

一类特殊的保形映射

刘子淇, 刘栩同, 潘晓琳, 李 然*, 李玉新

辽宁师范大学, 辽宁 大连

Email: 2224710481@qq.com, 15642810861@163.com, 2380922589@qq.com, *liranmika@163.com, 395835166@qq.com

收稿日期: 2021年8月13日; 录用日期: 2021年9月5日; 发布日期: 2021年9月14日

摘 要

保形映射理论是复变函数的重要内容之一, 它在许多科学技术领域中有广泛的应用。本文主要对一类特殊的保形映射进行研究, 通过角形区域和圆弧区域的变化规律得到此类保形映射的通式。

关键词

保形映射, 分式线性变换, 角形区域, 圆弧区域

A Special Class of Conformal Mappings

Ziqi Liu, Xutong Liu, Xiaolin Pan, Ran Li*, Yuxin Li

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Email: 2224710481@qq.com, 15642810861@163.com, 2380922589@qq.com, *liranmika@163.com, 395835166@qq.com

Received: Aug. 13th, 2021; accepted: Sep. 5th, 2021; published: Sep. 14th, 2021

Abstract

The theory of conformal mapping is one of the important contents of complex function and has a few applications to many scientific and technical fields. In this paper, we show a special class of conformal mappings. The main focus is to obtain the general formula of those conformal mappings by the rules for changing the angular and arc region.

*通讯作者。

Keywords

Conformal Mapping, Linear Fractional Transformation, Angular Region, Arc Region

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要就是研究复数域上的解析函数。2000 年来，其核心定理“柯西 - 黎曼”方程组一直被数学界公认是不能分开的。而解析函数所确定的映射是保形映射，它是复变函数论中最重要的概念之一(详见参考文献[1])。保形映射使几乎不可能的事物变得简单。随着科技的进步，保形映射与物理学有着紧密联系，而且对物理学中的许多领域有重要的应用，如：应用保形映射成功解决了流体力学与空气动力学、磁场和电场及其他方面的许多问题。

目前，国内外对保形映射的研究有很多，如：Schwarz-Christoffel 保形映射的解析，它探讨了正多边形到圆盘空间上的保形映射等复杂内容(详见参考文献[2] [3])，是保形映射更加广泛的应用及其与其他数学定理或概念之间的联系。而本文主要对一类特殊的保形映射进行研究，主要内容有：象限平面区域到一个半圆区域的保形映射、一个特定角形区域的保形映射和一般角形区域的保形映射等。

本文主要分为三个部分。

第一部分主要针对象限平面映射为半圆域而进行探究，以第一、二象限(所形成 $\frac{\pi}{2}$ 角平面)为例，得到以下规律：

① 当 z 平面区域(第一象限平面)旋转一定角度 θ ， ω 平面固定为上半圆域时，映射为

$$\omega = R \frac{e^{-i\theta} z - 1}{e^{-i\theta} z + 1}$$

② 当 ω 平面的半圆域旋转一定角度 β ， z 平面固定为第一象限时，映射为

$$\omega = e^{i\beta} R \frac{z - 1}{z + 1}$$

③ 当 z 平面区域(第一象限平面)旋转一定角度 θ ， ω 平面的上半圆域旋转一定角度 β 时，映射为

$$\omega = e^{i\beta} R \frac{e^{-i\theta} z - 1}{e^{-i\theta} z + 1}$$

第二部分主要针对特定角形区域的映射进而推广至一般角形区域的映射而进行探究，得到以下规律：

④ 当 z 平面区域以原点为顶点，所形成 α 角平面， ω 平面固定为上半圆域时，映射为

$$\omega = R \frac{z^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{z^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1}$$

⑤ 当 ω 平面区域以原点为顶点，所形成 γ 角圆弧域， z 平面固定为第一象限时，映射为

$$\omega = R \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi}}$$

⑥ 当 z 平面区域以原点为顶点, 所形成 α 角平面且旋转一定角度 θ ; ω 平面区域以原点为顶点, 所形成 γ 角圆弧域且旋转一定角度 β 时, 映射为

$$\omega = e^{i\beta} R \left[\frac{\left(e^{-i\theta} z \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{\left(e^{-i\theta} z \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right]^{\frac{\gamma}{\pi}}$$

第三部分内容基于 z 平面区域以原点为顶点, 所形成 α 角平面且旋转一定角度 θ ; ω 平面区域以原点为顶点, 所形成 γ 角圆弧域且旋转一定角度 β 时的映射(即第二部分的⑥), 主要针对不以原点为顶点的角形区域的保形映射而进行探究, 得到以下规律:

⑦ 当 z 平面区域顶点变为 $a+bi$ 时, 映射变为

$$\omega = e^{i\beta} R \left\{ \frac{\left[e^{-i\theta} (z - (a+bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{\left[e^{-i\theta} (z - (a+bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right\}^{\frac{\gamma}{\pi}}$$

⑧ 当 ω 平面区域顶点变为 $m+ni$ 时, 映射为

$$\omega = e^{i\beta} R \left[\frac{\left(e^{-i\theta} z \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{\left(e^{-i\theta} z \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right]^{\frac{\gamma}{\pi}} + (m+ni)$$

⑨ 当 z 平面区域顶点变为 $a+bi$, ω 平面区域顶点变为 $m+ni$ 时, 映射为

$$\omega = e^{i\beta} R \left\{ \frac{\left[e^{-i\theta} (z - (a+bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{\left[e^{-i\theta} (z - (a+bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right\}^{\frac{\gamma}{\pi}} + (m+ni)$$

最后得到角形区域到圆弧域映射的一般通式:

$$\omega = e^{i\beta} R \left\{ \frac{\left[e^{-i\theta} (z - (a+bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{\left[e^{-i\theta} (z - (a+bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right\}^{\frac{\gamma}{\pi}} + (m+ni)$$

通过此探究, 希望可以为之后保形映射的学术研究提供更多的资料和数据。

2. 象限平面区域到半圆域的保形映射

我们首先找到象限平面到半圆域的映射方法, 进而求出不同象限到半圆域的保形映射, 最终得到相应的映射规律, 主要分为以下两部分。

2.1. 象限平面到半圆域保形映射的方法

对于象限平面到半圆域的映射, 我们以第一象限保形映射为上半圆域为例(如图 1 所示), 之后探究均

基于该例进行。显然，我们很难通过保交比来直接确定相应映射，故可采用求逆运算的方式求解，即先找到上半圆域到第一象限的保形映射，进而求逆运算来确定第一象限到上半圆域的映射。

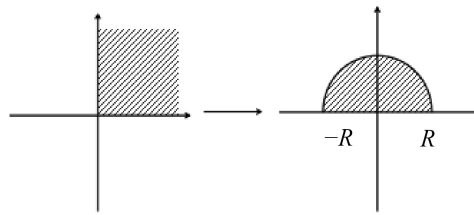


Figure 1. Mapping from the first quadrant to the upper semicircular domain

图 1. 第一象限到上半圆域的映射

如图 2 所示，若将半圆域映射为角形区域，则应当将直径的两端点分别映射为原点和无穷远点。故作映射将

$$-R \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$$

设

$$\omega = k \frac{z+R}{z-R}$$

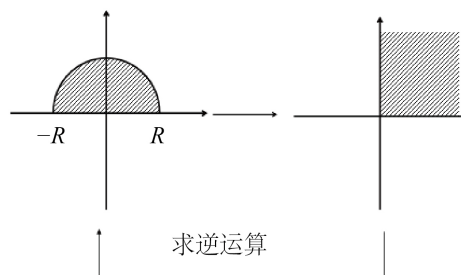


Figure 2. Mapping from the upper semicircle to the first quadrant

图 2. 上半圆域到第一象限的映射

由于半圆圆周与直径在 $-R$ 处夹角为 $\frac{\pi}{2}$ ，因此只需要将原点映射到 ω 平面实轴的正向即可。将 $z = 0$ 代入

$$\omega = k \frac{z+R}{z-R}$$

得：

$$\omega = -k > 0$$

即 $k < 0$ 。

此时， k 取不同值时，映射也有所不同，如表 1 所示。

Table 1. The effect of k value on the mapping
表 1. k 值对映射的影响

z	k	映射	ω
0	-1	$\omega = -\frac{z+R}{z-R}$	1
0	-2	$\omega = -2\frac{z+R}{z-R}$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$-k$	$\omega = -k\frac{z+R}{z-R}$	k

为了研究方便，下列研究均取 $k = -1$ ，则取逆运算后，得：

$$z = R \frac{\omega - 1}{\omega + 1}$$

则图 1 的映射为

$$\omega = R \frac{z - 1}{z + 1} \tag{1}$$

因此，对于象限平面到半圆域的保形映射，本文主要采用的是求逆运算的方式。

2.2. 象限平面到半圆域保形映射的规律

通过对第一象限、第二象限保形映射为不同半圆域进行探究，主要通过旋转变换和求逆运算来获得相应保形映射，最后通过观察区域旋转对公式(1)的影响(表 2、表 3)。

Table 2. Conformal mapping of the first quadrant region
表 2. 第一象限区域的保形映射

序号	图形表示	保形映射
①		$\omega = \frac{e^0 R (z - 1)}{z + 1}$
②		$\omega = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} R (z - 1)}{z + 1}$

