Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(8), 1346-1350
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.98159

Strict Neighbor-Distinguishing Total Coloring of Subcubic Graphs

Hanquan Liu, Jing Gu

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 490339417@qq.com

Received: Aug. 3rd, 2020; accepted: Aug. 19th, 2020; published: Aug. 26th, 2020

Abstract

A proper total k-coloring of a graph G is a mapping $\varphi: V(G)\cup E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$, such that any two adjacent or incident elements in $V(G)\cup E(G)$ receive different colors. Let $C_\varphi(v)$ be the set of colors assigned to a vertex v and those edges incident to v. φ is strict neighbor-distinguishing if $|C_\varphi(u)\setminus C_\varphi(v)|\ge 1$ and $|C_\varphi(v)\setminus C_\varphi(u)|\ge 1$ for each edge $uv\in E(G)$. The strict neighbor-distinguishing total index, denoted by $\chi_{snt}(G)$, of G is the minimum integer k such that G is k-strict neighbor-distinguishing total colorable. In this paper, we prove that every subcubic graph G has $\chi_{snt}(G)\le 6$.

Keywords

Strict Neighbor-Distinguishing Total Coloring, Strict Neighbor-Distinguishing Total Index, Subcubic Graphs

子立方图的严格邻点可区别全染色

刘含荃，顾　静

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江　金华
Email: 490339417@qq.com

收稿日期：2020年8月3日；录用日期：2020年8月19日；发布日期：2020年8月26日

摘　要

图G的一个正常k-全染色是指一个映射$\varphi: V(G)\cup E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$，使得$V(G)\cup E(G)$中任意两个相

文章引用: 刘含荃, 顾静. 子立方图的严格邻点可区别全染色[J]. 应用数学进展, 2020, 9(8): 1346-1350.
DOI: 10.12677/aam.2020.98159

邻的或相关联的元素染不同颜色。令$C_\varphi(v)$表示点v的颜色与v的关联边的颜色组成的集合。如果满足对任意一条边$uv \in E(G)$都有$\left|C_\varphi(u)\setminus C_\varphi(v)\right| \ge 1$和$\left|C_\varphi(v)\setminus C_\varphi(u)\right| \ge 1$，则称$\varphi$是$k$-严格邻点可区别的。图$G$的严格邻点可区别全色数是使$G$是$k$-严格邻点可区别全可染的最小正整数$k$，用$\chi_{snt}(G)$表示。本文证明了每个子立方图满足$\chi_{snt}(G) \le 6$。

关键词

严格邻点可区别全染色，严格邻点可区别全色数，子立方图

1. 引言

本文只考虑有限简单图，设 G 是一个点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$的图，它的最大度, 最小度分别为 $\Delta(G)$，$\delta(G)$。当点 v 的度是 k 时，称为 k-点。令 $N_G(v)$代表与 v 相邻的点集。很容易得到对简单图 G 中的任一点 v，有 $d_G(v)=\left|N_G(v)\right|$。在不会混淆的情况下，$\Delta(G)$，$\delta(G)$，$d_G(v)$和 $N_G(v)$分别可以写成 Δ，δ，$d(v)$和 $N(v)$。令 P_n 和 C_n 分别表示阶为 n 的路和阶为 n 的圈。如果图 G 的每个点的度都是一个固定的常数 k，则称 G 是 k-正则的。一个图 G 如果是 3-正则的，则称为立方图；如果满足 $\Delta(G) \le 3$，则称为子立方图。图 G 如果满足 $\delta(G) \ge 2$，则称 G 为正常的。

图 G 的一个正常 k-全染色是指一个映射 $\varphi: V(G)\cup E(G) \to \{1,2,\cdots,k\}$，使得对任意两个相邻的或相关联的元素 $z_1, z_2 \in V(G)\cup E(G)$，有 $\varphi(z_1) \ne \varphi(z_2)$。设 $C_\varphi(v)=\{\varphi(v)\}\cup\{\varphi(e): e\in E_G(v)\}$。如果对任意一对相邻的点 u 和 v，有 $C_\varphi(u)\ne C_\varphi(v)$，我们把 φ 称为邻点可区别的。图 G 的邻点可区别全色数 $X_{at}(G)$是使 G 有一个 k-邻点可区别全染色的最小正整数 k。此外，如果对任意一对相邻的点 u 和 V，有 $\left|C_\varphi(u)\setminus C_\varphi(v)\right| \ge 1$ 和 $\left|C_\varphi(v)\setminus C_\varphi(u)\right| \ge 1$，我们称 φ 为严格邻点可区别的。图 G 的严格邻点可区别全色数 $\chi_{at}(G)$是使 G 有一个 k-严格邻点可区别全染色的最小正整数 k。

