Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(8), 2714-2724
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.108282

幻阵的规范化定义

刘兴祥

延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安
Email: lxx6407@163.com

收稿日期：2021年7月4日；录用日期：2021年7月23日；发布日期：2021年8月6日

摘 要

幻阵是具有限定条件的矩阵，其在组合设计、工程安排及统计学中都有着十分重要的应用。幻阵一词首次使用已无从查考，但自从幻阵概念开始使用至2000年，幻阵只是一个符号，但对于其理论并未做深入的工作，在此前提下，利用矩阵结合公式化的条件及限定集合给出各类幻阵的规范化定义。

关键词

和幻阵，积幻阵，和积幻阵，矩阵

The Standard Definition of Magic Matrix

Xingxiang Liu

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi
Email: lxx6407@163.com

Received: Jul. 4th, 2021; accepted: Jul. 23rd, 2021; published: Aug. 6th, 2021

Abstract

Magic matrix is a matrix of restricted conditions, which has very important applications in combinatorial design, engineering arrangement and statistics. The term "magic matrix" was used for the first time. However, since the concept of magic matrix was first used until 2000, magic matrix is only a symbol. However, no in-depth work has been done on its theory. In this paper, the standard definitions of all kinds of magic matrices are given by using the matrix combined with conditions of fortification and restricted sets.

文章引用: 刘兴祥. 幻阵的规范化定义[J]. 应用数学进展, 2021, 10(8): 2714-2724.
DOI: 10.12677/aam.2021.108282

Keywords

Sum Magic Matrix, Product Magic Matrix, Sum-Product Magic Matrix, Matrix

1. 引言

由于幻方界的专家们对于幻阵定义的规范性重视不够，因而造成其它学科或者数学分支的专家及幻方爱好者对幻方界褒贬不一，为了改变这种状态，刘娟娟等在 2018 年的《第二届国际幻方论坛》上提出了文献[1]，并在会议结束后将建议提交国家自然科学科学名词审定委员会办公室，同时在对幻方界的科学名词术语进行科学规范化的同时，也将对科学名词的定义进行规范化。以下是在对现有文献[2]-[15]中定义的基础上归纳总结后，根据概念规范化的原则，对相关定义进行补充及完善并形成完整的规范化定义。在下文中将对和幻阵、积幻阵及和积幻阵的相关定义分别给出其规范化的形式。

2. 主要内容

为了定义的方便，我们先给出以下几个集合

$$S_1=\left\{i\,\middle|\,i\left(i=1,2,\cdots,n^2\right)\right\}$$

$$S_2=\left\{a+i\,\middle|\,i\left(i=1,2,\cdots,n^2\right),a\in Z\right\}$$

$$S_3=\left\{a_i\,\middle|\,a_i=i\left(i=1,2,\cdots,n^2\right),a_i\neq a_j\left(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n^2\right)\right\}$$

$$S_4=\left\{\delta_i k_i\,\middle|\,k_i=i,\delta_i=1\text{或者}-1\left(i=1,2,\cdots,n^2\right)\right\}$$

下文中出现的 F 是数域。

2.1. 和幻阵的规范定义

定义 2.1.1 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果 $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S_r\left(\sum_{i=1}^{m}E_i\left(m,1\right)\right)$，则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和幻阵，并称 S_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和幻阵 A 的行幻和。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和幻阵，并称 S_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和幻阵 A 的行幻和。

定义 2.1.2 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果 $\left(\sum_{j=1}^{m}E_j\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和幻阵，并称 S_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和幻阵 A 的列幻和。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和幻阵，并称 S_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和幻阵 A 的列幻和。

定义 2.1.3 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S_r\left(\sum_{i=1}^{m}E_i\left(m,1\right)\right)$，

2) $\left(\sum_{j=1}^{m}E_j\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和列和幻阵，并称 S_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和列和幻阵 A 的行幻和，S_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和列和幻阵 A 的列幻和。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和列和幻阵，并称 S_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和列和幻阵 A 的行幻和，S_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和列和幻阵 A 的列幻和。

