Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(4), 858-864**
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104093

级数理论的实际应用初探

陈诗宇，晋子钰，沈　洁

辽宁师范大学，辽宁　大连
Email: 1658852333@qq.com, 3250648571@qq.com

收稿日期：2021年3月12日；录用日期：2021年4月1日；发布日期：2021年4月15日

摘　要

级数的出现源于生产实际，反之级数也在实际中存在巨大的应用空间。本文探究了级数在数学和其他领域的应用，首先利用级数理论将复杂的求极限、近似计算等问题转化为简单的级数问题。其次，重点研究了级数在生物领域的应用，探讨级数在预测新冠肺炎确诊病例数问题中的应用，并利用麦克劳林级数提出一种新的生物节律估算方法。

关键词

级数，极限，近似计算，定积分，生物节律

A Preliminary Study on the Practical Applications of Series Theory

Shiyu Chen, Ziyu Jin, Jie Shen

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 1658852333@qq.com, 3250648571@qq.com

Received: Mar. 12th, 2021; accepted: Apr. 1st, 2021; published: Apr. 15th, 2021

Abstract

The emergence of series comes from the actual production, and conversely, series also has a huge application space in practice. This paper explores the applications of series in mathematics and other fields. Firstly, the problems of complex limit calculations and approximate calculations are transformed into simple series problems by using series theory. Secondly, it focuses on the appli-

文章引用: 陈诗宇, 晋子钰, 沈洁. 级数理论的实际应用初探[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 858-864.
DOI: 10.12677/aam.2021.104093

cations of series in the field of biology, discusses the application of series in predicting the number of confirmed cases of COVID-19, and puts forward a new method for estimating biorhythm by using McLaughlin series.

Keywords

Series, Limit, Approximate Calculation, Definite Integral, Biorhythm

1. 引言

级数不仅在理论层面上结构完整，结论较为成熟，而且在众多其他领域，如经济、医疗、航空航天等方面具有应用广泛。许宏文[1]曾利用级数计算极限，而杨京开老师和陈秀红[2]则提出了用级数解决近似问题的多种方法。此外，吴自库[3]具体阐述了无理数的级数计算方法。本文对级数在数学领域的几类应用展开深入探究，并进一步讨论了级数在生物领域的实际应用，以期达到将理论运用到实践。

2. 预备知识

级数是对一个数列的各项依次用“+”号连接起来的表达式。级数不仅在数学领域有重要应用，还在医学、经济、物理、航空航天等领域有实际应用价值。

定义 1 [4]给定一个数列$\{u_n\}$，对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

称为常数项无穷级数或数项级数(也常简称级数)，其中u_n称为数项级数(1)的通项或一般项。

定理 1 [4]若级数(1)收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

定理 2 [4] (比式判别法的极限形式)若$\sum u_n$为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$，则

1) 当$q<1$时，级数$\sum u_n$收敛；

2) 当$q>1$或$q=+\infty$时，级数$\sum u_n$发散。

定义 2 [4]如果f能在点x_0的某邻域内等于其泰勒级数的和函数，则称函数f在点x_0的这一邻域内可以展开成泰勒级数，并称等式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^n+\cdots$$

的右边为f在x_0处的泰勒展开式，或称幂级数展开式。

定义 3 [4]称函数f在$x_0=0$处的展开式，即，

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{2!}x^n+\cdots,$$

为f的麦克劳林级数。

3. 级数在数学领域中的应用

级数作为数学分析中的一个重要分支，是研究函数的一个重要工具，在数学领域中有诸多应用。下面具体说明级数在求极限、近似计算、积分计算等方面的应用。

3.1. 在求极限中的应用

极限的重要性毋庸置疑，求极限往往是解决数学问题不可或缺的一个步骤。求极限的方法有很多，例如定义法、洛必达法则、归结原则、利用重要极限求极限等。但对于某些极限问题利用这上述方法进行求解仍然存在很大困难，此时级数理论就可以作为我们求相关极限的一个重要选择。

求数列极限的时候，可以将数列的通项看成是某一级数的一般项，若根据某些判别法可以证明级数是收敛的，则由级数收敛的必要条件就可以得出该数列的极限为零。对通项中含有类似$n!$项、n 项的数列(特别是证明数列极限为零的题目)，可采用这种方法进行求解。

例 1 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2021^{\ln n}}{2^{n!}}=0$。

证明：设$u_n=\dfrac{2021^{\ln n}}{2^{n!}}$，考察正项级数$\sum u_n$的敛散性。因为$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2021^{\ln n+1}}{2^{(n+1)!}}\cdot\dfrac{2^{n!}}{2021^{\ln n}}=\dfrac{2021^{\ln\frac{n+1}{n}}}{2^{n\cdot n!}}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$，由比式判别法知级数$\sum\dfrac{2021^{\ln n}}{2^{n!}}$收敛。由级数收敛的必要条件知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2021^{\ln n}}{2^{n!}}=0$。

