

一类链环的HOMFLY多项式

衣鹏宇

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

Email: 1597619802@qq.com

收稿日期: 2021年7月13日; 录用日期: 2021年8月1日; 发布日期: 2021年8月16日

摘要

纽结理论是研究绳圈(或多个绳圈)在连续变形下保持不变的特性, 而纽结多项式指的是一类以多项式表达的纽结不变量。HOMFLY多项式是继Jones多项式之后, 又一个计算纽结的重要的多项式。本文研究一类特殊的Brunnian链环, 并给出这类链环的HOMFLY多项式。

关键词

HOMFLY多项式, 排叉结, Brunnian链环

The HOMFLY Polynomials of Class of Links

Pengyu Yi

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Email: 1597619802@qq.com

Received: Jul. 13th, 2021; accepted: Aug. 1st, 2021; published: Aug. 16th, 2021

Abstract

Knot theory studies the properties of rings (or multiple rings) remaining constant under continuous deformation, while knot polynomials refer to a class of knot invariants expressed in polynomials. The HOMFLY polynomial is another important polynomial after the Jones polynomial to calculate the knot. This paper deals with a special class of Brunnian links and gives their HOMFLY polynomials.

Keywords

HOMFLY Polynomial, Pretzel Link, Brunnian Link

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言

数学上的纽结理论是 20 世纪以来作为拓扑学的一个重要的部分而发展起来的。纽结理论是研究绳圈(或多个绳圈)在连续变形下保持不变的特性[1], 纽结多项式指的是一类以多项式表达的纽结不变量。

本文研究一类特殊的 Brunnian 链环, 给出了计算该链环的 HOMFLY 多项式的计算公式。一方面, 通过利用 HOMFLY 多项式的拆接关系, 得到 $B(0)$ 、 $B(0,0)$ 、 $B(0,0,0)$ 的 HOMFLY 多项式。另一方面, 从 $B(0,0,\dots,0)$ 的拆接关系式组出发建立与 $B(0)$ 的关系。最后逐步递推给出计算 $B(0,0,\dots,0)$ 的 HOMFLY 多项式的计算公式。

2. 预备知识

2.1. 纽结

把单位圆周 S^1 嵌入到球面 S^3 或者三维欧式空间 R^3 中得到纽结。设 K 是简单闭曲线, K 在 S^3 中且 $K \cong S^1$, 则称 K 为一个纽结。

2.2. 链环

设链环 $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$, 即把若干个互不相交的圆周 S^1 ($1 \leq i \leq n, n \geq 1$) 嵌入到球面 S^3 或者三维欧式空间 R^3 中, 所形成的图形称为链环, 其中 K_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 称为链环 L 的一个分支, n 为链环 L 的分支数。

当 K_i 都为平凡纽结, 则 L 为平凡链环; 当给定链环每个分支一个方向, 则得到定向链环。

2.3. 投影图

选择一个合适的平面, 将三维空间中的纽结正则投影到该平面上, 满足:

- 1) 只有有限多个交叉点;
- 2) 每个交叉点都是二重点;
- 3) 在每个二重点位置, 上下线处的投影都是互相穿越交叉的。

则称为纽结(链环)投影图。注意, 由于平面的选择不同所得到的投影图也不唯一。

2.4. Reidemeister Move (R 变换)

Reidemeister 变换有三种改变方式可以改变纽结(链环)的正则投影图, 分别是 R1 变换、R2 变换、R3 变换, 且每一种都会改变交叉点之间的关系[1]。如图 1 所示。

如果一个投影图经过一连串的 R1、R2、R3 变换, 以及平面的变形, 可以得到另一个投影图, 则称两个投影图等价或者同痕。换句话说就是纽结(链环)在 R1、R2、R3 变换下保持不变。

2.5. 纽结连通和

对纽结 K_1 和 K_2 各取一个走向, 将其放在一个平面的两侧, 将它们的任意的一个小段拉向分隔平面, 如图把它们在平面处走向互相协调的连通, 得到原来两个有向纽结的和, 称为连通和, 记为 $K_1 \# K_2$ 。如图 2 所示。

