

Study on the Transfer Probability Density Function of a Class of Stochastic Differential Dynamical Systems

Lijiao Cai, Dongwei Huang*, Yongfeng Guo, Jianguo Tan

School of Mathematical Sciences, Tiangong University, Tianjin

Email: cailijiao@163.com, *tjhuangdw@163.com, sdjngyf@163.com, tjg0925@163.com

Received: May 26th, 2020; accepted: Jun. 10th, 2020; published: Jun. 17th, 2020

Abstract

In this paper, the solution and validity of the transfer probability density function for a class of stochastic dynamical systems are investigated. Firstly, a simple and accurate numerical simulation method is proposed to obtain the approximate solution of FPK (Fokker-Planck-Kolmogorov) equation. Secondly, by comparing the approximate solution with the exact solution of the system, we found that the relative error of this simulation method is less than $2 \times 10^{(-3)}$ and the error is basically within $10^{(-3)}$. Finally, by comparing the probability that the state variables obtained by the approximate solution appear in a steady-state region with the phase diagram of the discrete system, we conclude that the simulation method can effectively describe the system's behavior. Therefore, it is an effective algorithm to solve the FPK equation of the system.

Keywords

FPK Equation, Transfer Probability Density Function, Smooth Potential, Generalized Stability, Mathematica

一类随机微分动力系统的转移概率密度函数的研究

蔡利娇, 黄东卫*, 郭永峰, 谭建国

天津工业大学, 数学科学学院, 天津

Email: cailijiao@163.com, *tjhuangdw@163.com, sdjngyf@163.com, tjg0925@163.com

收稿日期: 2020年5月26日; 录用日期: 2020年6月10日; 发布日期: 2020年6月17日

*通讯作者。

文章引用: 蔡利娇, 黄东卫, 郭永峰, 谭建国. 一类随机微分动力系统的转移概率密度函数的研究[J]. 应用数学进展, 2020, 9(6): 852-861. DOI: 10.12677/aam.2020.96102

摘要

本文探究了一类随机动力系统转移概率密度函数的求解及其有效性问题。首先,提出了一种计算简便、精度较高的数值模拟方法,用于得到FPK (Fokker-Planck-Kolmogorov)方程的近似解。其次,通过比较该近似解与系统的精确解,我们发现此模拟方法的相对误差保持在 2×10^{-3} 以内,误差基本在 10^{-3} 以内。最后,通过比较由近似解得到的状态变量出现在某一稳态区域的概率和系统离散后的相图,我们得出此模拟方法可以有效地描述系统的性态。因此,它是求解系统FPK方程的一种有效算法。

关键词

FPK方程, 转移概率密度函数, 平稳势, 广义平稳, Mathematica

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对随机微分动力系统而言,研究 FPK 方程是探究系统响应的一种重要方法。通过求解 FPK 方程,我们可以得到状态变量的转移概率密度函数,进而了解系统的状态。但是对于绝大多数系统而言,其 FPK 方程无法或很难求得其精确解,因此,FPK 方程的数值解法非常重要。在许多学者的共同努力下,目前已经出现许多近似解法,例如有限元法[1],路径积分法[2] [3] [4],有限差分法[5] [6] [7] [8] [9],高斯闭合法[10]-[16]等等,但极少数文章关注其精确度。所以,本文针对一类非线性随机动力系统,在现有文献的基础上,首先提出一种数值解法——指数闭合法[15],其次研究其精确性问题。

我们的想法是:针对一类非线性随机动力系统,首先写出系统的 FPK 方程,其次假设方程的近似解为指数多项式形式,利用待定系数法可以求解出近似解的系数,从而得到系统 FPK 方程的数值解。并且,我们从两个方面验证该方法的有效性:一方面,比较该方法得到的 FPK 方程的数值解和广义平稳条件下的精确解的误差,发现该解法的误差小于千分之三。另一方面,比较数值解对应的转移概率密度函数和系统离散化后的相图这两者所确定的稳态区域,发现两个区域具有高度一致性。因此,本文提出的数值解法不仅计算简便,而且精度较高,是求解 FPK 方程的一种有效方法。