定义 2.1.4 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)$，

2) $\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)A=S\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶弱和幻方，并称 S 为 F 上的 n 阶弱和幻方 A 的幻和。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)弱和幻方，并称 S 为 F 上的 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)弱和幻方 A 的幻和。

定义 2.1.5 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)$，

2) $\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)A=S\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

3) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S$，

4) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{n+1-i}\left(n,1\right)\right)=S$，

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶和幻方，并称 S 为 F 上的 n 阶和幻方 A 的幻和。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)和幻方，并称 S 为 F 上的 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)和幻方 A 的幻和。

定义 2.1.6 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)$，

2) $\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)A=S\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

3) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S$，

4) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{n+1-i}\left(n,1\right)\right)=S$，

5) $\forall k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，都有 $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i(1,n)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{(i+k)(\bmod n)}(n,1)\right)=S$，

6) $\forall k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，都有 $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i(1,n)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{(k-i+1)(\bmod n)}(n,1)\right)=S$，

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶完美和幻方，并称 S 为 F 上的 n 阶完美和幻方 A 的幻和。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)完美和幻方，并称 S 为 F 上的 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)完美和幻方 A 的幻和。

2.2. 积幻阵的规范定义

定义 2.2.1 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果 $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P_r\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行积幻阵，并称 P_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行积幻阵 A 的行幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行积幻阵，并称 P_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行积幻阵 A 的行幻积。

定义 2.2.2 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果 $\prod_{i=1}^{m}a_{ij}=P_c\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶列积幻阵，并称 P_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶列积幻阵 A 的列幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列积幻阵，并称 P_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列积幻阵 A 的列幻积。

定义 2.2.3 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P_r\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，

2) $\prod_{i=1}^{m}a_{ij}=P_c\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列积幻阵，并称 P_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列积幻阵 A 的行幻积，P_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列积幻阵 A 的列幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列积幻阵，并称 P_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列积幻阵 A 的行幻积，P_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列积幻阵 A 的列幻积。

定义 2.2.4 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，

2) $\prod_{i=1}^{n}a_{ij}=P\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶弱积幻方，并称 P 为 F 上的 n 阶弱积幻方 A 的幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)弱积幻方，并称 P 为 F 上的 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)弱积幻方 A 的幻积。

定义 2.2.5 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，

2) $\prod_{i=1}^{n} a_{ij} = P\left(j = 1, 2, \cdots, n\right)$，

3) $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = P$，

4) $\prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i} = P$，

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶积幻方，并称 P 为 F 上的 n 阶积幻方 A 的幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)积幻方，并称 P 为 F 上的 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)积幻方 A 的幻积。

定义 2.2.6 设矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = P\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$，

2) $\prod_{i=1}^{n} a_{ij} = P\left(j = 1, 2, \cdots, n\right)$，

3) $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = P$，

4) $\prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i} = P$，

5) $\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，都有 $\prod_{i=1}^{n} e_i A e_{(i+k)(\bmod n)}^{T} = P$，

6) $\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，都有 $\prod_{i=1}^{n} e_i A e_{(k+1-i)(\bmod n)}^{T} = P$，

(注意：在(5)及(6)中规定 $0(\bmod n) = n$)

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶完美积幻方，并称 P 为 F 上的 n 阶完美积幻方 A 的幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)完美积幻方，并称 P 为 F 上的 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)完美积幻方 A 的幻积，

2.3. 和积幻阵的规范定义

定义 2.3.1 设矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\left(n,1\right)\right) = S_r\left(\sum_{i=1}^{m} E_i\left(m,1\right)\right)$，

2) $\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = P_r\left(i = 1, 2, \cdots, m\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和行积幻阵，并称 S_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和行积幻阵 A 的行幻和，P_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和行积幻阵 A 的行幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和行积幻阵，并称 S_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和行积幻阵 A 的行幻和，P_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和行积幻阵 A 的行幻积。

定义 2.3.2 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S_r\left(\sum_{i=1}^{m}E_i\left(m,1\right)\right)$，