Continued

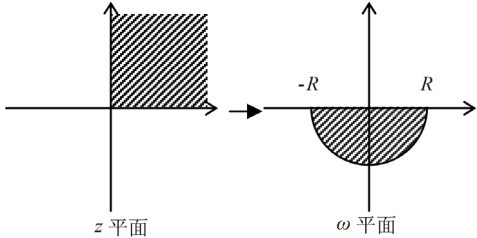
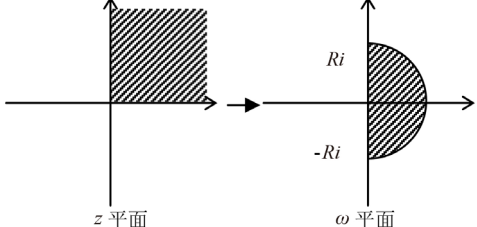
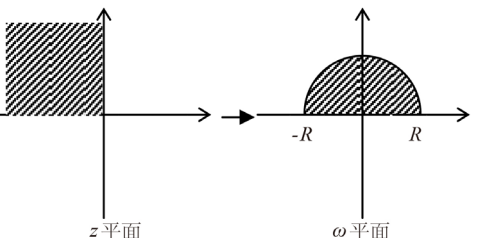
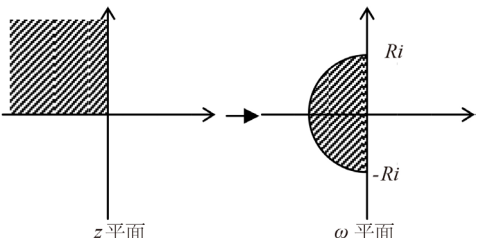
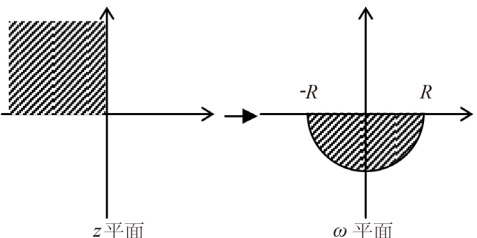
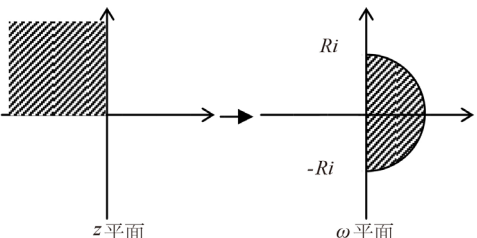
③		$\omega = \frac{e^{\pi} R(z-1)}{z+1}$
④		$\omega = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} R(z-1)}{z+1}$

Table 3. Conformal mapping of the second quadrant region
表 3. 第二象限区域的保形映射

序号	图形表示	保形映射
①		$\omega = \frac{e^0 R(e^{\frac{\pi}{2}} z - 1)}{e^{\frac{\pi}{2}} z + 1}$
②		$\omega = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} R(e^{-\frac{\pi}{2}} z - 1)}{e^{-\frac{\pi}{2}} z + 1}$
③		$\omega = \frac{e^{\pi} R(e^{-\frac{\pi}{2}} z - 1)}{e^{-\frac{\pi}{2}} z + 1}$
④		$\omega = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} R(e^{\frac{\pi}{2}} z - 1)}{e^{\frac{\pi}{2}} z + 1}$