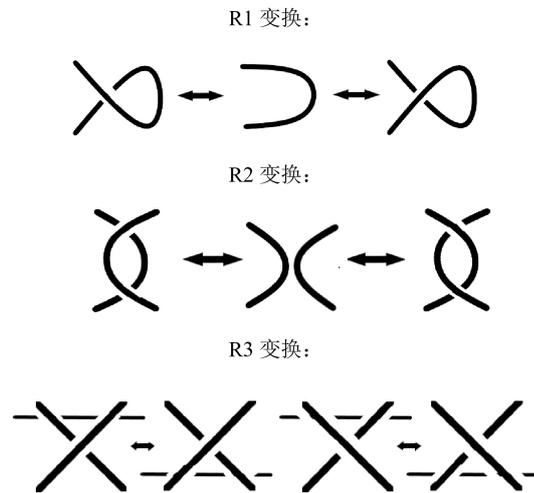


Figure 1. Reidemeister move
图 1. R 变换

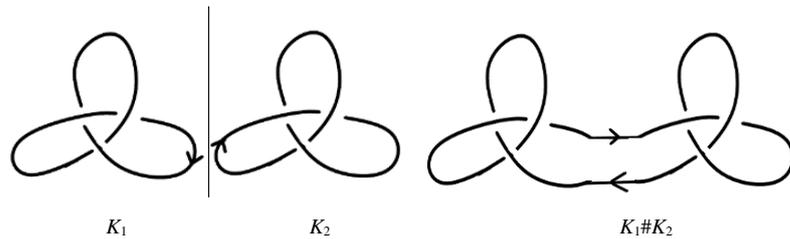


Figure 2. The connected sum of K_1 and K_2
图 2. K_1 和 K_2 的连通和

2.6. HOMFLY 多项式

设 $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ 是 S^3 中的可定向链环, 存在一个对应的 P , 给每个可定向链环 L 的投影图联系上 l, m 的整系数多项式 $P(L)$, 满足一下二个条件[2]:

- 1) 标准值:
平凡纽结 O 所对应的多项式是 $P(O) = 1$ 。
- 2) 拆接关系式:

$$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0.$$

其中 L_+ 、 L_- 、 L_0 为三个可定向链环, 且除了图 3 所示的部分其余相同。

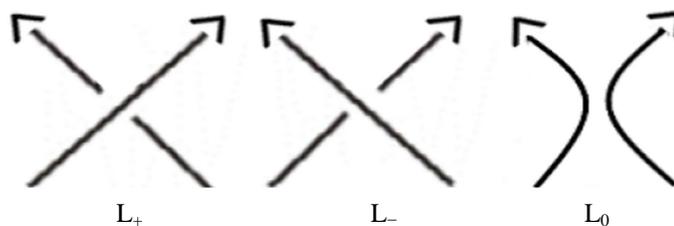


Figure 3. Skein relation
图 3. 拆接关系式

我们称 $P(L)$ 为 L 的 HOMFLY 多项式。

2.7. $B(0,0,\dots,0)$

定义 1 Brunnian 链环是一类特殊的 n 分支链环, 即拆掉一个分支, 剩下的分支为平凡链环, 此性质的链环称为 Brunnian 链环[3]。设 $B(0,0,\dots,0)$ 为可定向的 n 分支的 Brunnian 链环[4], 每个分支给定同样的方向, 且当 $n=1$ 时, $B(0,0,\dots,0)$ 变为 $B(0)$, $B(0)$ 是构成 $B(0,0,\dots,0)$ 的单位元素, 如图 4 所示。

