Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(6), 2151-2154**
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.106224

Hans汉斯

浅谈数学分析中构造辅助函数的方法

徐晓静

沈阳师范大学，辽宁 沈阳
Email: 1748691725@qq.com

收稿日期：2021年5月21日；录用日期：2021年6月9日；发布日期：2021年6月24日

摘 要

在数学分析中，构造辅助函数是一种极为重要的研究方法。要对辅助函数进行有效的使用，就要熟练的掌握一些相关定理的条件和结论，如罗尔中值定理、泰勒公式，罗马定理，积分第一中值定理等。基于以上定理在本文中我总结了一些特定类型的辅助函数的构造方法。

关键词

费马定理，罗尔中值定理，积分中值定理，辅助函数

On the Method of Constructing Auxiliary Function in Mathematical Analysis

Xiaojing Xu

Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning
Email: 1748691725@qq.com

Received: May 21st, 2021; accepted: Jun. 9th, 2021; published: Jun. 24th, 2021

Abstract

In mathematical analysis, the construction of auxiliary function is a very important research method. In order to make effective use of auxiliary functions, it is necessary to master the conditions and conclusions of some related theorems, such as Rolle's mean value theorem, Taylor's formula, Roman theorem, integral integral first mean value theorem, etc. Based on the above theorem in this paper I summarized some specific types of auxiliary function construction methods.

文章引用: 徐晓静. 浅谈数学分析中构造辅助函数的方法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(6): 2151-2154.
DOI: 10.12677/aam.2021.106224

Keywords

Fermat's Theorem, Rolle's Mean Value Theorem, Integral Mean Value Theorem, Auxiliary Function

1. 引言

在解题过程中，根据问题的条件结论的特点，通过学者的逆向分析，即根据结果推测一个辅助函数，构造出一个与问题有关的函数，通过对函数特征的考查达到解决问题的目的，这种解决问题的方法叫做构造函数[1]。

构造函数的方法十分丰富，在本篇文章中我主要针对常见的几种方法进行展开讨论构造函数的方法。

2. 预备知识[2]

定理一：零点定理

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$。

定理二：费马定理

若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f'(x_0)$ 存在。则有 $f'(x_0)=0$。

定理三：罗尔中值定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且 $f(a)=f(b)$，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

定理四：泰勒公式

若 $f(x)$ 在 x_0 存在 n 阶导数，则有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$。

定理五：积分第一中值定理

若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 不变号，则则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

3. 直接构造辅助函数

对于类型[1]是 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)$，可以构造辅助函数 $f(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}$；

因为 $\left\{f(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}\right\}'=\left[f'(x)+f(x)g(x)\right]\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}$。具体的常见的应用如下。

类型一： $mf(\xi)+nf'(\xi)$，构造辅助函数 $f(x)\mathrm{e}^{\int\frac{m}{n}\mathrm{d}x}$；

因为 $\left\{f(x)\mathrm{e}^{\int\frac{m}{n}\mathrm{d}x}\right\}'=\left\{f'(x)+f(x)\frac{m}{n}\right\}\mathrm{e}^{\frac{m}{n}x}=\frac{1}{n}\left[mf(x)+nf'(x)\right]\mathrm{e}^{\frac{m}{n}x}$。

类型二： $mf(\xi)+n\xi f'(\xi)$。构造辅助函数 $x^m f^n(x)$；

[1] 李扬数学分析强化讲义[Z]. 2021。

因为$\left[x^m f^n(x)\right]' = \left[mf(x)+nxf'(x)\right]x^{m-1}f^{n-1}(x)$。

类型三： $mf(\xi)+n\xi f'(\xi)$构造辅助函数$\dfrac{f^n(x)}{x^m}$或者$\dfrac{x^m}{f^n(x)}$；

因为$\left\{\dfrac{f^n(x)}{x^m}\right\}' = \dfrac{f^{n-1}(x)}{x^{m+1}}\left[nxf'(x)-mf(x)\right]$，$\left\{\dfrac{x^m}{f^n(x)}\right\}' = \dfrac{x^{m-1}}{f^{n+1}(x)}\left[mf(x)-nxf'(x)\right]$。

类型四： $nf'(\xi)f(1-\xi)-mf'(1-\xi)f(\xi)$，构造辅助函数$f^n(x)f^m(1-x)$；

因为：$\left\{f^n(x)f^m(1-x)\right\}' = \left[nf'(x)f(1-x)-mf'(1-x)f(x)\right]f^{n-1}(x)f^{m-1}(1-x)$。

类型五： $mf'(\xi)g(\xi)+nf(\xi)g'(\xi)$，构造辅助函数$f^m(x)g^n(x)$；

因为$\left\{f^m(x)g^n(x)\right\}' = \left[mf'(x)g(x)+nf(x)g'(x)\right]f^{m-1}(x)g^{n-1}(x)$。

类型六： $mf'(\xi)g(\xi)+nf(\xi)g'(\xi)$，构造辅助函数$\dfrac{f^m(x)}{g^n(x)}$；

因为$\left[\dfrac{f^m(x)}{g^n(x)}\right]' = \left[mf'(x)g(x)+nf(x)g'(x)\right]\dfrac{f^{m-1}(x)}{g^{n+1}(x)}$。

