方程正解的存在性与多重性

尚　彬

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江　金华
Email: shangbin0521@163.com

收稿日期：2020年4月5日；录用日期：2020年4月20日；发布日期：2020年4月27日

摘　要

本文研究带有变号权函数的$p(x)$-Kirchhoff类型方程，主要运用变分方法与Nehari流形的分解证明其正解的存在性与多重性。

文章引用：尚彬. 带有变号权函数的 $p(x)$-Kirchhoff 类型方程正解的存在性与多重性[J]. 应用数学进展，2020，9(4): 565-573. DOI: 10.12677/aam.2020.94068

关键词

正解，Nehari流形，变分法，*p*(*x*)-Kirchhoff方程

1. 引言

本文考虑一类带有 $p(x)$-Laplacian 算子的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)\Delta_{p(x)}u = \lambda f(x)|u|^{q(x)-2}u + g(x)|u|^{h(x)-2}u, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性与多重性，其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$， $N\geq 3$ 是光滑有界区域， $\Delta_{p(x)} = div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$ 是 $p(x)$-Laplacian 算子，参数 $\lambda>0$， $p(x),q(x),h(x),s_1(x),s_2(x)\in C(\bar{\Omega})$。

本文的方程满足如下条件：

(H$_1$) 对于 $k\geq 0$， $M(t)=a+bt^k$， $t\in[0,\infty)$。

(H$_2$) $f(x)\in L^{s_1(x)}(\Omega)$， $f(x)\not\equiv 0$。

(H$_3$) $g(x)\in L^{s_2(x)}(\Omega)$， $g(x)\not\equiv 0$。

(H$_4$) $1<q(x)<p(x)<h(x)\leq N<\min(s_1(x),s_2(x))$，其中 $x\in\bar{\Omega}$，

$$1<p^- := \inf_{x\in\Omega} p(x)\leq p(x)\leq p^+ := \sup_{x\in\Omega} p(x),$$

$$1<q^-\leq q^+<p^-\leq p^+<p^+(k+1)<h^-\leq h^+。$$

对于 Kirchhoff 类型方程的研究一直是偏微分方程中的重要课题。Huang 等在[1]中利用山路引理讨论了方程(1)在 $p(x)=p$ 和权函数非负的情况下正解的存在性。当权函数 $f(x)$，$g(x)$变号时，[2] [3]中利用 Nehari 流形分解的方法得到了正解的存在性与多重性。对于带有变号权函数的 $p(x)$-Laplacian 方程正解的存在性与多重性结果可参见[4] [5]。

本文的主要结果如下：

定理 1.1： 若假设(H$_1$)~(H$_4$)成立，则存在 $\lambda_1>0$，使得当 $\lambda\in(0,\lambda_1)$ 时方程(1)存在至少两个正解。

2. 预备知识与变分框架

对 $p(x)\in C_+(\bar{\Omega})$，变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 定义为：

$$L^{p(\cdot)}(\Omega)=\left\{u\,|\,u\text{是一个可测实函数},\int_\Omega |u|^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

其范数定义为：

$$|u|_{p(x)}=\inf\left\{\lambda>0:\int_\Omega\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\leq 1\right\}.$$

记 E 为 Sobolev 空间 $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$，其范数 $\|u\|_E=|\nabla u|_{p(\cdot)}$，空间 E 是自反可分的 Banach 空间。

命题 2.1 [6] 设 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是可测函数使得对 a.e. $x\in\Omega$ 有 $p(x)\in L^{\infty}(\Omega)$ 以及 $1\le p(x)q(x)\le\infty$，设 $u\in L^{q(x)}(\Omega)$，则有

$$|u|_{p(x)q(x)}\le 1\Rightarrow |u|_{p(x)q(x)}^{p^+}\le \left||u|^{p(x)}\right|_{q(x)}\le |u|_{p(x)q(x)}^{p^-},$$

$$|u|_{p(x)q(x)}\ge 1\Rightarrow |u|_{p(x)q(x)}^{p^-}\le \left||u|^{p(x)}\right|_{q(x)}\le |u|_{p(x)q(x)}^{p^+}.$$

命题 2.2 [6] 若 $q(x)\in C_+(\bar{\Omega})$，且 $q(x)<p^*(x)$，$\forall x\in\bar{\Omega}$，则 $W_0^{1,p(x)}(\Omega)\to L^{q(x)}(\Omega)$ 是紧嵌入且连续的。