2) $\prod_{i=1}^{m}a_{ij}=P_c\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和列积幻阵，并称 S_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和列积幻阵 A 的行幻和，P_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和列积幻阵 A 的列幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和列积幻阵，并称 S_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和列积幻阵 A 的行幻和，P_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和列积幻阵 A 的列幻积。

定义 2.3.3 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S_r\left(\sum_{i=1}^{m}E_i\left(m,1\right)\right)$，

2) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P_r\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，

3) $\prod_{i=1}^{m}a_{ij}=P_c\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和行列积幻阵，并称 S_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和行列积幻阵 A 的行幻和，P_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和行列积幻阵 A 的行幻积，P_c 为 $m\times n$ 阶行和行列积幻阵 A 的列幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和行列积幻阵，并称 S_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和行列积幻阵 A 的行幻和，P_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和行列积幻阵 A 的行幻积，P_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和行列积幻阵 A 的列幻积。

定义 2.3.4 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $\left(\sum_{j=1}^{m}E_j\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

2) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P_r\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和行积幻阵，并称 S_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和行积幻阵 A 的列幻和，P_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行和行积幻阵 A 的行幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和行积幻阵，并称 S_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和行积幻阵 A 的列幻和，P_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和行积幻阵 A 的行幻积。

定义 2.3.5 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $\left(\sum_{j=1}^{m}E_j\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

2) $\prod_{i=1}^{m}a_{ij}=P_c\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和列积幻阵，并称 S_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和列积幻阵 A 的列幻和，P_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和列积幻阵 A 的列幻积。若把 F 换为 S_1 ($S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4$)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和列积幻阵，并称 S_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和列积幻阵 A 的列幻和 P_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和列积幻阵 A 的列幻积。

定义 2.3.6 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $\left(\sum_{j=1}^{m}E_j\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

2) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P_r\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，

3) $\prod_{i=1}^{m}a_{ij}=P_c\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和行列积幻阵，并称 S_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和行列积幻阵 A 的列幻和，P_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶列和行列积幻阵 A 的行幻积，P_c 为 $m\times n$ 阶列和行列积幻阵 A 的列幻积。若把 F 换为 S_1 ($S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4$)则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和行列积幻阵，并称 S_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和行列积幻阵 A 的列幻和，P_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和行列积幻阵 A 的行幻积，P_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和行列积幻阵 A 的列幻积。

定义 2.3.7 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S_r\left(\sum_{i=1}^{m}E_i\left(m,1\right)\right)$，

2) $\left(\sum_{j=1}^{m}E_j\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

3) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P_r\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和行积幻阵，并称 S_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和行积幻阵 A 的行幻和，S_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和行积幻阵 A 的列幻和，P_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和行积幻阵 A 的行幻积。若把 F 换为 S_1 ($S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4$)则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和行积幻阵，并称 S_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和行积幻阵 A 的行幻和，S_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和行积幻阵 A 的列幻和，P_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和行积幻阵 A 的行幻积。

定义 2.3.8 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S_r\left(\sum_{i=1}^{m}E_i\left(m,1\right)\right)$，

2) $\left(\sum_{j=1}^{m}E_j\left(1,m\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

3) $\prod_{i=1}^{m} a_{ij} = P_c\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和列积幻阵，并称 S_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和列积幻阵 A 的行幻和，S_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和列积幻阵 A 的列幻和，P_c 为 $m\times n$ 阶行列和列积幻阵 A 的列幻积。若把 F 换为 S_1 ($S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4$)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和列积幻阵，并称 S_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和列积幻阵 A 的行幻和，S_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和列积幻阵 A 的列幻和，P_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和列积幻阵 A 的列幻积。

定义 2.3.9 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in F^{m\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\left(n,1\right)\right) = S_r\left(\sum_{i=1}^{m} E_i\left(m,1\right)\right)$，

2) $\left(\sum_{j=1}^{m} E_j\left(1,m\right)\right)A = S_c\left(\sum_{j=1}^{n} E_j\left(1,n\right)\right)$，