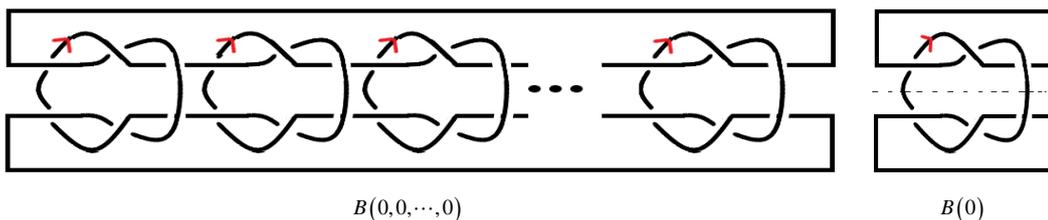


Figure 4. $B(0,0,\dots,0)$ and $B(0)$

图 4. $B(0,0,\dots,0)$ 和 $B(0)$

3. $B(0,0,\dots,0)$ 的 HOMFLY 多项式计算

定理 1 $B(0,0,\dots,0) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^{n-i} [(m^3 - 2m)(l^{-1} + l)]^{i-1} (1 - m^2)^2 + [(m^3 - 2m)(l^{-1} + l)]^{n-1} B(0)$ 。

证明:

1) 计算 $B(0)$

设 $T(s_i)$ 是一个排叉结[5], 其中 s_i 是具有 $i = n$ 个半扭转的横向排列, 当 $s_i > 0$ 时表示正的半扭转, 当 $s_i < 0$ 时表示负的半扭转。其中当 $i = 0$ 时, $T(s_0) = -(l + l^{-1})m^{-1} = \alpha$; 当 $i = 1$ 时, $T(s_1) = P(O) = 1$ 。如图 5 所示。

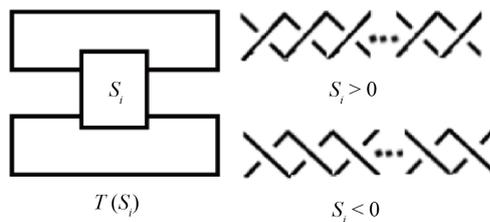


Figure 5. Pretzel link $T(s_i)$ and twists s_i

图 5. 排叉结 $T(s_i)$ 和扭转 s_i

现把 $B(0)$ 的投影图看成两个排叉结 $T(s_3 < 0)$ 和 $T(s_3 > 0)$ 作连通和得到的, 给定方向, 如图 6 所示。应用 HOMFLY 多项式的拆接关系, 拆接 $T(s_3 > 0)$ 中半扭转的最右侧交叉点, 整理可得:

$$T(s_3 > 0) = -2l^2 - l^4 + m^2l^2 \tag{3.1}$$

而 $T(s_3 < 0)$ 的投影图是 $T(s_3 > 0)$ 投影图的镜像的反定向, 将 $T(s_i > 0)$ 的 HOMFLY 多项式中的 l 替换为 l^{-1} 可得到 $T(s_i < 0)$, 即:

$$T(s_3 < 0) = -2l^{-2} - l^{-4} + m^2l^{-2} \tag{3.2}$$

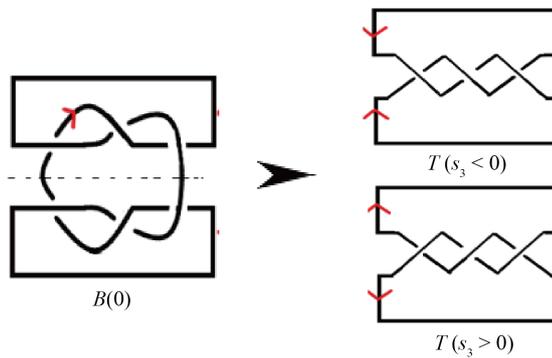


Figure 6. $T(s_3 < 0)$ and $T(s_3 > 0)$ are connected sum to get $B(0)$

图 6. $T(s_3 < 0)$ 和 $T(s_3 > 0)$ 作连通和得到 $B(0)$

则

$$B(0) = T(s_3 > 0)T(s_3 < 0) = (-2l^2 - l^4 + m^2l^2)(-2l^{-2} - l^{-4} + m^2l^{-2}) \quad (3.3)$$