根据假设条件(H_4)，易知对 $\forall x\in\bar{\Omega}$ 有 $s_1'(x)q(x)<p^*(x)$ 以及 $s_2'(x)h(x)<p^*(x)$ 其中 s_1' 与 s_2' 分别是 s_1 与 s_2 的共轭指数。因此 $E\to L^{s_1'(x)q(x)}(\Omega)$ 和 $E\to L^{s_2'(x)h(x)}(\Omega)$ 是紧嵌入且连续的。

由 Hölder 不等式及 Sobolev 嵌入可以得到，当 $u\in E$ 时下列不等式成立：

$$\int_\Omega f(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x\le 2|f|_{s_1(x)}\left||u|^{q(x)}\right|_{s_1'(x)}\le\max\left\{C_1\|u\|^{q^+},C_2\|u\|^{q^-}\right\},\tag{2.1}$$

$$\int_\Omega g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x\le 2|g|_{s_2(x)}\left||u|^{h(x)}\right|_{s_2'(x)}\le\max\left\{C_3\|u\|^{h^+},C_4\|u\|^{h^-}\right\}.\tag{2.2}$$

定义 2.3 若对任意 $\varphi\in E$，下列积分恒等式成立，则称 $u\in E$ 是方程(1)的弱解

$$\begin{aligned}&a\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+b\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x\\&=\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q(x)-2}u\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x)|u|^{h(x)-2}u\varphi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

方程(1)的能量泛函 $J_\lambda:E\to\mathbb{R}^N$ 表示为

$$\begin{aligned}J_\lambda(u)=a\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x+\frac{b}{k+1}\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{k+1}\\-\lambda\int_\Omega\frac{f(x)}{q(x)}|u|^{q(x)}\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{g(x)}{h(x)}|u|^{h(x)}\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{2.3}$$

当 $\|u\|>1$ 时，有

$$\begin{aligned}J_\lambda(u)\ge&\frac{a}{p^+}\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x+\frac{b}{(p^+)^{k+1}(k+1)}\left(\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{k+1}\\&-\frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega f(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x-\frac{1}{h^-}\int_\Omega g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x\\\ge&\frac{a}{p^+}\|u\|^{p^-}+\frac{b}{(p^+)^{k+1}(k+1)}\|u\|^{p^-(k+1)}-\frac{\lambda}{q^-}C_1\|u\|^{q^+}-\frac{1}{h^-}C_3\|u\|^{h^+}.\end{aligned}$$

根据假设(H_4)有 $q^+<p^-<p^-(k+1)<h^+$，由此可知 J_λ 在空间 E 中不是下方有界的。因此，我们在下面的 Nehari 流形中考虑问题，其定义为

$$N_\lambda=\left\{u\in E\setminus\{0\}:\left\langle J_\lambda'(u),u\right\rangle=0\right\}.$$

显然，其中的点为 J_λ 的临界点。若 $u\in N_\lambda$ 当且仅当

$$I_{\lambda}(u)=\langle J_{\lambda}'(u),u\rangle=a\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x+b\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{k}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x \\ -\lambda\int_{\Omega}f(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x=0 \tag{2.4}$$

对 $u\in N_{\lambda}$，有

$$\langle I_{\lambda}'(u),u\rangle=a\int_{\Omega}p(x)|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x+kb\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{k-1}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{2} \\ +b\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{k}\int_{\Omega}p(x)|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega}f(x)q(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x \\ -\int_{\Omega}g(x)h(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

将 N_{λ} 分解为

$$N_{\lambda}^{+}(\Omega)=\left\{u\in N_{\lambda}(\Omega):\langle I_{\lambda}'(u),u\rangle>0\right\},$$

$$N_{\lambda}^{-}(\Omega)=\left\{u\in N_{\lambda}(\Omega):\langle I_{\lambda}'(u),u\rangle<0\right\},$$

$$N_{\lambda}^{0}(\Omega)=\left\{u\in N_{\lambda}(\Omega):\langle I_{\lambda}'(u),u\rangle=0\right\}.$$

3. 预备引理

引理 3.1 存在 $\lambda_1>0$，使得对 $\lambda\in(0,\lambda_1)$，$N_{\lambda}^{0}(\Omega)=\varnothing$。