2. 数值算法

2.1. 准备工作

对于一般的非线性随机动力系统[17]:

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(X) + \sum_{l=1}^m g_{il}(X)W_l(t), i=1,2,\dots,n \quad (1)$$

式中 $X(t)=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $W_l(t)$ 是高斯白噪声, 其相关函数为

$$E[W_l(t)W_s(t+\tau)] = 2\pi K_{ls}\delta(\tau), l,s=1,2,\dots,m \quad (2)$$

如果该系统存在平稳转移概率密度函数, 则由下列简化 FPK 方程决定:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} G_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_i(x) p - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (b_{ij}(x) p) \right] = 0 \quad (3)$$

式中 G_i 是第 i 个方向的概率流。 a_i 、 b_{ij} 分别是一、二阶导数矩, 由方程(1)可导出:

$$\begin{aligned} a_i(x) &= f_i(x) + \pi \sum_{k=1}^n \sum_{l,s=1}^m K_{ls} g_{ks}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{il}(x); \\ b_{ij}(x) &= 2\pi \sum_{l,s=1}^m K_{ls} g_{il}(x) g_{js}(x); \end{aligned} \quad (4)$$

如果对(3)增加如下一组充分条件, 我们可以得到系统(1)在广义平稳条件下的精确解:

$$G_i = a_i(x) p - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [b_{ij}(x) p] = 0 \quad (5)$$

此时, 系统(1)属于平稳势类, 因此, 我们可以将平稳转移概率密度函数表示为 $p(x) = C \exp[-\varphi(x)]$ 。其中, C 是归一化常数, $\varphi(X)$ 叫做概率势函数。

而广义平稳的条件只有极少数系统满足, 绝大多数系统的 FPK 方程无法或很难求解。下面我们对本文的数值算法思想进行详细阐述。

2.2. 算法简述

我们假设系统(1)的 FPK 方程的解, 即系统的平稳转移概率密度函数为如下形式:

$$p_n(x) = C \exp[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{21}x_1^2 + a_{22}x_1x_2 + a_{23}x_2^2 + \cdots + a_{ij}x_1^{i-j+1}x_2^{j-1} + \cdots + a_{nn+1}x_2^n] \quad (6)$$

其中 C 为归一化常数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn+1} (n \geq 2)$ 是常数。由于解必须要满足方程, 即上式需满足(3), 从而我们将上式带入(3), 得到:

$$a_i(x) p_n - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [b_{ij}(x) p_n] = 0 \quad (7)$$

对上式两边使用待定系数法, 通过解方程便可求出 $x_1^i, x_2^j (i, j = 0, \dots, n)$ 的系数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn+1} (n \geq 2)$ 与归一化常数 C 。因此, 我们就可得到 FPK 方程的数值解。

下一小节我们通过两个例子具体说明该算法的计算过程与有效性。

3. 应用

3.1. 例 1

考虑:

$$\ddot{x} + 2\alpha[1 + W_1(t)]\dot{x} + \omega^2[1 + W_2(t)]x + \beta_1\left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2}\right)\dot{x} = W_3(t) \quad (8)$$

式中 $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ 是相互独立的 Stratonovich 意义下的零均值高斯白噪声过程, 其谱密度常数分别是 k_1, k_2, k_3 。 α, ω, β_1 是常数。

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, 则可得到其 Stratonovich 型随机微分方程为:

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 dt \\ dx_2 = \left[-2\alpha x_2 - \omega^2 x_1 - \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) x_2 \right] dt - 2\alpha x_2 \sqrt{2\pi k_1} \circ dB_1(t) \\ \quad - \omega^2 x_1 \sqrt{2\pi k_2} \circ dB_2(t) + \sqrt{2\pi k_3} \circ dB_3(t) \end{cases} \quad (9)$$

加入 Wong-Zakai 修正项, 上述方程便转化成 Itô 型随机微分方程为:

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 dt \\ dx_2 = \left[-2\alpha x_2 - \omega^2 x_1 - \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) x_2 + 4\alpha^2 x_2 \pi k_1 \right] dt - 2\alpha x_2 \sqrt{2\pi k_1} dB_1(t) \\ \quad - \omega^2 x_1 \sqrt{2\pi k_2} dB_2(t) + \sqrt{2\pi k_3} dB_3(t) \end{cases} \quad (10)$$

我们求出一、二阶导数矩分别为:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2; a_2 = -2\alpha x_2 - \omega^2 x_1 - \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) x_2 + 4\alpha^2 x_2 \pi k_1; \\ b_{11} &= b_{12} = b_{21} = 0; b_{22} = 8\alpha^2 x_2^2 \pi k_1 + 2\omega^4 x_1^2 \pi k_2 + 2\pi k_3; \end{aligned} \quad (11)$$

带入(3)便可得到此系统的 FPK 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2 p}{\partial x_1} + \frac{\partial \left[-2\alpha x_2 - \omega^2 x_1 - \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) x_2 + 4\alpha^2 x_2 \pi k_1 \right] p}{\partial x_2} \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left[8\alpha^2 x_2^2 \pi k_1 + 2\omega^4 x_1^2 \pi k_2 + 2\pi k_3 \right] p}{\partial x_2^2} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

我们知道, 通过将一阶导数矩分为可逆和不可逆分量可以将精确可解类从平稳势拓展到详细平衡。类似思路, 我们不仅把一阶导数矩分开, 而且把二阶导数矩也分开, 将精确可解类进一步拓展, 用于求解系统的 FPK 方程。(12)式左端最后一项可以写成:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \left[8\alpha^2 x_2^2 \pi k_1 + 2\omega^4 x_1^2 \pi k_2 + 2\pi k_3 \right] p}{\partial x_2^2} \\ &= \frac{\partial \left[16\alpha^2 x_2 \pi k_1 p \right]}{\partial x_2} + \frac{\partial \left[\left(8\alpha^2 x_2^2 \pi k_1 + 2\omega^4 x_1^2 \pi k_2 + 2\pi k_3 \right) \frac{\partial p}{\partial x_2} \right]}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (13)$$

将上式带入 FPK 方程(12), 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2 p}{\partial x_1} - \omega^2 x_1 \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial \left[-2\alpha x_2 - \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) x_2 - 4\alpha^2 x_2 \pi k_1 \right] p}{\partial x_2} \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial \left[\left(8\alpha^2 x_2^2 \pi k_1 + 2\omega^4 x_1^2 \pi k_2 + 2\pi k_3 \right) \frac{\partial p}{\partial x_2} \right]}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

为了化简上式的求解, 我们加入如下一组充分条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_2 p}{\partial x_1} - \omega^2 x_1 \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \left[-2\alpha x_2 - \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) x_2 - 4\alpha^2 x_2 \pi k_1 \right] p - \frac{1}{2} \left(8\alpha^2 x_2^2 \pi k_1 + 2\omega^4 x_1^2 \pi k_2 + 2\pi k_3 \right) \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

假设 $p(x) = C \exp[-\varphi(x)]$, 其中 $\varphi(x) = \varphi(\lambda)$, $\lambda = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_1^2$, C 是归一化常数。则(15)式等价于:

$$\begin{cases} x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \omega^2 x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \\ \left[2\alpha x_2 + \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) x_2 + 4\alpha^2 x_2 \pi k_1 \right] + \frac{1}{2} (8\alpha^2 x_2^2 \pi k_1 + 2\omega^4 x_1^2 \pi k_2 + 2\pi k_3) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

化简可得到:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2\alpha + \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) + 4\alpha^2 \pi k_1}{4\alpha^2 x_2^2 \pi k_1 + \omega^4 x_1^2 \pi k_2 + \pi k_3} \quad (17)$$