2) 计算 $B(0,0)$

按照 HOMFLY 多项式的拆接关系，我们将 $B(0,0)$ 拆接为方便计算的链环，如图 7 所示。

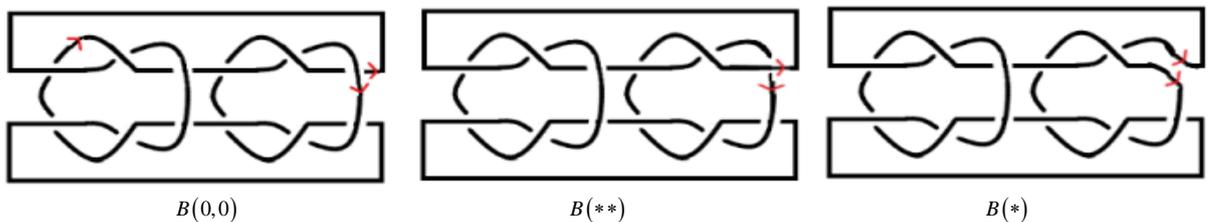


Figure 7. The skein relation of $B(0,0)$

图 7. $B(0,0)$ 的拆接关系式

对 $B(0,0)$ 拆接右上角交叉点后得到 $B(**)$ 和 $B(*)$ 两个链环，得到拆接关系式：

$$lB(0,0) + l^{-1}B(**) + mB(*) = 0 \quad (3.4)$$

显然不容易直接计算，接下来拆接 $B(**)$ 右下角交叉点，如图所示，可以得到经过 Reidemeister 变换后的 $T(s_0)$ 和 $B(0,-2)$ 两个链环，得到如图 8 所示的拆接关系式：

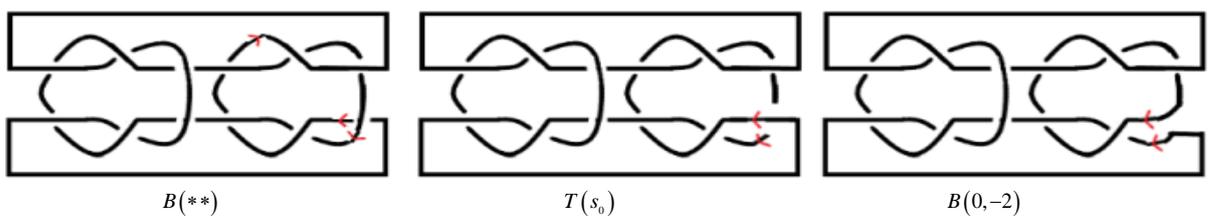


Figure 8. The skein relation of $B(**)$

图 8. $B(**)$ 的拆接关系式

$$l^{-1}B(**) + lT(s_0) + mB(0, -2) = 0 \tag{3.5}$$

最后拆接 $B(*)$ 右上角交叉点, 如图所示, 我们可以得到经过 Reidemeister 变换后的 $B(0) \# T(s_3 > 0)$ 和 $B(**)$ 两个链环, 得到如图 9 所示的拆接关系式:

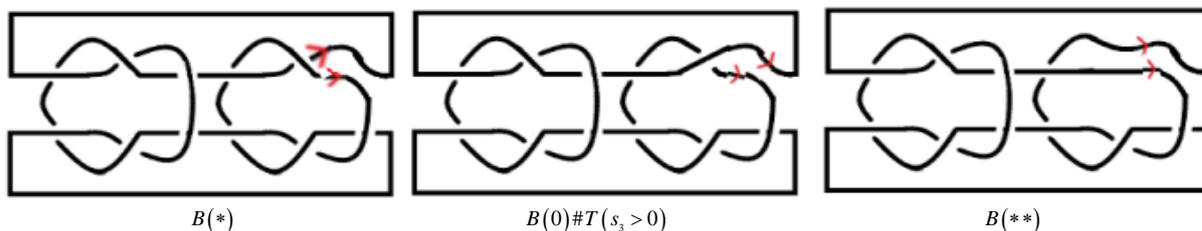


Figure 9. The skein relation of $B(*)$

图 9. $B(*)$ 的拆接关系式

$$lB(*) + l^{-1}B(0)T(s_3 > 0) + mB(**) = 0 \tag{3.6}$$

整理 $B(0,0)$ 的拆接关系式(3.4)~(3.6)得到方程组:

$$\begin{cases} lB(0,0) + l^{-1}B(**) + mB(*) = 0 \\ l^{-1}B(**) + l\alpha + mB(0, -2) = 0 \\ lB(*) + l^{-1}B(0)T(s_3 > 0) + mB(**) = 0 \end{cases}$$