证明：假设 $N_{\lambda}^{0}(\Omega)\neq\varnothing$，$\lambda>0$ 以及 $u\in N_{\lambda}^{0}(\Omega)$ 使得 $\|u\|>1$。根据(2.1)，(2.2)，(2.4)以及假设(H_4)可以得到

$$0=\langle I_{\lambda}'(u),u\rangle=a\int_{\Omega}p(x)|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x+kb\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{k-1}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{2} \\ +b\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{k}\int_{\Omega}p(x)|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega}f(x)q(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}g(x)h(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x \\ \geq p^{-}a\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x+p^{-}(k+1)b\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{k}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x-h^{+}\int_{\Omega}g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x \\ -q^{+}\left[a\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x+b\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{k}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x\right] \\ \geq\left(p^{-}-q^{+}\right)a\|u\|^{p^{-}}+\frac{p^{-}(k+1)-q^{+}}{\left(p^{+}\right)^{k}}b\|u\|^{p^{-}(k+1)}+\left(q^{-}-h^{+}\right)C_3\|u\|^{h^{+}}$$

因此，

$$\|u\|\geq C_5\left(\frac{p^{-}-q^{+}}{h^{+}-q^{+}}\right)^{\frac{1}{h^{+}-p^{-}}} \tag{3.1}$$

同样的，

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle I_\lambda'(u), u\rangle \\
&\le p^+ a\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x + (k+1)p^+ b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x - \lambda q^- \int_\Omega f(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x \\
&\quad - h^-\left[a\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x\right] \\
&\le (p^+ - h^-)a\|u\|^{p^-} + \frac{p^+(k+1)-h^-}{(p^-)^k} b\|u\|^{p^-(k+1)} + \lambda(h^- - q^-)C_1\|u\|^{q^+}
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\|u\| \le C_6\left[\lambda\frac{h^- - q^-}{h^- - (k+1)p^+}\right]^{\frac{1}{p^- - q^+}} \tag{3.2}
$$

若 λ 足够的小，例如

$$
\lambda_1 = \frac{h^- - p^+(k+1)}{h^- - q^-}\left(\frac{1}{C_6}\right)^{p^- - q^+}
$$

结合式(3.1)和(3.2)可知 $\|u\| \le 1$，与假设矛盾。因而可以得到当 $\lambda \in (0,\lambda_1)$ 时 $N_\lambda^0(\Omega) = \varnothing$。由上面引理可知，当 $\lambda \in (0,\lambda_1)$ 时，$N_\lambda(\Omega) = N_\lambda^+(\Omega) \cup N_\lambda^-(\Omega)$。记

$$
\alpha_\lambda^+ = \inf_{u\in N_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u),\quad \alpha_\lambda^- = \inf_{u\in N_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u)。
$$

引理 3.2 泛函 J_λ 在流形 $N_\lambda(\Omega)$ 上是强制和下方有界的。

证明： 设 $u \in N_\lambda(\Omega)$，$\|u\| > 1$。通过式(1.1)、(2.2)以及假设(H_4)可以得到

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\ge \frac{a}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x + \frac{b}{p^+(k+1)}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega f(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{h^-}\left[a\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x\right] \\
&\ge \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{h^-}\right)\|u\|^{p^-} + \left[\frac{1}{p^+(k+1)} - \frac{1}{h^-}\right]\frac{b}{(p^+)^k}\|u\|^{p^-(k+1)} + C_1\lambda\left(\frac{1}{h^-} - \frac{1}{q^-}\right)\|u\|^{q^+} \\
&\ge \frac{h^- - p^+}{p^+h^-}a\|u\|^{p^-} + \frac{h^- - p^+(k+1)}{(p^+)^{k+1}(k+1)h^-}b\|u\|^{(k+1)p^-} - C_1\lambda\frac{h^- - q^-}{h^-q^-}\|u\|^{q^+}
\end{aligned}
$$

根据假设(H_4)，可以得到 $\|u\| \to \infty$ 时，$J_\lambda \to \infty$。因此泛函 J_λ 在流形 $N_\lambda(\Omega)$ 上是强制和下方有界的。

定理 3.3 假设 u_0 是 J_λ 在流形 $N_\lambda(\Omega)$ 上的局部极小值或局部最大值，且 $u_0 \notin N_\lambda^0(\Omega)$，则 u_0 是 J_λ 的临界点。