若取 $4\alpha^2 k_1 = k_2 \omega^2$, $\beta_1 = \frac{(2\alpha + 4\alpha^2 \pi k_1) \omega^4 k_2}{k_3}$ 则:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= \frac{2\alpha + \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) + 4\alpha^2 \pi k_1}{\pi k_2 \omega^2 x_2^2 + \omega^4 x_1^2 \pi k_2 + \pi k_3} \\ &= \frac{(2\alpha + 4\alpha^2 \pi k_1) \left[1 + \frac{\omega^4 k_2}{k_3} \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) \right]}{\pi k_3 \left[1 + \frac{\omega^4 k_2}{k_3} \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) \right]} \\ &= \frac{2\alpha + 4\alpha^2 \pi k_1}{\pi k_3} \end{aligned} \quad (18)$$

故在广义平稳条件下, 可解得该系统 FPK 方程的精确解为:

$$p_e(x) = C \exp \left[-\frac{2\alpha + 4\alpha^2 \pi k_1}{\pi k_3} \left(\frac{1}{2} \omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \right) \right] \quad (19)$$

下面采用本文提出的数值解法求(12)的近似解, 并将该近似解和上式精确解进行对比。首先, 假设该系统的平稳转移概率密度函数为:

$$p_n(x) = C \exp \left[a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{21} x_1^2 + a_{22} x_1 x_2 + a_{23} x_2^2 + \cdots + a_{ij} x_1^{i-j+1} x_2^{j-1} + \cdots + a_{nn+1} x_2^n \right] \quad (20)$$

将式(20)代入 FPK 方程(12)中, 固定住 n , 就有

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2 p_n}{\partial x_1} + \frac{\partial \left[-2\alpha x_2 - \omega^2 x_1 - \beta_1 \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} \right) x_2 + 4\alpha^2 x_2 \pi k_1 \right] p_n}{\partial x_2} \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left[8\alpha^2 x_2^2 \pi k_1 + 2\omega^4 x_1^2 \pi k_2 + 2\pi k_3 \right] p_n}{\partial x_2^2} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

运用待定系数法确定 p_n 的系数, 我们可求得此近似解。当取 $\omega=1$, $k_1=k_2=k_3=1$ 时, 求得 $\alpha=0.5$, $\beta_1=0.28$ 。

当取 $n=2$ 时, 我们使用 Mathematica 解得:

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0; a_{21} = -0.579577; a_{23} = -0.579577; \quad (22)$$

此时

$$p_2(x) = -0.579577x_1^2 - 0.579577x_2^2 \quad (23)$$

当取 $n = 6$ 时, 我们解得:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} = a_{22} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{34} = a_{42} = a_{44} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{54} = a_{55} \\ &= a_{56} = a_{62} = a_{64} = a_{66} = 0; \quad a_{21} = -0.579577; \quad a_{23} = -0.579577; \\ a_{41} &= 0.000126739; \quad a_{43} = 0.000253479; \quad a_{45} = 0.000126739; \\ a_{61} &= -0.0000844929; \quad a_{63} = -0.000253479; \quad a_{65} = -0.000253479; \\ a_{67} &= -0.0000844929. \end{aligned} \quad (24)$$

此时:

$$\begin{aligned} p_6(x) &= -0.579577x_1^2 + 0.000126739x_1^4 - 0.0000844929x_1^6 - 0.579577x_2^2 \\ &\quad + 0.000253479x_1^2x_2^2 - 0.000253479x_1^4x_2^2 + 0.000126739x_2^4 \\ &\quad - 0.000253479x_1^2x_2^4 - 0.0000844929x_2^6 \end{aligned} \quad (25)$$

数值模拟结果如图 1:

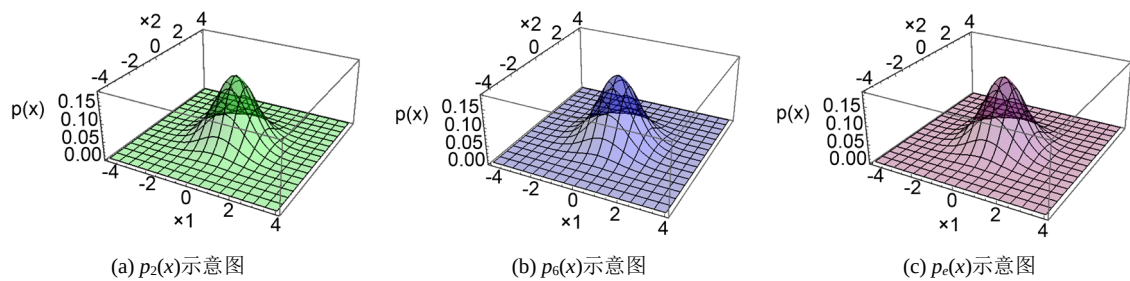


Figure 1. Schematic diagram of steady-state transfer probability density function
图 1. 稳态转移概率密度函数示意图