2005 年，张忠辅等人在[1]中首先给出了图的邻点可区别全染色的概念，并且对圈、完全图、完全二部图、扇、轮图和树的邻点可区别全染色展开研究，确定了它们的邻点可区别全色数，并根据特殊图的邻点可区别全色数提出了如下猜想：

猜想 1 [1]对于阶不少于 2 的简单连通图 G，有 $\chi_{at}(G) \le \Delta(G)+3$。

如果猜想 1 成立，则这个上界是紧的。例如，对于任意正整数 $t \ge 1$，有 $\chi_{at}(K_{2t+1}) = 2t+1+2 = \Delta(K_{2t+1})+3$。Chen 和 Wang 分别在[2]和[3] [4]中证明了 $\Delta=3$ 的连通图满足猜想 1。奇数阶的完全图的邻点可区别全色数可以达到猜想 1 的上界，由于奇数阶的完全图的最大度为偶数，但是对于 $\Delta=3$ 的连通图，上界 6 是否是紧的这一问题至今仍未解决。Papaioannou 和 Raftopoulou 在[5]中从算法的角度证明了所有的 4-正则图 G，有 $\chi_{at}(G) \le 7$，是满足猜想 1 的。Lu 等人在[6]中运用组合零点定理证明了所有 $\Delta=4$ 的连通图 G，有 $\chi_{at}(G) \le 7$，是满足猜想 1 的。Huang，Wang 和 Yan 在[7]中把 $\Delta \ge 3$ 的图的邻点可区别全色数的上界改进到 $2\Delta(G)$。

严格邻点可区别全染色(被命名为 Smarandachely 邻点可区别全染色)有及以下猜想。

猜想 2 对于阶不小于 2 的简单连通图 G，有 $\chi_{snt}(G) \le \Delta(G)+3$。

2009 年，梁少卫在[8]中证明了 $k \ge 2$ 的 k-正则偶图和 k-方体图 Q_k，满足猜想 2。2011 年，卫斌等人

在[9]中证明了圈的平方图，满足猜想 2。文献[10] [11] [12] [13]中给出了若干类的 3-正则图的严格邻点可区别全色数均为 5，满足猜想 2。2015 年，陈妹君等人在[14]中研究了 Mycielski 图的严格邻点可区别全色数满足猜想 2。2019 年，李春梅等人在[15]证明了 $\Delta \le 3$ 的 2-连通外平面图满足猜想 2。

2. 主要结果

在展示主要结果前，我们先建立一些有用的观察。首先，根据定义，以下式子显然成立。

引理 1 [2]如果图 G 是一个 $\Delta = 3$ 的图，则 G 有一个 6-邻点可区别全染色。

引理 2 对 $r \ge 2$，每个 r-正则图 G 满足 $\chi_{snt}(G) = \chi_{at}(G)$。

结合引理 1 和 2，我们得到以下事实：

引理 3 如果图 G 是一个 3-正则图，则 $\chi_{snt}(G) \le 6$。

引理 4 对一个阶为 n 的圈 C_n，有 $\chi_{snt}(G) = 4$。

引理 5 对 $P_n(n \ge 2)$，有 $\chi_{snt}(P_n) = 4$。

证明：设 $P_n = v_1 v_2 \cdots v_n, n \ge 2$，连接 v_1 和 v_n 得到一个圈 C_n。设 $C = \{1,2,3,4\}$ 是一个颜色集合。由引理 4，C_n 有一个 4-严格邻点可区别全染色 φ。除了点 v_1 和 v_n，用与 C_n 相同的颜色染 P_n 中的点和边，设 $\alpha \in C \setminus C_\varphi(v_2)$，$\beta \in C \setminus C_\varphi(v_{n-1})$，用 α 染点 v_1，用 β 染点 v_n。 □