证明： 若 u_0 是 J_λ 在流形 $N_\lambda(\Omega)$ 上的局部极值，由 Lagrange 乘数法可知，存在 $\mu \in \mathbb{R}$ 使得 $J_\lambda'(u_0) = \mu I_\lambda'(u_0)$。因此，

$$
\langle J_\lambda'(u_0), u_0\rangle = \mu\langle I_\lambda'(u_0), u_0\rangle
$$

由于 $u_0 \in N_\lambda(\Omega)$，$\langle J_\lambda'(u_0), u_0\rangle = 0$，而 $u_0 \notin N_\lambda^0(\Omega)$，$\langle I_\lambda'(u_0), u_0\rangle \neq 0$。因此可得 $\mu = 0$，即 $J_\lambda'(u_0) = 0$。

引理 3.4 若 $\lambda \in (0, \lambda_1)$，$u \in N_\lambda^+(\Omega)$，则 $J_\lambda(u) < 0$。

证明： 由于 $u \in N_\lambda^+(\Omega)$，可以得到

$$\begin{aligned} & p^+ a\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + p^+(k+1)b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x \\ & -\lambda q^- \int_\Omega f(x)|u|^{q(x)}\mathrm{d}x - h^- \int_\Omega g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x > 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

我们将式(2.4) × ($-q^-$)后与式(3.3)相加，可得

$$\begin{aligned} & (p^+ - q^-)a\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + \left[p^+(k+1) - q^-\right]b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x \\ & +(q^- - h^-)\int_\Omega g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x > 0 \end{aligned}$$

因此

$$\int_\Omega g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x < \left(\frac{p^+ - q^-}{h^- - q^-}\right)a\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{p^+(k+1) - q^-}{h^- - q^-}b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^k \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)$$

则有，

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \le\; & \frac{a}{p^-}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{b}{p^-(k+1)}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h^+}\int_\Omega g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x \\ & -\frac{1}{q^+}\left[a\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x\right] \\ \le\; & \left(\frac{q^+ - p^-}{p^- q^+}\right)a\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{1}{(p^-)(k+1)} - \frac{1}{q^+}\right]\frac{b}{(p^-)^k}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{k+1} \\ & +\left(\frac{h^+ - q^+}{q^+ h^+}\right)\int_\Omega g(x)|u|^{h(x)}\mathrm{d}x \\ \le\; & \frac{(p^- - q^+)(p^- - h^+)}{p^- q^+ h^+}a\|u\|^{p^-} + \frac{\left[(k+1)p^- - q^+\right]\left[(k+1)p^- - h^+\right]}{(k+1)p^- q^+ h^+}b\|u\|^{p^-(k+1)} < 0. \end{aligned}$$

引理 3.5 若 $\lambda \in (0, \lambda_1)$，则 $J_\lambda(u)$ 在 $N_\lambda^+(\Omega)$ 中存在极小值 u_0^+，且 $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda^+$。

证明： 由引理 3.2 可知 J_λ 在 $N_\lambda(\Omega)$ 上是有界的，所以存在序列 $\{u_n^+\} \subseteq N_\lambda^+(\Omega)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n^+) = \inf_{u \in N_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) = \alpha_\lambda^+ < 0.$$

由于 J_λ 是强制的，u_n^+ 在空间 E 中是有界的，我们假设在 E 中 $u_n^+ \xrightarrow{w} u_0^+$，根据 Sobolev 嵌入可以得到

在 $L^{s_1'(x)q(x)}(\Omega)$ 中，$u_n^+ \to u_0^+$

以及

在 $L^{s_2'(x)h(x)}(\Omega)$ 中，$u_n^+ \to u_0^+$

接下来，我们证明在空间 E 中 $u_n^+ \to u_0^+$。假设在 E 中 $u_n^+ \not\to u_0^+$，则有

$$a\int_\Omega \left|\nabla u_0^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x < a\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x.$$

$$b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left|\nabla u_0^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega \left|\nabla u_0^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x < b\liminf_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x.$$

根据 Sobolev 紧嵌入，有

$$\int_\Omega f(x)\left|u_0^+\right|^{q(x)}\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)\left|u_n^+\right|^{q(x)}\mathrm{d}x,$$

$$\int_\Omega g(x)\left|u_0^+\right|^{h(x)}\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega g(x)\left|u_n^+\right|^{h(x)}\mathrm{d}x.$$