下面我们重点比较两种解的误差情况。图 2 展示了在不同区域, 近似解和精确解的误差图, 通过比较, 我们发现误差基本在 0.0003 之内, 精度较高。从图 1 中我们也可以看到, 系统的状态变量主要集中在 $(-2, 2)$ 之间, 因此, 图 3 展示了在此区域内, 不同小范围的精确度。图中不同颜色的线表示不同的区域, 对应不同的精确度。总体来看, 该方法在稳态区域的精确度非常高。

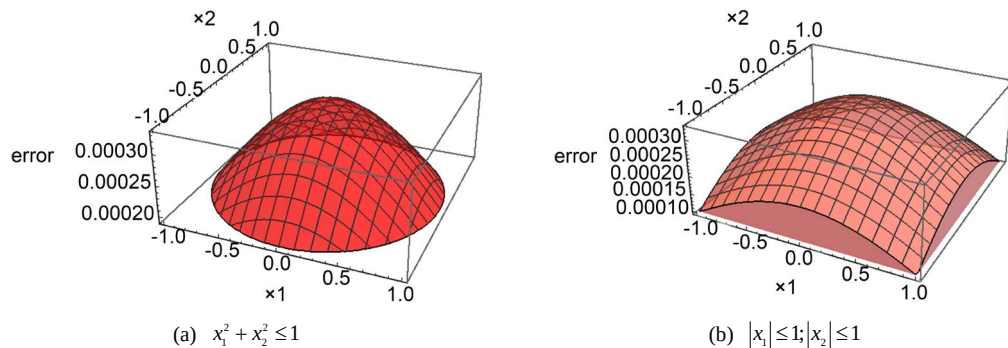


Figure 2. The error graph of $p_6(x)$ and $p_e(x)$
图 2. $p_6(x)$ 和 $p_e(x)$ 误差图

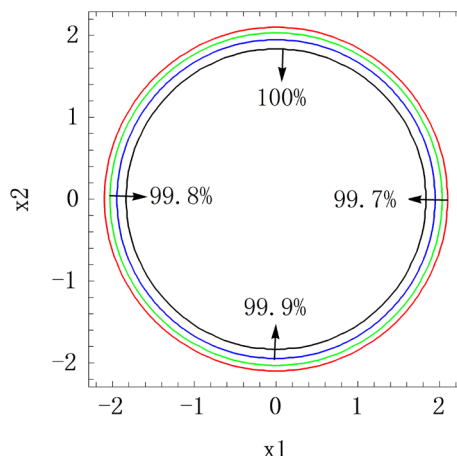


Figure 3. Accuracy diagram of steady state region

图 3. 稳态区域的精确度示意图

表 1 和表 2 分别给出平衡态附近的不同区域内, 近似解以及精确解的取值和误差比较, 观察这些数据我们可以看出, 两种解的误差非常微弱, 这也说明我们的方法较精确。

Table 1. List of values for numerical and exact solutions near equilibrium

表 1. 平衡态附近, 数值解与精确解取值一览表

$p(x)$	$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$	$x_1^2 + x_2^2 \leq 0.25$	$ x_1 \leq 1; x_2 \leq 1$	$ x_1 \leq 0.5; x_2 \leq 0.5$
$n = 2$	0.439865	0.134886	0.516040	0.167808
$n = 6$	0.440668	0.135130	0.516982	0.168112
精确解	0.439865	0.134886	0.516040	0.167808