定理 1 如果图 G 是一个正常的子立方图，则 $\chi_{snt}(G) \le 6$。

证明：我们用反证法证明。设 $C = \{1,2,\cdots,6\}$ 是一个颜色集合。假设图 G 是一个边数 $|E(G)|$ 最小的极小反例。如果 $|E(G)| \le 6$，则定理成立，因为足以给每条边分配不同的颜色。所以假设 G 是一个 $\Delta \le 3$，$|E(G)| \ge 7$ 的图，且 G 无法用 C 中的颜色染好。

如果 $\Delta = 2$，G 是一个圈或一条路，由引理 4 和引理 5，有 $\chi_{snt}(G) \le 6$。所以假设 $\Delta = 3$。为了完成证明，我们需要构造以下一系列的断言。在断言的证明中，我们用 $C(v)$代替 $C_\varphi(v)$。

断言 1 G 不包含 1-点。

证明：反之，G 包含一个 1-点 v。设点 u 是 v 的邻点。如果 $d(u) = 2$，设 $N(u) = \{v, u_1\}$；如果 $d(u) = 3$，设 $N(u) = \{v, u_1, u_2\}$。令 $H = G - v$，则 H 是一个 $|E(H)| < |E(G)|$ 且 $\Delta(H) \le \Delta(G)$ 的图。所以 H 存在一个 6-严格邻点可区别全染色 φ，其所用颜色集合为 C。

对 $i \in \{1,2\}$，如果 $|C(u_i) \setminus C(u)| = 1$，取 $a_i \in C(u_i) \setminus C(u)$。令 $\alpha \in C \setminus C(u) \cup \{a_1, a_2\}$，用 α 染边 uv。令 $\beta \in C \setminus C(u) \cup \{\alpha\}$，用 β 染点 v。断言 1 的证明完成。 □

断言 2 G 不包含相邻 2-点。

证明：反之，G 包含两个相邻 2-点 u 和 v。设 $N(u) = \{v, u_1\}$，$N(v) = \{u, v_1\}$。令 $H = G - uv$，则 H 是一个 $|E(H)| < |E(G)|$ 且 $\Delta(H) = \Delta(G) = 3$ 的图。所以 H 存在一个 6-严格邻点可区别全染色 φ，其所用颜色集合为 C。

先假设 $C(u) = C(v)$。已知 $|C(v_1) \cup C(v)| \le 5$，令 $\alpha \in C \setminus C(v_1) \cup C(v)$，用 α 改染点 v。令 $\beta \in C \setminus C(u) \cup \{a\}$，用 β 染边 uv。因此 $C(u) \ne C(v)$。如果 $\varphi(u) = \varphi(v)$，令 $\alpha \in C \setminus C(v_1) \cup C(v)$，用 α 改染点 v。令 $\beta \in C \setminus C(u) \cup \{\alpha, \varphi(vv_1)\}$，用 β 染边 uv。如果 $\varphi(u) \ne \varphi(v)$，令 $\beta \in C \setminus C(u) \cup C(v)$，用 β 染边 uv。断言 2 的证明完成。 □

断言 3 G 中的 3-点不与 3 个 2-点相邻。

证明：反之，v 是 G 中的 3-点，$N(v) = \{u, x, y\}$ 且 $d(u) = d(x) = d(y) = 2$。由断言 2，u，x，y 两两不相邻。令 $H = G - v$，则 H 是一个 $|E(H)| < |E(G)|$ 的图。所以 H 存在一个 6-严格邻点可区别全染色 φ，其所用颜色集合为 C。

情形 1. $|C(u) \cup C(x) \cup C(y)| < 6$。

令$\alpha \in C \setminus C(u) \cup C(x) \cup C(y)$，用 α 染点 v。集合 $C\setminus\{\alpha\}$中必定存在一个在 $C(u)$，$C(x)$，$C(y)$中至多用了一次的颜色，不妨设为 1。