根据 $\left\langle J_\lambda'\left(u_n^+\right),u_n^+\right\rangle = 0$ 以及式(2.1)，

$$\begin{aligned} J_\lambda\left(u_n^+\right) \ge\ & a\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{h^-}\right)\int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x + \lambda\left(\frac{1}{h^-}-\frac{1}{q^-}\right)\int_\Omega f(x)\left|u_n^+\right|^{q(x)}\mathrm{d}x \\ & + b\left[\frac{1}{p^+(k+1)}-\frac{1}{h^-}\right]\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} J_\lambda\left(u_n^+\right) \ge\ & a\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{h^-}\right)\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x + \lambda\left(\frac{1}{h^-}-\frac{1}{q^-}\right)\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)\left|u_n^+\right|^{q(x)}\mathrm{d}x \\ & + b\left[\frac{1}{p^+(k+1)}-\frac{1}{h^-}\right]\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k \int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda^+ = \inf_{u\in N_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) >\ & a\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{h^-}\right)\left\|u_0^+\right\|^{p^-} + b\left[\frac{1}{p^+(k+1)}-\frac{1}{h^-}\right]\frac{1}{\left(p^+\right)^k}\left\|u_0^+\right\|^{p^-(k+1)} \\ & + \lambda C_1\left(\frac{1}{h^-}-\frac{1}{q^-}\right)\left\|u_0^+\right\|^{q^+} \end{aligned}$$

根据条件(H_4)，当 $\left\|u_0^+\right\| > 1$ 时，

$$\alpha_\lambda^+ = \inf_{u\in N_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) > 0.$$

而引理 3.4 表明当 $u\in N_\lambda^+(\Omega)$ 时 $J_\lambda(u) < 0$，由此得到矛盾。

所以在空间 E 中 $u_n^+ \to u_0^+$ 以及

$$J_\lambda\left(u_0^+\right) = \lim_{n\to\infty} J_\lambda\left(u_n^+\right) = \inf_{u\in N_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u).$$

因此，u_0^+ 是 J_λ 在 $N_\lambda^+(\Omega)$ 中的极小值。

引理 3.6 若 $\lambda\in(0,\lambda_1)$，$u\in N_\lambda^-(\Omega)$，则 $J_\lambda(u) > 0$。

证明：设 $u\in N_\lambda(\Omega)$，通过 J_λ 定义式(2.3)以及式(2.4)可得

$$J_{\lambda}(u) \geq \frac{a}{p^{+}} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \mathrm{d}x + \frac{b}{p^{+}(k+1)} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \mathrm{d}x \right)^{k} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q^{-}} \int_{\Omega} f(x) |u|^{q(x)} \mathrm{d}x$$

$$- \frac{1}{h^{-}} \left[a \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \mathrm{d}x + b \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \mathrm{d}x \right)^{k} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \mathrm{d}x - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{q(x)} \mathrm{d}x \right]$$

$$\geq a \left(\frac{h^{-} - p^{+}}{p^{+} h^{-}} \right) \|u\|^{p^{-}} + \left[\frac{1}{(p^{+})(k+1)} - \frac{1}{h^{-}} \right] \frac{b}{(p^{+})^{k}} \|u\|^{p^{-}(k+1)} + \left(\frac{q^{-} - h^{-}}{q^{-} h^{-}} \right) \lambda C_{1} \|u\|^{q^{+}}$$

$$\geq \left(a \frac{h^{-} - p^{+}}{p^{+} h^{-}} + \left[\frac{1}{(p^{+})(k+1)} - \frac{1}{h^{-}} \right] \frac{b}{(p^{+})^{k}} + \left(\frac{q^{-} - h^{-}}{q^{-} h^{-}} \right) \lambda C_{1} \right) \|u\|^{p^{-}}$$

若选择

$$\lambda < \frac{q^{-}(h^{-} - p^{+})}{C_{7} p^{+}(h^{-} - q^{-})},$$

则有 $J_{\lambda}(u) > 0$。基于 $N_{\lambda}(\Omega) = N_{\lambda}^{+}(\Omega) \cup N_{\lambda}^{-}(\Omega)$ 以及 $N_{\lambda}^{+}(\Omega) \cap N_{\lambda}^{-}(\Omega) = \varnothing$，通过引理 3.4 可知 $u \in N_{\lambda}^{-}(\Omega)$。