3) $\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = P_r\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，

4) $\prod_{i=1}^{m} a_{ij} = P_c\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和行列积幻阵，并称 S_r 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和行列积幻阵 A 的行幻和，S_c 为 F 上的 $m\times n$ 阶行列和行列积幻阵 A 的列幻和，P_r 为 $m\times n$ 阶行列和行列积幻阵 A 的行幻积，P_c 为 $m\times n$ 阶行列和行列积幻阵 A 的列幻积。若把 F 换为 S_1 ($S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4$)，则称矩阵 A 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和行列积幻阵，并称 S_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和行列积幻阵 A 的行幻和，S_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和行列积幻阵 A 的列幻和，P_r 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和行列积幻阵 A 的行幻积，P_c 为 $m\times n$ 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行列和行列积幻阵 A 的列幻积。

定义 2.3.10 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\left(n,1\right)\right) = S_r\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\left(n,1\right)\right)$，

2) $\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = P\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，

3) $\prod_{i=1}^{n} a_{ij} = P\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶行和弱积幻阵。并称 S_r 为 F 上的 n 阶行和弱积幻阵 A 的行幻和。P 为 F 上的 n 阶行和弱积幻阵 A 的弱幻积。若把 F 换为 S_1 ($S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4$)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和弱积幻阵，并称 S_r 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和弱积幻阵 A 的行幻和，P 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)行和弱积幻阵 A 的弱幻积。

定义 2.3.11 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)A=S_c\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$,

2) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P\left(i=1,2,\cdots,n\right)$,

3) $\prod_{i=1}^{n}a_{ij}=P\left(j=1,2,\cdots,n\right)$,

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶列和弱积幻阵。并称 S_c 为 F 上的 n 阶列和弱积幻阵 A 的列幻和。P 为 F 上的 n 阶列和弱积幻阵 A 的弱幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和弱积幻阵，并称 S_c 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和弱积幻阵 A 的列幻和，P 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)列和弱积幻阵 A 的弱幻积。

定义 2.3.12 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)$,

2) $\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)A=S\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$,

3) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P\left(i=1,2,\cdots,n\right)$,

4) $\prod_{i=1}^{n}a_{ij}=P\left(j=1,2,\cdots,n\right)$,

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶弱和弱积幻阵。并称 S 为 F 上的 n 阶弱和弱积幻阵 A 的弱幻和。P 为 F 上的 n 阶弱和弱积幻阵 A 的弱幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)弱和弱积幻阵，并称 S 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)弱和弱积幻阵 A 的弱幻和，P 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)弱和弱积幻阵 A 的弱幻积。

定义 2.3.13 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)$,

2) $\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)A=S\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$,

3) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S$,

4) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{n+1-i}\left(n,1\right)\right)=S$,

5) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P\left(i=1,2,\cdots,n\right)$,

6) $\prod_{i=1}^{n}a_{ij}=P\left(j=1,2,\cdots,n\right)$,

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶和弱积幻阵。并称 S 为 F 上的 n 阶和弱积幻阵 A 的幻和。P 为 F 上的 n 阶和弱

积幻阵 A 的弱幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)和弱积幻阵，并称 S 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)和弱积幻阵 A 的幻和，P 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)和弱积幻阵 A 的弱幻积。

定义 2.3.14 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)$,

2) $\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)A=S\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$,

3) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S$，

4) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{n+1-i}\left(n,1\right)\right)=S$，

5) $\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=P\left(i=1,2,\cdots,n\right)$,

6) $\prod_{i=1}^{n}a_{ij}=P\left(j=1,2,\cdots,n\right)$,

7) $\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=P$，

8) $\prod_{i=1}^{n}a_{i,n+1-i}=P$，

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶和积幻方或者双重幻方。并称 S 为 F 上的 n 阶和积幻方或者双重幻方 A 的幻和。P 为 F 上的 n 阶和积幻方或者双重幻方 A 的幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)双重幻方，并称 S 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)双重幻方 A 的幻和，P 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)双重幻方 A 的幻积。