化简方程组得到:

$$B(0,0) = \alpha(1 - m^2) + ml^{-3}B(0)T(s_3 > 0) + ml^{-1}(1 - m^2)B(0, -2) \tag{3.7}$$

3) 计算 $B(0, -2)$

按照拆接关系, 拆接 $B(0, -2)$ 右下角的交叉点, 得到如图 10 所示的拆接关系式:

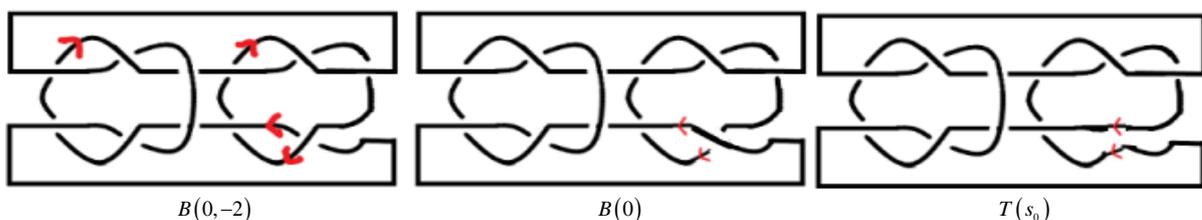


Figure 10. The skein relation of $B(0, -2)$

图 10. $B(0, -2)$ 的拆接关系式

$$l^{-1}B(0, -2) + lB(0) + m\alpha = 0$$

则

$$\begin{aligned} l^{-1}B(0, -2) &= -lB(0) - m\alpha \\ B(0, -2) &= -l^2B(0) - ml\alpha \end{aligned} \tag{3.8}$$

4) 计算 $B(0,0,0)$

按照 2) 中 $B(0,0)$ 的拆接方法, 拆接右侧的交叉点, 得到 $B(0,0,0)$ 的拆接关系式, 整理关系式得到方程组:

$$\begin{cases} lB(0,0,0) + l^{-1}B(0,**) + mB(0,*) = 0 \\ l^{-1}B(0,**) + l\alpha^2 + mB(0,0,-2) = 0 \\ lB(0,*) + l^{-1}B(0,0)T(s_3 > 0) + mB(0,**) = 0 \end{cases}$$

化简方程组得到:

$$B(0,0,0) = \alpha^2(1-m^2) + ml^{-3}B(0,0)T(s_3 > 0) + ml^{-1}(1-m^2)B(0,0,-2) \quad (3.9)$$

5) 计算 $B(0,0,-2)$

按照 3) 中 $B(0,-2)$ 的拆接方法, 同样拆接 $B(0,0,-2)$ 右侧的交叉点, 得到 $B(0,0,-2)$ 的拆接关系式:

$$l^{-1}B(0,0,-2) + lB(0,0) + m\alpha^2 = 0$$

则

$$\begin{aligned} l^{-1}B(0,0,-2) &= -lB(0,0) - m\alpha^2 \\ B(0,0,-2) &= -l^2B(0,0) - ml\alpha^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

6) 计算 $B(0,0,\dots,0)$

按照 2) 和 4) 中的方法, 对 $B(0,0,\dots,0)$ 拆接右上角的交叉点后得到 $B(0,\dots,**)$ 和 $B(0,\dots,*)$ 两个链环, 得到如图 11 所示的拆接关系式:

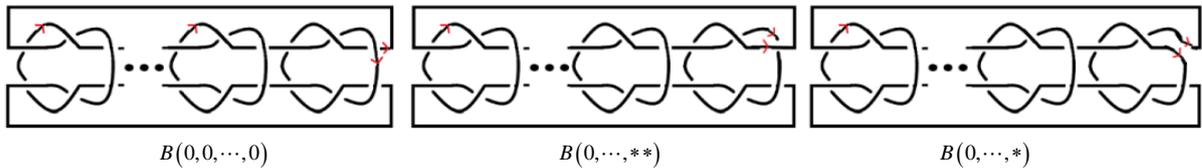


Figure 11. The skein relation of $B(0,0,\dots,0)$

图 11. $B(0,0,\dots,0)$ 的拆接关系式

$$lB(0,0,\dots,0) + l^{-1}B(0,\dots,**) + mB(0,\dots,*) = 0 \quad (3.11)$$

拆接 $B(0,\dots,**)$ 右下角交叉点, 得到经过 Reidemeister 变换后的 $P(O\cup O\cup\dots\cup O)$ 和 $B(0,\dots,0,-2)$, 其中 $P(O\cup O\cup\dots\cup O) = \alpha^{n-1}$ 表示有 n 个平凡纽结并在一起的 HOMFLY 多项式, 得到如图 12 所示的拆接关系式:

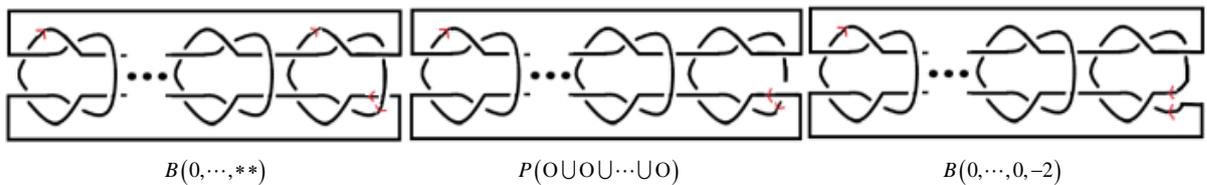


Figure 12. The skein relation of $B(0,\dots,**)$

图 12. $B(0,\dots,**)$ 的拆接关系式

$$l^{-1}B(0, \dots, **) + l\alpha^{n-1} + mB(0, \dots, 0, -2) = 0 \tag{3.12}$$

最后拆接 $B(**)$ 右上角交叉点, 如图所示, 得到经过 Reidemeister 变换后的 $B(0, \dots, 0) \# T(s_3 > 0)$ 和 $B(0, \dots, **)$ 两个链环, 其中 $B(0, \dots, 0) \# T(s_3 > 0)$ 中的 $B(0, \dots, 0)$ 是由 $n-1$ 个单位元素 $B(0)$ 构成, 得到如图 13 所示的拆接关系式:

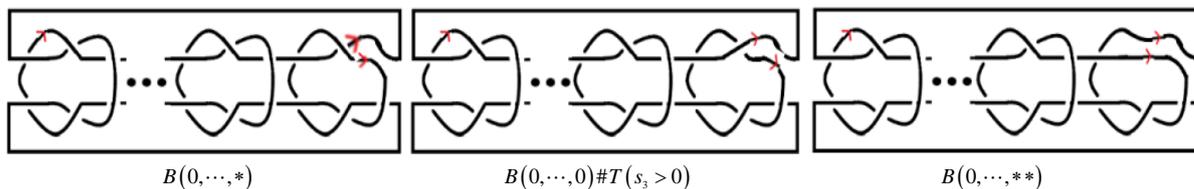


Figure 13. The skein relation of $B(0, \dots, *)$

图 13. $B(0, \dots, *)$ 的拆接关系式

$$lB(0, \dots, *) + l^{-1}B(0, \dots, 0) \# T(s_3 > 0) + mB(0, \dots, **) = 0 \tag{3.13}$$

整理 $B(0, 0, \dots, 0)$ 的拆接关系式(3.11)~(3.13), 得到方程组:

$$\begin{cases} lB(0, 0, \dots, 0) + l^{-1}B(0, \dots, **) + mB(0, \dots, *) = 0 \\ l^{-1}B(0, \dots, **) + l\alpha^{n-1} + mB(0, \dots, 0, -2) = 0 \\ lB(0, \dots, *) + l^{-1}B(0, \dots, 0) \# T(s_3 > 0) + mB(0, \dots, **) = 0 \end{cases}$$

化简方程组得到:

$$B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^n) = \alpha^{n-1} (1 - m^2) + ml^{-3} B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1}) \# T(s_3 > 0) + ml^{-1} (1 - m^2) B(\overbrace{0, \dots, 0, -2}^{n-1}) \tag{3.14}$$