引理 3.7 若 $\lambda \in (0, \lambda_{1})$，则 $J_{\lambda}(u)$ 在 $N_{\lambda}^{-}(\Omega)$ 中存在极小值 u_{0}^{-}，且 $J_{\lambda}(u_{0}^{-}) = \alpha_{\lambda}^{-}$。

证明： 由引理 3.2 可知 J_{λ} 在 $N_{\lambda}(\Omega)$ 上是有界的，所以存在极小化序列 $\{u_{n}^{-}\} \subseteq N_{\lambda}^{-}(\Omega)$ 使得

$$\lim_{n \to \infty} J_{\lambda}(u_{n}^{-}) = \inf_{u \in N_{\lambda}^{-}(\Omega)} J_{\lambda}(u) = \alpha_{\lambda}^{-} > 0.$$

由于 J_{λ} 是强制的，u_{n}^{-} 在空间 E 中是有界的，假设在 E 中 $u_{n}^{-} \xrightarrow{w} u_{0}^{-}$，根据 Sobolev 嵌入可以得到

在 $L^{s_{1}'(x) q(x)}(\Omega)$ 中，$u_{n}^{-} \to u_{0}^{-}$

以及

在 $L^{s_{2}'(x) h(x)}(\Omega)$ 中，$u_{n}^{-} \to u_{0}^{-}$

若 $u_{0}^{-} \in N_{\lambda}^{-}(\Omega)$，则存在常数 $t > 0$ 使得 $t u_{0}^{-} \in N_{\lambda}^{-}(\Omega)$ 以及 $J_{\lambda}(u_{0}^{-}) \geq J_{\lambda}(t u_{0}^{-})$。

根据式(2.5)，有

$$\left\langle I_{\lambda}'(t u_{0}^{-}), t u_{0}^{-} \right\rangle = a \int_{\Omega} p(x) |\nabla t u_{0}^{-}|^{p(x)} \mathrm{d}x + k b \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla t u_{0}^{-}|^{p(x)} \mathrm{d}x \right)^{k-1} \left(\int_{\Omega} |\nabla t u_{0}^{-}|^{p(x)} \mathrm{d}x \right)^{2}$$

$$+ b \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla t u_{0}^{-}|^{p(x)} \mathrm{d}x \right)^{k} \int_{\Omega} p(x) |\nabla t u_{0}^{-}|^{p(x)} \mathrm{d}x$$

$$- \lambda \int_{\Omega} f(x) q(x) |t u_{0}^{-}|^{q(x)} \mathrm{d}x - \int_{\Omega} g(x) h(x) |t u_{0}^{-}|^{h(x)} \mathrm{d}x$$

$$\leq t^{p^{+}} p^{+} a \int_{\Omega} |\nabla u_{0}^{-}|^{p(x)} \mathrm{d}x + t^{p^{+}(k+1)} \frac{p^{+}(k+1)}{(p^{-})^{k}} b \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{0}^{-}|^{p(x)} \mathrm{d}x \right)^{k+1}$$

$$- t^{q^{-}} q^{-} \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_{0}^{-}|^{q(x)} \mathrm{d}x - t^{h^{-}} h^{-} \int_{\Omega} g(x) |u_{0}^{-}|^{h(x)} \mathrm{d}x$$

根据条件(H_4)，可以得到 $I_{\lambda}'(t u_{0}^{-}) < 0$。因此根据 $N_{\lambda}^{-}(\Omega)$ 的定义，知 $t u_{0}^{-} \in N_{\lambda}^{-}(\Omega)$。

接下来，我们证明在空间 E 中 $u_{n}^{-} \to u_{0}^{-}$。假设在 E 中 $u_{n}^{-} \nrightarrow u_{0}^{-}$，则有

$$a \int_{\Omega} |\nabla u_{0}^{-}|^{p(x)} \mathrm{d}x < a \liminf_{n \to \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{n}^{-}|^{p(x)} \mathrm{d}x.$$

$$b\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}\left|\nabla u_0^-\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k\int_{\Omega}\left|\nabla u_0^-\right|^{p(x)}\mathrm{d}x<b\liminf_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}\left|\nabla u_n^-\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^k\int_{\Omega}\left|\nabla u_n^-\right|^{p(x)}\mathrm{d}x.$$