另外，面对极限中出现的形式比较复杂的函数，可以考虑将展开成幂级数，这样往往能消掉一部分表达式，使计算化繁为简。

例 2 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\ln(1+x)-\arctan x}$。

解：这是一个$\dfrac{0}{0}$型的不定式极限，用洛必达法计算不仅计算量大， 而且十分困难，因此我们想到将$\cos x$， $\ln(1+x)$和$\arctan x$用幂级数展开。因为$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$， $\ln(1+x)=x+o(x)$，$\arctan x=x+o(x)$，故所求极限为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x(x+o(x))-(x+o(x))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}-o(x^2)}{x^2-x+x\cdot o(x)-o(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x-1}=0$。

3.2. 在近似计算中的应用

函数值的近似计算问题在实际生活中应用广泛，而在不同的问题背景下，近似计算往往要求不同的精确度。我们考虑利用幂级数或傅里叶级数展开式，在其收敛区间上进行近似计算，通过选取适当的展开项数来达到计算精度要求。

例 3 计算$\sin 2$的近似值，精确到 0.001。

解： $\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上可以展开为麦克劳林级数

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty). \tag{3}$$

将$x=2$代入(3)式得， $\sin 2=2-\dfrac{2^3}{3!}+\dfrac{2^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$。余项

$$
\begin{aligned}
R_n &= (-1)^{n+2}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+3}\frac{2^{2n+3}}{(2n+3)!}+(-1)^{n+4}\frac{2^{2n+5}}{(2n+5)!}+\cdots \\
&= 2^{2n+1}\left[(-1)^{n+2}\frac{1}{(2n+1)!}+(-1)^{n+3}\frac{2^2}{(2n+3)!}+(-1)^{n+4}\frac{2^4}{(2n+5)!}+\cdots\right] \\
&< 2^{2n+1}\left[\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{2^2}{(2n+3)!}+\frac{2^4}{(2n+5)!}+\cdots\right] \\
&< \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(1+2^2+2^4+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

取 $n=5$，则有 $0<|R_5|=\frac{1023}{1871100}<0.001$，故 $\sin 2=2-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}-\frac{2^7}{7!}+\frac{2^9}{9!}=0.909$。

3.3. 在积分计算中的应用

牛顿–莱布尼茨公式将定积分和不定积分联系起来，为定积分的计算提供了一个行之有效的计算方法，但在实际计算中我们发现很多被积函数的原函数是非常难求的，甚至是无法求出的。这时我们就考虑利用被积函数的幂级数展开式来计算定积分。

例 4 计算 $\int_0^1 \ln(1-x)^2 \mathrm{d}x$。

解：因为 $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，考察正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，由比式判别法，$R=\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，可得幂级数(4)的收敛区间为 $(-1,1)$，故

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1-x)^2\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = -2\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\mathrm{d}x \\
&= -2\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x+\cdots+\int_0^1\frac{x^n}{n}\mathrm{d}x\right] \\
&= -2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right) \\
&= -2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-2
\end{aligned}
$$

4. 级数在生物领域的应用

级数的出现实际上就是源于生产实践，反过来，级数也在实际中存在巨大的潜在应用空间。下面通过两个实际问题探讨几何级数和幂级数在生物领域中的应用。

4.1. 在新冠肺炎疫情中的应用

2020 年 3 月，新冠肺炎在美国爆发，为了研究疫情扩散速度及特点，人们统计了疫情爆发初期的 20 天(2020 年 3 月 6 日~2020 年 3 月 25 日)的确诊病例数[5]，将这些数据作为样本绘制出图 1 中的散点图。横轴代表日期，纵轴代表确诊病例数。不难看出，新冠肺炎确诊人数增长趋势大致呈“J”型曲线[6]。因此我们猜测，确诊病例数每天以一定的倍数增长，不妨将这个倍数设为 q，即，第二天的病例数是第一天的 q 倍。再进一步假设第 $n+1$ 天的确诊病例数为 a_n，则有 $a_n=a_0\cdot q^n$，其中 $a_0=319$，表示第一天，即 3 月 6 日的确诊病例数。从第二天起，将每一天的确诊病例数与前一天的比记为 $q_t\,(t=1,2,\cdots,19)$，根