小结：

对于其它类型构造辅助函数的方法，我们可以设辅助函数为$F(x)$

第一步：将把题中要证明的结果中的ξ换成x；

第二步：将结论变形，转化为容易积分的形式，利用积分的方法，得出原函数所得的原函数就是我们要求的辅助函数。

例 1.1 [3]：$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$f(a)<0$，$f(b)<0$，同时存在$c\in(a,b)$，$f(c)>0$，使得$f(c)>0$，证明存在$\xi\in(a,b)$，满足$f(\xi)+f'(\xi)=0$。

解：构造函数$F(x)=\mathrm{e}^x$，可知$F(x)$为连续函数，由题中已知条件$F(a)<0$，$F(b)<0$，$F(c)>0=\mathrm{e}^x$，根据零点定理可知存在$\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。又因为罗尔中值定理存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得$F'(\xi)=0$，即$\left(f(\xi)+f'(\xi)\right)\mathrm{e}^{\xi}=0$，故$f(\xi)+f'(\xi)=0$。

例 1.2 [4]：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$，试证：对任意$\alpha\in R$，存在$\xi\in(a,b)$，$\alpha f(\xi)=f'(\xi)$。

解题思路：要证明$\alpha f(\xi)=f'(\xi)$，证明$\alpha f(\xi)-f'(\xi)=0$成立即可，因此设$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$，然后利用零点定理和罗尔中值定理定理可证明结论。

4. 利用不等式构造函数法[1]

构造函数使用最多的方法是利用作减法或作除法这两种方法，在解决数学问题时，对遇到的幂函数、指函数等，采用相关的取对数的方法进行辅助函数的构造，这样可以将问题进行有效的解决。

例题 2.1 [3]：设$0<x<y<1$或$1<x<y$，则有$\dfrac{y}{x}>\dfrac{y^x}{x^y}$

证明：欲证明上述不等式成立，即证明$x^{y-1}>y^{x-1}$，再取对数$\dfrac{y-1}{\ln y}>\dfrac{x-1}{\ln x}$，为此，令$f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$。

由于$x<y$，故只需证明$f(x)$为严格增函数即可。$f'(x)=\dfrac{\ln x-\dfrac{x-1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{x\ln x-(x-1)}{x\ln^2 x}$，在令$g(x)=x\ln x-(x-1)$，$g'(x)=\ln x+1-1=\ln x$，令$g'(x)=0$，解得$x=1$，$g''(x)=1$，故$g(x)$在 1 处取得

极小值，即 $g(x)=\ln x-(x-1)>0=g(1)$，所以 $f'(x)=\dfrac{x\ln x-(x-1)}{x\ln^2 x}>0$，即得证。

5. 利用积分方法构造函数

此种方法也叫逆推法方法，就是先假设结论(某一个函数的导数的形式)成立。然后根据求积分的方法求出其原函数，根据这个原函数，可以将其作为辅助函数。这种方法主要是从已经知导数中推出原函数。由于此类方法比较简答，这里就不举例说明说明了。

注：对于用积分的方法求辅助函数，我们也可以用除了数分介绍的方法外，也可以考虑可用积分因子法(一阶线性常微分方程)。

6. 利用泰勒公式构造函数的方法

这种方法一般被用在导数阶数较多的函数中，一般为二阶导数中最为常见。在这种类型的题中，辅助函数可以用泰勒公式来构造。

例题 4.1 [4]：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f'(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

解：应用泰勒公式将 $f\left(\dfrac{b+a}{2}\right)$ 分别在 a,b 两点展开，注意到 $f'(a)=f'(b)=0$，因此存在 α,β：$a<\alpha<\dfrac{b+a}{2}<\beta<b$，使得

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(a)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \tag{1}$$

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\beta)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \tag{2}$$

用(2)-(1)得：$f(b)-f(a)+\dfrac{1}{8}\left[f''(a)-f''(\beta)\right](b-a)^2=0$，因此有

$\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\leq\dfrac{1}{2}\left[f''(a)-f''(\beta)\right]\leq f''(\xi)$，其中 $\xi=\begin{cases}\alpha, & f''(a)\geq f''(\beta)\\ \beta, & f''(a)\geq f''(\beta)\end{cases}$。原命题及得证。

7. 结论

在本篇文章中我介绍了几种常见的构造辅助函数的方法，并举例进行说明。希望能够加深学者对辅助函数构造方法的理解。但是在数学中往往都是一种题目多种解法，因此对于构造辅助函数的方法并不是仅仅局限于以上几种。希望我们在今后的学习中能不断的探究、学习、积累更多的构造辅助函数的方法。

参考文献

[1] 王楠. 浅谈数学分析中辅助函数的构造[J]. 教育现代化, 2019, 6(99): 146-148.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[3] 钱吉林. 数学分析解题精粹[M]. 武汉: 崇文书局, 2003.

[4] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法(第 2 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.