Table 2. List of errors for numerical and exact solutions near equilibrium

表 2. 平衡态附近, 数值解与精确解误差一览表

比较 $p_2(x)$ 和 $p_e(x)$	$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$	$x_1^2 + x_2^2 \leq 0.25$	$ x_1 \leq 1; x_2 \leq 1$	$ x_1 \leq 0.5; x_2 \leq 0.5$
误差	0.000803	0.000244	0.000942	0.000304
相对误差	0.1825%	0.1808%	0.1825%	0.1811%

3.2. 例 2

考虑:

$$\ddot{X} + \left[a + (bX + c\dot{X})^2 \right] \dot{X} + X = (dX + e\dot{X})W_1(t) + W_2(t) \quad (26)$$

式中 a, b, c, d, e 是常数, $W_1(t), W_2(t)$ 是功率谱密度常数分别为 k_1, k_2 的独立高斯白噪声。假设 $X_1 = X, X_2 = \dot{X}$, 可以得到该系统的 Stratonovich 型随机微分方程为:

$$\begin{cases} dX_1 = X_2 dt \\ dX_2 = \left\{ - \left[a + (bX_1 + cX_2)^2 \right] X_2 - X_1 \right\} dt + (dX_1 + eX_2) \sqrt{2\pi k_1} \circ dB_1(t) + \sqrt{2\pi k_2} \circ dB_2(t) \end{cases} \quad (27)$$

式中 $B_1(t), B_2(t)$ 为单位维纳过程。转化为 Itô 型随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_1 = X_2 dt \\ dX_2 = \left\{ -\left[a + (bX_1 + cX_2)^2 \right] X_2 - X_1 + \pi k_1 e(dX_1 + eX_2) \right\} dt + (dX_1 + eX_2) \sqrt{2\pi k_1} dB_1(t) + \sqrt{2\pi k_2} dB_2(t) \end{cases} \quad (28)$$

式中 $\pi k_1 e(dX_1 + eX_2)$ 是 Wong-Zakai 修正项。从而我们可以得到系统的 FPK 方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_2 p}{\partial X_1} + \frac{\partial \left\{ -\left[a + (bX_1 + cX_2)^2 \right] X_2 - X_1 + \pi k_1 e(dX_1 + eX_2) \right\} p}{\partial X_2} \\ - \frac{\partial^2 \left[(dX_1 + eX_2)^2 \pi k_1 + \pi k_2 \right] p}{\partial X_2^2} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

如之前的计算过程类似, 我们假设系统(26)的平稳转移概率密度函数为:

$$p_n(X) = C \exp \left[a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{21}X_1^2 + a_{22}X_1X_2 + a_{23}X_2^2 + \cdots + a_{ij}X_1^{i-j+1}X_2^{j-1} + \cdots + a_{nn+1}X_2^n \right] \quad (30)$$

C 归一化常数。把该近似解带入(29)中, 可以得到:

$$\frac{\partial X_2 p_n}{\partial X_1} + \frac{\partial \left\{ -\left[a + (bX_1 + cX_2)^2 \right] X_2 - X_1 + \pi k_1 e(dX_1 + eX_2) \right\} p_n}{\partial X_2} - \frac{\partial^2 \left[(dX_1 + eX_2)^2 \pi k_1 + \pi k_2 \right] p_n}{\partial X_2^2} = 0 \quad (31)$$

若取 $a=4; b=\frac{5}{4}; c=-\frac{15}{4}; d=\frac{1}{2}; e=-\frac{3}{2}; k_1=k_2=\frac{1}{\pi}$ 。我们首先使用本文提出的数值解法求得平稳转移概率密度函数的系数, 得到 FPK 方程的近似解为:

$$p_n(X) = \frac{25}{16\pi} e^{-\frac{25}{32}(X_1^2 + 4X_2^2)} \quad (32)$$

图 4 给出了 p_n 的数值模拟示意图。

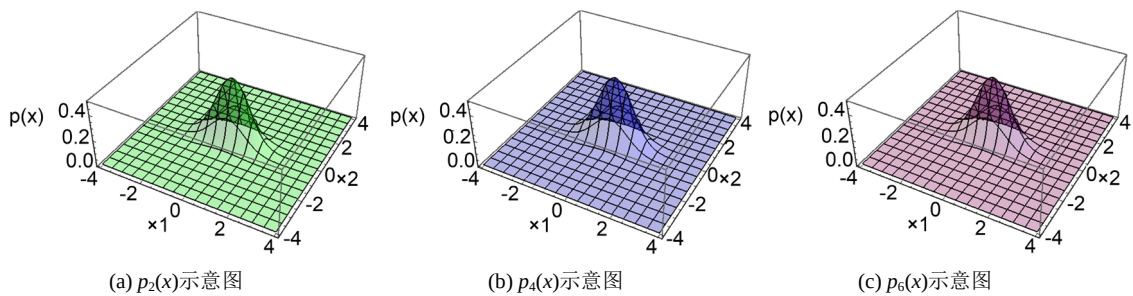


Figure 4. Schematic diagram of steady-state transfer probability density function

图 4. 稳态转移概率密度函数示意图

下面我们采用 Milsteins 离散方法, 得到(28)的离散化形式:

$$\begin{cases} X_1(t_{j+1}) = X_1(t_j) + X_2(t_j) \Delta t \\ X_2(t_{j+1}) = X_2(t_j) + \left\{ -\left[a + (bX_1(t_j) + cX_2(t_j))^2 \right] X_2(t_j) - X_1(t_j) + \pi k_1 e(dX_1(t_j) + eX_2(t_j)) \right\} \Delta t \\ \quad + (dX_1(t_j) + eX_2(t_j)) \sqrt{2\pi k_1} \Delta W_1(t) + \sqrt{2\pi k_2} \Delta W_2(t) \\ \quad + \frac{1}{2} \left\{ \left[d(dX_1(t_j) + eX_2(t_j)) 2\pi k_1 \right] (\Delta W_1(t)^2 - \Delta t) + \left[e(dX_1(t_j) + eX_2(t_j)) 2\pi k_1 \right] (\Delta W_2(t)^2 - \Delta t) \right\} \end{cases} \quad (33)$$

其中 $\Delta W_1(t), \Delta W_2(t)$ 服从 $N(0, \Delta t)$ 。模拟结果如图 5 所示:

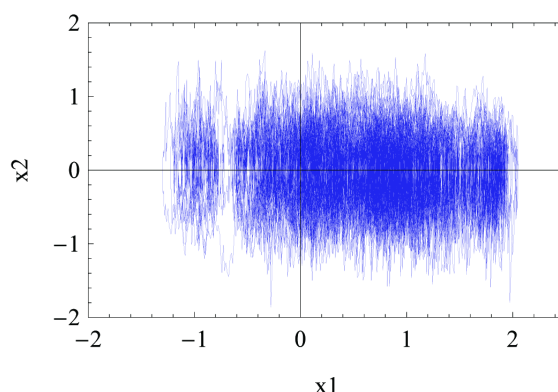


Figure 5. Phase diagram of system (28)

图 5. 系统(28)的相图示意图

长时间观察之后,我们发现系统的状态变量 x_1 集中出现在 $(-1.2, 2)$ 之间, x_2 集中出现在 $(-1.5, 1.8)$ 之间。我们令(32)对 x_1 和 x_2 分别在区间 $(-1.2, 2)$ 和 $(-1.5, 1.8)$ 上积分,得其值为 0.93。换句话说,根据本文提出的近似算法,我们估计此系统的状态变量 x_1 和 x_2 分别出现在区间 $(-1.2, 2)$ 和 $(-1.5, 1.8)$ 上的概率为 0.93。可以看出此结果与图 5 所示结果具有很高的一致性。