据公式 $q=\frac{1}{19}\sum_{t=1}^{19}q_t$ 粗略算出 $q=1.33$。图 1 中，根据 20 天的确诊病例数绘制出的散点图与曲线 $y=319\cdot1.33^x$ 的图像大致拟合。故可推断美国新冠疫情爆发初期呈“J”型曲线增长，符合几何级数的规律。假设人们不对病毒进行防御，那么新冠确诊人数将会以几何级数的形式增长，这将会给美国带来经济损失、社会动荡、政治混乱等负面影响。截止 2020 年 4 月 4 日，美国新冠肺炎累计确诊 31,794 例，按照我们的几何级数预测模型，计算结果为 1,193,348 例。这表明对疫情采取的防控措施是必要的，但美国的疫情形势依然严峻。反观之，我国作为世界上首个面临新冠疫情挑战的国家，通过采取强有力的防御和救治措施，抗疫已取得重大阶段性胜利，这得益于以习近平同志为核心的党中央的坚强领导和中国特色社会主义制度的优越性。

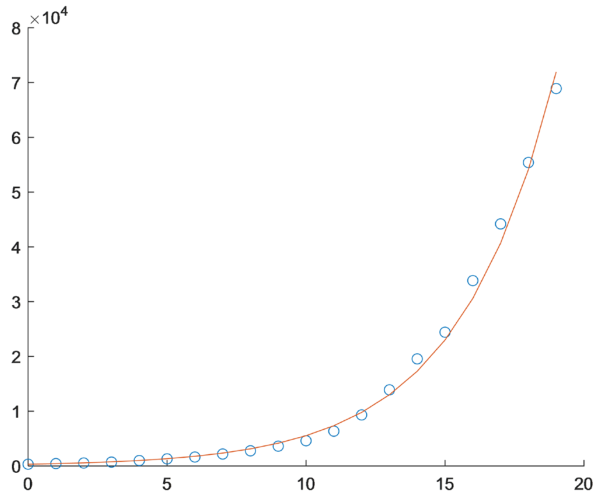

Figure 1. Curve: the number of confirmed cases in the first 20 days of the outbreak of COVID-19 in the United States
图 1. 美国新冠疫情爆发初期 20 天的确诊病例数曲线

以上是使用等比级数预测新冠肺炎得到的结果，从长期角度来看，使用传统 SEIR 传染病模型(如图 2)得到的预测结果会更加准确。SEIR 传染病模型适用于存在易感者(S)、潜伏者(E)、感染者(I)和康复者(R)这四类人群，是通过单位时间内的接触人数，利用易感者被潜伏者感染的概率，潜伏者转化为感染者的概率等相关系数，基于微分方程组建立的预测传染病病情的模型，见图 2 [7]。

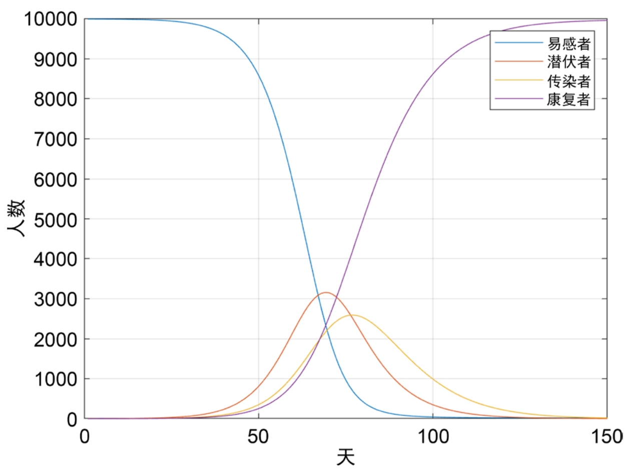

Figure 2. Effect picture of traditional SEIR epidemic model
图 2. 传统 SEIR 传染病模型效果图

4.2. 在生物节律中的应用

生物节律(PSI)是指人体受自然环境周期性变化影响所产生的体力节律、情绪节律和智力节律。经长期临床观察，人们发现从出生之日开始，人体的体力、情绪和智力呈正弦曲线变化，变化周期分别为23天、28 天和 33 天，而每个周期又分为高潮期、临界期、低潮期三个阶段，三个阶段人体的行为表现各有不同。因此，根据生物节律准确的时间性，人们可以利用数学公式计算出人在任何一天的利害情况，从而将结果作为安排工作和生活的参考，如体力高潮期，人会具有体力充沛、不易生病等特征；情绪临界期会出现易出差错、情绪低落等现象[8]。

在日常生活中，一个人如果想简单了解目前自己的体力、情绪和智力处于什么阶段，常常采用半周期法[9]，这种估测方法操作简单，使用最为普遍，但由于该方法只能对测算日当天的状态做出判断，而人的体力、情绪和智力情况往往受较多偶然因素的干扰而发生波动，所以这种估测方法具有一定的误差且无法知晓人体“PSI”对人的行为表现的影响程度到底有多深。因此，我们考虑利用幂级数对人体生物节律预估计算公式进行改进，用正弦函数代表人体的体力、情绪和智力的变化情况，并用麦克劳林级数作为估算的工具，由级数相关理论可知估算误差为$o\left(x^n\right)$。