如果$1 \notin C(u) \cup C(x) \cup C(y)$，用 1 染边 uv。令$\beta_1 \in C \setminus C(x) \cup \{1,\alpha\}$，用 β_1 染边 vx。当$\beta_1 \notin C(u)$，因为$|C(y) \cup \{1,\alpha,\beta_1\}| \le 5$，令$\beta_2 \in C \setminus C(y) \cup \{1,\alpha,\beta_1\}$，用 β_2 染边 vy。当$\beta_1 \in C(u)$，删去边 uv 的颜色，用 1 染边 vy。设$C'(v) = \{1,\alpha,\beta_1\}$，$C'(y) = C(y) \cup \{1\}$。如果$|C'(y) \setminus C'(v)| = 1$，取$a_1 \in C'(y) \setminus C'(v)$，因为$|C(u) \cup \{1,\alpha,a_1\}| \le 5$，令$\beta_2 \in C \setminus C(u) \cup \{1,\alpha,a_1\}$，用 β_2 染边 uv。

如果$1 \in C(u)$（或 $C(x)$，或 $C(y)$），假设$C(u) = \{1,2\}$。用 1 染边 vx，因为$|C(y) \cup \{1,2,\alpha\}| \le 5$，令$\beta_1 \in C \setminus C(y) \cup \{1,2,\alpha\}$，用 β_1 染边 vy。设$C'(v) = \{1,\alpha,\beta_1\}$，$C'(x) = C(x) \cup \{1\}$。如果$|C'(x) \setminus C'(v)| = 1$，取$a_2 \in C'(x) \setminus C'(v)$，因为$|C(u) \cup \{\beta_1,\alpha,a_2\}| \le 5$，令$\beta_2 \in C \setminus C(u) \cup \{\beta_1,\alpha,a_2\}$，用 β_2 染边 uv。

情形 2. $|C(u) \cup C(x) \cup C(y)| = 6$。

设$N(u) = \{v,u_1\}$，则$d(u_1) = 3$。因为$|C(u_1) \cup C(u)| \le 5$，令$\alpha \in C \setminus C(u_1) \cup C(u)$，用 α 改染点 u。此时$C(u) \cup C(x) \cup C(y) \ne C$，根据情形 1，$G$ 有一个 6-严格邻点可区别全染色。

断言 3 的证明完成。 □

断言 4 G 中 2-点不与 3-点相邻。

证明：反之，G 包含相邻的 3-点 u 和 2-点 v，设$N(v) = \{u,w\}$，因此 w 是一个 3-点。设$N(u) = \{v,u_1,u_2\}$，$N(w) = \{v,w_1,w_2\}$。u_1，u_2，w_1，w_2 是 2-点或 3-点。由断言 3，u_1 或 u_2 是 3-点，w_1 或 w_2 是 3-点。不妨设$d(u_2) = 3$，$d(w_2) = 3$。令$H = G - v$，则 H 是一个$|E(H)| < |E(G)|$的图。所以 H 存在一个 6-严格邻点可区别全染色 φ，其所用颜色集合为 C。如果$|C(u_1) \setminus C(u)| = 1$，取$a \in C(u_1) \setminus C(u)$。如果$|C(w_1) \setminus C(w)| = 1$，取$b \in C(w_1) \setminus C(w)$。设$C(u) = \{1,2,3\}$。

情形 1. $|C(u) \cap C(w)| = 3$。

设$\alpha_1 \in C \setminus \{1,2,3,a\}$，用 α_1 染边 uv。设$\alpha_2 \in C \setminus \{1,2,3,\alpha_1,b\}$，用 α_2 染边 vw。设$\alpha_3 \in C \setminus \{\alpha_1,\alpha_2,\varphi(u),\varphi(w)\}$，用 α_3 染点 v。

情形 2. $|C(u) \cap C(w)| = 2$。

不妨设$C(w) = \{1,2,4\}$。令$\alpha_1 \in C \setminus \{1,2,3,4,a\}$，$\alpha_2 \in C \setminus \{1,2,4,\alpha_1,b\}$，用 α_1 染边 uv，α_2 染边 vw。如果$\alpha_2 = 3$，令$\alpha_3 \in C \setminus \{1,2,3,\alpha_1,\varphi(w)\}$，用 α_3 染点 v。如果$\alpha_2 \ne 3$，令$\alpha_3 \in C \setminus \{\alpha_1,\alpha_2,\varphi(u),\varphi(w)\}$，用 α_3 染点 v。