其中 $B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^n)$ 表示定义 1 中, n 分支的 Brunnian 链环 $B(0, 0, \dots, 0)$ 。其中 $B(\overbrace{0, \dots, 0, -2}^{n-1})$ 表示(3.12)拆接关系式中 $n-1$ 分支的 Brunnian 链环 $B(0, \dots, -2)$ 。而按照(3)和(5)的方法拆接 $B(\overbrace{0, \dots, 0, -2}^{n-1})$ 右下角的交叉点, 同理可得到:

$$B(\overbrace{0, \dots, 0, -2}^{n-1}) = -l^2 B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1}) - ml\alpha^{n-1} \tag{3.15}$$

把方程(3.1)和(3.15)代入(3.14), 得到:

$$B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^n) = \alpha^{n-1} (1 - m^2)^2 + [(m^{-3} - 2m)(l^{-1} + l)] B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1}) \tag{3.16}$$

显然观察方程(3.16) $B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^n)$ 的 HOMFLY 多项式, 可知 $B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^n)$ 与 $B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1})$ 有关, 继续按照(6)中拆接方法, 拆接 $B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1})$ 得到的 HOMFLY 多项式, 可知 $B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1})$ 与 $B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-2})$ 有关, 重复拆接操作直到得到 $B(0, 0)$ 与 $B(0)$ 有关。因此按照递推的方法从 $B(0)$ 可以推出 $B(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^n)$ 的计算公式。

综合方程(3.1)~(3.16), 整理化简可以得到方程组:

$$\begin{cases} B(0) = (-2l^2 - l^4 + m^2 l^2)(-2l^{-2} - l^{-4} + m^2 l^{-2}) \\ B(0,0) = \alpha(1-m^2)^2 + [(m^{-3} - 2m)(l^{-1} + l)]B(0) \\ B(0,0,0) = \alpha^2(1-m^2)^2 + [(m^{-3} - 2m)(l^{-1} + l)]B(0,0) \\ \vdots \\ \overbrace{B(0,0,\dots,0)}^n = \alpha^{n-1}(1-m^2)^2 + [(m^{-3} - 2m)(l^{-1} + l)]\overbrace{B(0,0,\dots,0)}^{n-1} \end{cases} \quad (3.17)$$

取 $X = (1-m^2)^2$, $Y = (m^{-3} - 2m)(l^{-1} + l)$, 令 $a_1 = B(0)$, $a_2 = B(0,0)$, \dots , $a_n = \overbrace{B(0,0,\dots,0)}^n$, 代入方程组(3.17), 整理得到通项公式:

$$a_n = \sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha^{n-i} Y^{i-1} X + Y^{n-1} a_1$$

综上所述, 可以得到该类链环的 HOMFLY 多项式的计算公式, 即

$$\overbrace{B(0,0,\dots,0)}^n = \sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha^{n-i} [(m^3 - 2m)(l^{-1} + l)]^{i-1} (1-m^2)^2 + [(m^3 - 2m)(l^{-1} + l)]^{n-1} B(0)$$

得证。

4. 结论

本文针对一类特殊的 Brunnian 链环 $B(0,0,\dots,0)$, 利用 HOMFLY 多项式的拆接关系式, 从链环投影图交叉点出发, 重复拆接操作直到得到 $B(0)$, 按照递推的方法从 $B(0)$ 可以推出的 $B(0,0,\dots,0)$ 计算公式, 因此得到一类特殊的 Brunnian 链环 $B(0,0,\dots,0)$ 的 HOMFLY 多项式计算公式。

参考文献

- [1] 姜伯驹. 绳圈的数学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2011: 53-69.
- [2] Adams, C. (1993) *The Knot Book*. W. H. Freeman, New York.
- [3] Liang, C. and Mislow, K. (1994) On Borromean Links. *Journal of Mathematical Chemistry*, **16**, 27-35. <https://doi.org/10.1007/BF01169193>
- [4] 赵璐莹. 一类 Brunnian 链环的 Jones 多项式[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2019.
- [5] Ge, J. and Jin, X. (2013) The HOMFLY Polynomial of Classical Pretzel Links and Its Application to Chirality. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **22**, 1-16. <https://doi.org/10.1142/S0218216513500764>