设 t 为从出生日到测算日经历的总天数，x 为 t 除以 23 的余数，y 为 t 除以 28 的余数，z 为 t 除以 33 的余数。由于正弦函数$\sin t$ 在$(-\infty,+\infty)$的麦克劳林级数为

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,\ t\in(-\infty,+\infty).$$

则体力变化函数为

$$\sin\frac{2\pi}{23}x=\frac{2\pi}{23}x-\frac{\left(\frac{2\pi}{23}x\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{2\pi}{23}x\right)^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{2\pi}{23}x\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,\ x\in(0,22). \tag{4}$$

情绪变化函数为

$$\sin\frac{\pi}{14}y=\frac{\pi}{14}y-\frac{\left(\frac{\pi}{14}y\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{\pi}{14}y\right)^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{\pi}{14}y\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,\ y\in(0,27). \tag{5}$$

智力变化函数为

$$\sin\frac{2\pi}{33}z=\frac{2\pi}{33}z-\frac{\left(\frac{2\pi}{33}z\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{2\pi}{33}z\right)^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{2\pi}{33}z\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,\ z\in(0,32). \tag{6}$$

这里我们默认人体出生时的体力、情绪和智力节律皆处于周期日，并即将进入高潮期。将具体的 x, y, z 取值代入(4)、(5)、(6)式可得体力、情绪和智力变化函数的计算结果。在实际计算中可以根据精度要求决定取到等式右边第几项，项数越多，误差越小。当计算结果为正数时，相应的节律周期处于高潮期，且数值越大，人的行为表现越符合高潮期的特征。当计算结果为负数时，相应的节律周期处于低潮期，且绝对值越大，人的行为表现越符合低潮期的特征。当计算结果接近 0 时，相应的节律周期处于临界期，且数值越接近于 0，人的行为表现越符合临界期的特征。

某人甲 2002 年 11 月 1 日出生，想知道自己在 2021 年 3 月 19 日的体力、情绪、智力情况。经计算甲自出生之日起到预测日期一共活了 7007 天，此时 $x_0=15$，$y_0=7$，$z_0=11$。

就甲的体力情况而言，将 $x_0 = 15$ 代入(3)式，估算到右边第五项得到的结果约为−0.7。计算结果为负数且绝对值较大，故甲该日的体力处于低潮期，表现为体力较差，易于疲劳。

就甲的情绪情况而言，将 $y_0 = 7$ 代入(4)式，估算到右边第三项得到的结果约为 1.000004，计算结果为正数并取得最大值，故甲该日的情绪处于高潮期，行为表现为情绪高涨，积极向上。

就甲的智力情况而言，将 $z_0 = 11$ 代入(5)式，估算到右边第五项得到的结果约为 0.866。计算结果为正数且绝对值较大，故甲该日的智力处于高潮期，表现为思路敏捷，记忆力强。

综合考虑甲在 2021 年 3 月 19 日的体力、情绪、智力情况。我们建议甲在这一天不要从事体力劳动，注意身体健康状况，多从事用脑工作，比如：学习，科研等。当然，这里介绍的生物节律测算方法仅适用于日常的简单判断，如果需要更精确的测算结果，则需要对测算者进行一段时间的观察，通过大量统计数据建立周期模型。

参考文献

[1] 许宏文. 幂级数在函数值近似计算中的应用[J]. 牡丹江师范学院学报(自然科学版), 2003(1): 13-15.

[2] 杨京开, 陈秀红. 级数在求极限中的应用[J]. 玉林师范学院学报, 2014, 35(2): 31-34.

[3] 吴自库. π 的级数计算方法[J]. 科技信息(科学教研), 2008(15): 337.

[4] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[5] 必然(美国疫情峰值 3.58~5.78 万?) [Z/OL].http://blog.sina.com.cn/s/blog_5000f4c901030zbl.html, 2020-04-05.

[6] 谭鹃, 霍静. 数学模型在“种群数量的变化”一节中的应用[J]. 生物学通报, 2017, 52(1): 42-44.

[7] seir 模型_SEIR 模型到底是什么？五分钟带你理解并代码实现[Z/OL]. https://blog.csdn.net/weixin_39893274/article/details/111299056, 2020-12-08.

[8] 王洪斌. PSI、EQ 理论在高等教育教学中的应用研究[J]. 辽宁教育研究, 2005(4): 11-13.

[9] 姬祥, 薛景仰, 杨文明. 基于人体生物节律的人员警示研究[J]. 价值工程, 2018, 37(8): 228-230.