情形 3. $|C(u) \cap C(w)| = 1$。

不妨设$C(w) = \{1,4,5\}$。令$\alpha_1 \in \{4,5\} \setminus \{a\}$，$\alpha_2 \in \{2,3\} \setminus \{b\}$，用 α_1 染边 uv，α_2 染边 vw，6 染点 v。

情形 4. $|C(u) \cap C(w)| = 0$。

不妨设$C(w) = \{4,5,6\}$，$\varphi(w) = 4$。删去点 w 的颜色，用 4 染边 vw。当$\varphi(w_1) \notin C(w)$时，取$b' = \varphi(w_1)$。当$\varphi(w_1) \in C(w)$时，取$b' \in C(w_1) \setminus C(w)$。令$\alpha_1 \in C \setminus \{4,5,6,b',\varphi(w_2)\}$，用 α_1 染点 w。显然，$\alpha_1 \in \{1,2,3\}$。令$\alpha_2 \in \{5,6\} \setminus \{a\}$，$\alpha_3 \in C \setminus \{4,5,6,\alpha_1,\varphi(u)\}$，用 α_2 染边 uv，α_3 染点 v。

断言 4 的证明完成。 □

由断言 1-4 得 G 是 3-正则的。但是根据引理 3，G 有一个 6-严格邻点可区别全染色的，矛盾。 □

参考文献

[1] Zhang, Z., Chen, X., Li, J., Yao, B., Lu, X. and Wang, J. (2005) On Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs. *Science in China Series A*, **48**, 289-299. https://doi.org/10.1360/03YS0207

[2] Chen, X. (2008) On the Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Numbers of Graphs with $\Delta = 3$. *Discrete Mathematics*, **308**, 4003-4007. https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.07.091

[3] Wang, H. (2007) On the Adjacent Vertex-Distinguishing Total Chromatic Numbers of the Graphs with $\Delta(G) = 3$.

Journal of Combinatorial Optimization, **14**, 87-109. https://doi.org/10.1007/s10878-006-9038-0

[4] Hulgan, J. (2009) Concise Proofs for Adjacent Vertex-Distinguishing Total Colorings. *Discrete Mathematics*, **309**, 2548-2550. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.06.002

[5] Papaioannou, A. and Raftopoulou, C. (2014) On the AVDTC of 4-Regular Graphs. *Discrete Mathematics*, **330**, 20-40. https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.03.019

[6] Lu, Y., Li, J., Luo, R. and Miao, Z. (2017) Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring of Graphs with Maximum Degree 4. *Discrete Mathematics*, **340**, 119-123. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.07.011

[7] Huang, D., Wang, W. and Yan, C. (2012) A Note on the Adjacent Vertex Distinguishing Total Chromatic Number of Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 3544-3546. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.08.006

[8] 梁少卫. k-方体图的 Smarandachely 邻点全染色[J]. 唐山学院学报, 2009, 22(3): 6-7.

[9] 卫斌, 朱恩强, 文飞, 徐文辉. 圈的平方图的 Smarandachely 邻点全色数[J]. 惠州学院学报(自然科学版), 2011, 31(6): 13-15.

[10] Li, J., Wang, Z., Wen, F. and Zhang, Z. (2010) The Smarandachely Adjacent-Vertex Distinguishing Total Coloring of Two Kind of 3-Regular Graphs. *3rd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics*, Yantai, 16-18 October 2010, 3004-3006. https://doi.org/10.1109/BMEI.2010.5639827

[11] 时亭亭, 强会英, 文飞. 广义拟 Thomassen 图的 Smarandachely 邻点全色数[J]. 兰州交通大学学报, 2010, 29(4): 147-149.

[12] Wang, Z., Lee, J., Li, J. and Wen, F. (2011) The Smarandachely Adjacent Vertex Total Coloring of a Kind of 3-Regular Graph. *Ars Combinatoria*, **99**, 45-53.

[13] 李沐春, 王立丽, 张伟东, 凌昭昭. 若干类 3-正则图的 Smarandachely 邻点全染色的界[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2014, 47(6): 79-84.

[14] 陈妹君, 田双亮. 两类运算图的 Smarandachely 邻点可区别全染色[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2015, 33(1): 73-75.

[15] 李春梅, 王治文. $\Delta(G)\le 3$ 的 2-连通外平面图的 Smarandachely 邻点可区别全色数[J]. 大学数学, 2019, 35(3): 1-4.