定义 2.3.15 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in F^{n\times n}$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)$,

2) $\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)A=S\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$,

3) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S$，

4) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{n+1-i}\left(n,1\right)\right)=S$，

5) $\forall k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，都有 $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{(i+k)(\mathrm{mod}\,n)}\left(n,1\right)\right)=S$，

6) $\forall k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，都有 $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{(k-i+1)(\mathrm{mod}\,n)}\left(n,1\right)\right)=S$，

7) $\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = P\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$，

8) $\prod_{i=1}^{n} a_{ij} = P\left(j = 1, 2, \cdots, n\right)$，

9) $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = P$，

10) $\prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i} = P$，

11) $\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，都有 $\prod_{i=1}^{n} e_i A e_{(i+k)(\bmod n)}^T = P$，

12) $\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，都有 $\prod_{i=1}^{n} e_i A e_{(k+1-i)(\bmod n)}^T = P$，

(注意：在(11)及(12)中规定 $0(\bmod n) = n$)

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶完美和积幻方或者完美双重幻方。并称 S 为 F 上的 n 阶完美和积幻方或者完美双重幻方 A 的幻和。P 为 F 上的 n 阶完美和积幻方或者完美双重幻方 A 的幻积。若把 F 换为 S_1 (S_2, S_3, C, R, Q, Z, N, S_4)，则称矩阵 A 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)完美双重幻方，并称 S 为 n 阶始元(连元，异元，复，实，有理，整数，自然数，类自然数)完美双重幻方 A 的幻和，P 为 n 阶始元完美双重幻方 A 的幻积。

在新的幻方种类出现后会继续添加新类的规范性定义。

参考文献

[1] 刘娟娟, 刘兴祥, 张婧. 幻方名词术语统一规范的缘由、实施步骤及遵循原则[J]. 自然科学, 2019, 11(3): 314-315.

[2] 董朦朦, 刘兴祥, 田雨禾. 幻方可以分解为两个正交拉丁方的线性组合[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2018, 32(8): 181-188.

[3] 郭萍, 刘兴祥. 偶数阶行列积幻阵的构造方法[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2018, 32(7): 230-232.

[4] 强春晨. 始元幻阵的广义 Kronecker 积的保持性[D]: [硕士学位论文]. 延安: 延安大学, 2014.

[5] 朱磊. 广义平方幻阵的广义 Hadamard 积的保持性[D]: [硕士学位论文]. 延安: 延安大学, 2015.

[6] 郭萍, 刘兴祥. 和幻阵的定义及代数性质[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2017, 36(1): 21-27.

[7] 郭萍, 刘兴祥, 何敏梅. 积幻阵的定义及矩阵性质[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2017, 36(3): 72-74.

[8] 郭萍, 刘兴祥, 何敏梅. 和幻阵与积幻阵的代数系统研究[J]. 江西科学, 2018, 36(2): 203-205.

[9] 郭萍, 刘兴祥, 何敏梅. 偶数阶行列和始元幻阵的构造方法[J]. 河南科学, 2018, 36(4): 482-485.

[10] 郭萍, 刘兴祥. 行和、列和始元幻阵的构造方法[J]. 河南科学, 2018, 36(7): 985-988.

[11] 郭萍, 刘兴祥, 何敏梅. 和积幻阵的定义及代数性质[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2018, 37(1): 11-13+16.

[12] 张婧, 刘兴祥, 董朦朦. 双偶数阶完美和幻方的定义及其构造方法[J]. 河南科学, 2020, 38(7): 1043-1046

[13] 张婧, 刘兴祥, 施钊. 完美和幻方的定义及其构造方法[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2020, 38(4): 420-423

[14] 何敏梅, 刘兴祥. 4k 阶始元幻方的矩阵构造法[J]. 河南科学, 2017, 35(10): 1562-1565.

[15] 刘兴祥, 董朦朦. 幻阵的等价定义[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2018, 37(2): 21-25.