可得

$$\begin{aligned}
J_\lambda'\left(tu_0^-\right)&\le\frac{t^{p^+}}{p^-}a\int_{\Omega}\left|\nabla u_0^-\right|^{p(x)}\mathrm{d}x+\frac{t^{p^+(k+1)}}{\left(p^-\right)^k}b\left(\int_{\Omega}\left|\nabla u_0^-\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{k+1}\\
&\quad-\lambda\frac{t^{q^-}}{q^+}\int_{\Omega}f(x)\left|u_0^-\right|^{q(x)}\mathrm{d}x-\frac{t^{h^-}}{h^+}\int_{\Omega}g(x)\left|u_0^-\right|^{h(x)}\mathrm{d}x\\
&\le\lim_{n\to\infty}\left[\frac{t^{p^+}}{p^-}a\int_{\Omega}\left|\nabla u_n^-\right|^{p(x)}\mathrm{d}x+\frac{t^{p^+(k+1)}}{\left(p^-\right)^k}b\left(\int_{\Omega}\left|\nabla u_n^-\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{k+1}\right.\\
&\quad\left.-\lambda\frac{t^{q^-}}{q^+}\int_{\Omega}f(x)\left|u_n^-\right|^{q(x)}\mathrm{d}x-\frac{t^{h^-}}{h^+}\int_{\Omega}g(x)\left|u_n^-\right|^{h(x)}\mathrm{d}x\right]\\
&\le\lim_{n\to\infty}J_\lambda\left(tu_n^-\right)\le\lim_{n\to\infty}J_\lambda\left(u_n^-\right)=\inf_{u\in N_\lambda^-}J_\lambda(u)=\alpha_\lambda^-.
\end{aligned}$$

因此，u_0^- 是 J_λ 在 $N_\lambda^-(\Omega)$ 中的极小值。

定理 1.1 的证明： 通过引理 3.4 和引理 3.6 可知存在 $u_0^+\in N_\lambda^+(\Omega)$ 以及 $u_0^-\in N_\lambda^-(\Omega)$ 使得

$$J_\lambda\left(u_0^+\right)=\inf_{u\in N_\lambda^+(\Omega)}J_\lambda(u),\ J_\lambda\left(u_0^-\right)=\inf_{u\in N_\lambda^-(\Omega)}J_\lambda(u).$$

由于 $J_\lambda\left(u_0^\pm\right)=J_\lambda\left(\left|u_0^\pm\right|\right)$ 以及 $\left|u_0^\pm\right|\in N_\lambda^\pm$，可知 $u_0^\pm$ 为非负解。由定理 3.3，$u_0^\pm$ 是 J_λ 空间 E 中的临界点，因此 $u_0^\pm$ 是方程(1)的弱解。再由 Harnack 不等式[7]，$u_0^\pm$ 是方程(1)的正解。

致 谢

作者对审稿人表示衷心的感谢。

参考文献

[1] Huang, J.C., Chen, C.S. and Xiu, Z.H. (2013) Existence and Multiplicity Results for a p-Kirchhoff Equation with a Concave-Convex Term. *Applied Mathematics Letters*, **26**, 1070-1075. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.06.001

[2] Chen, C.Y., Kuo, Y.C. and Wu, T.F. (2011) The Nehari Manifold for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-Changing Weight Functions. *Journal of Differential Equations*, **250**, 1876-1908. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.11.017

[3] Li, Y.X., Mei, M. and Zhang, K. (2016) Existence of Multiple Nontrivial Solutions for a p-Kirchhoff Type Elliptic Problem Involving Sign-Changing Weight Functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **21**, 883-908. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.883

[4] Khaled, B.A. (2012) Multiplicity of Positive Solution of p(x)-Laplacian Problems with Sign-Changing Weight Functions. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, **3**, 202-221. https://doi.org/10.1515/apam-2012-0001

[5] Rasouli, S.H. and Fallah, K. (2017) The Nehari Manifold Approach for a p(x)-Laplacian Problem with Nonlinear Boundary Conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*, **69**, 111-125. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1350-6

[6] Fan, X.L., Shen, J.S. and Zhao, D. (2001) Sobolev Embedding Theorems for Spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **262**, 749-760. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7618

[7] Zhang, X. and Liu, X. (2007) The Local Boundedness and Harnack Inequality of p(x)-Laplace Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **232**, 209-218.