3.3. 结论

本篇论文主要解决了一类非线性随机微动力系统转移概率密度函数的求解及其有效性问题。首先我们提出一种近似方法,即假设系统 FPK 方程的解为指数多项式的形式,运用待定系数法求出多项式的系数,然后就可得到 FPK 方程的近似解。接着,通过两个具体的案例,我们详细地阐述了求解过程。通过比较广义平稳条件下得出的精确解和该近似解的误差,以及比较用近似解求出的状态变量位于稳态区域的概率和系统离散化后相图展示的结果,我们发现该方法不仅计算简便,而且精度很高,是求解转移概率密度函数的一种有效方法。在求解一般的 FPK 方程时,本文提出的模拟思路读者可以直接套用。

基金项目

中国自然科学基金(11501410; 51573133; 11672207), 天津市自然科学基金(17JCQNJC03800; 17JCYBJC15700)。

参考文献

- [1] Langley, R.S. (1985) A Finite Element Method for the Statistics of Non Linear Random Vibration. *Journal of Sound and Vibration*, **101**, 41-54. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(85\)80037-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(85)80037-7)
- [2] Yu, J.S., Cai, G.Q. and Lin, Y.K. (1997) A New Path Integration Procedure Based on Gauss-Legendre Scheme. *International Journal of Non Linear Mechanics*, **32**, 759-768. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(96\)00096-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(96)00096-0)
- [3] Xie, W.X., Xu, W. and Cai, L. (2006) Study of the Duffing Rayleigh Oscillator Subject to Harmonic and Stochastic Excitations by Path Integration. *Applied Mathematics and Computation*, **172**, 1212-1224. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.03.018>
- [4] Iwankiewica, R. and Nielsen, S.R.K. (1996) Dynamic Response of Nonlinear Systems to Renewal Impulses by Path Integration. *Journal of Sound and Vibration*, **195**, 175-193. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0415>
- [5] Kumar, P. and Narayanan, S. (2006) Solution of Fokker Planck Equation by Finite Element and Finite Difference Methods for Nonlinear Systems. *Sadhana*, **31**, 445-461. <https://doi.org/10.1007/BF02716786>
- [6] Zorzano, M.P., Mais, H. and Vazquez, L. (1999) Numerical Solution of Two Dimensional Fokker Planck Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **98**, 109-117. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(97\)10161-8](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(97)10161-8)
- [7] 黄志龙, 张丽强. 用差分法与超松弛迭代法求高维平稳 FPK 方程的解[J]. 计算力学学报, 2008, 25(2): 177-182.

-
- [8] 崔杰, 孙鹏, 吴杰, 姜文安. 随机与谐和激励联合作用下非线性系统的有限差分解[J]. 江西科学, 2019, 37(1): 5-16.
- [9] 孙鹏, 刘建华, 姜文安, 吴杰. 二阶 FPK 方程的概率密度演化分析[J]. 江西科学, 2018, 36(5): 709-715, 736.
- [10] Er, G.K. (2000) Exponential Closure Method for Some Randomly Excited Nonlinear Systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **35**, 69-78. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00088-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00088-2)
- [11] Er, G.K. (1998) Multi-Gaussian Closure Method for Randomly Excited Non-Linear Systems. *Non-Linear Mechanics*, **33**, 201-214. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(97\)00018-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(97)00018-8)
- [12] Er, G.K. (1998) An Improved Closure Method for Analysis of Nonlinear Stochastic Systems. *Nonlinear Dynamics*, **17**, 285-297. <https://doi.org/10.1023/A:1008346204836>
- [13] Rong, H.W., Wang, X.D., Meng, G., Xu, W. and Fang, T. (2003) Approximation Closure Method of FPK Equations. *Journal of Sound and Vibration*, **266**, 919-925. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00091-9](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00091-9)
- [14] Dimentberg, M.F. (1982) An Exact Solution to a Certain Nonlinear Random Vibration Problem. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **17**, 231-236. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(82\)90023-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(82)90023-3)
- [15] 戎海武, 孟光, 王向东, 徐伟, 方同. FPK 方程的近似闭合解[J]. 应用力学学报, 2003, 20(3): 95-98.
- [16] 朱伟秋, 蔡国强. 随机动力学引论[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [17] Higham, D.J. (2001) An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review, Education Section*, **43**, 525-546. <https://doi.org/10.1137/S0036144500378302>