注：下图 3 是表 3②的证明。

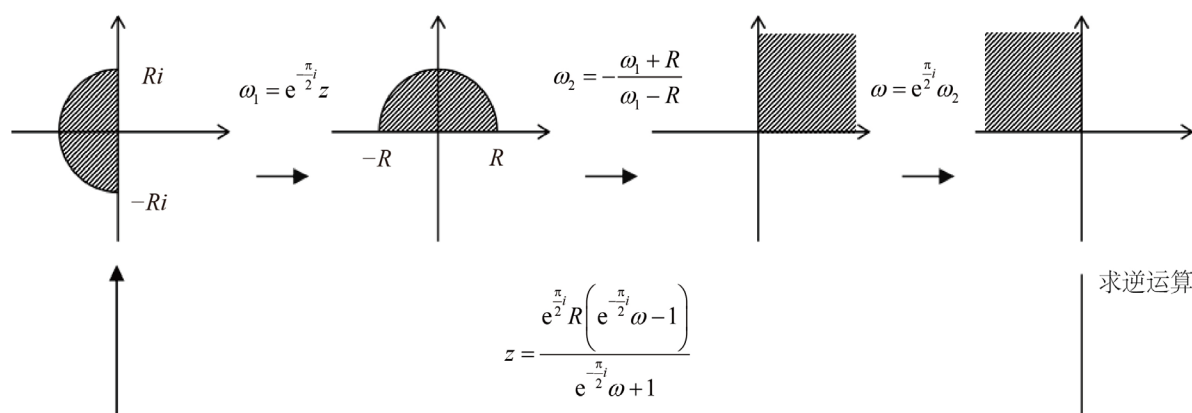


Figure 3. Solving the second quadrant to left semicircle domain mapping

图 3. 第二象限到左半圆域的映射求解

其他证明类似。

根据观察，我们得到当 ω 平面的半圆域旋转一定角度 β 时，仅是对公式(1)整体产生影响，此时映射为：

$$\omega = e^{i\beta} R \frac{z-1}{z+1}$$

当 z 平面的象限区域旋转一定角度 θ 时，仅是对公式(1)中的 z 产生影响，在 z 的前面乘于 $e^{-i\theta}$ ，此时映射为：

$$\omega = R \frac{e^{-i\theta} z - 1}{e^{-i\theta} z + 1}$$

我们可以在第三、四象限中运用此规律，可以发现得到的保形映射与最初求逆运算得到的保形映射一致，则证明该规律是正确的。

3. 特定角度平面的保形映射

第一部分探究了象限平面到半圆域的保形映射，主要探究了区域旋转对公式(1)的影响，以下是以特定角度 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{\pi}{6}$ 为例，来探究特定角度区域的保形映射并观察映射的规律，主要分为以下三个部分。

3.1. z 平面区域角度的变化

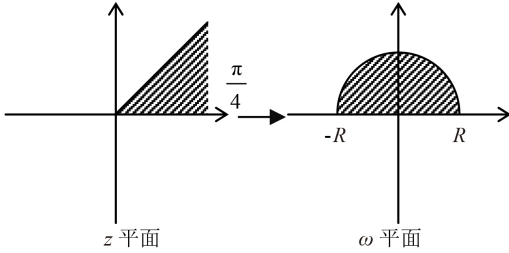
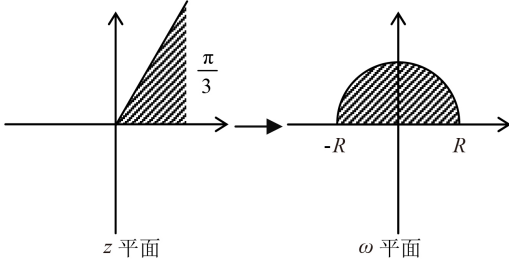
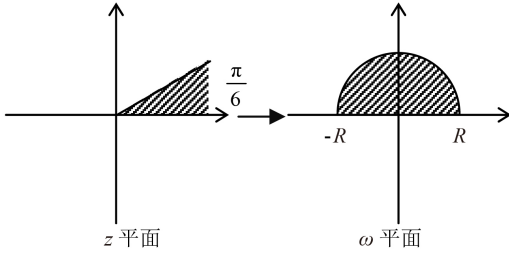
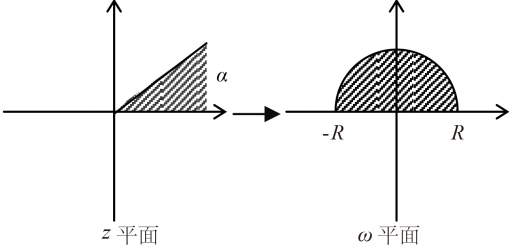
首先，我们先固定平面为上半圆域(默认半径为 R)，仅仅使 z 平面区域的角度发生变化，来观察 z 平面区域的角度变化对公式(1)的影响，如表 4 所示。

其他证明类似。

根据观察，我们发现：当 z 平面区域以原点为顶点，所形成 α 角平面时，仅仅对公式(1)中 z 的指数有影响，此时映射为：

$$\omega = R \frac{z^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{z^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1}$$

Table 4. The effect of angle changes in the z plane region on mapping
表 4. z 平面区域角度的变化对映射的影响

序号	图形表示	保形映射
①		$\omega = \frac{R(z^2 - 1)}{z^2 + 1} = \frac{R\left(z^{\frac{\pi/2}{\pi/4}} - 1\right)}{z^{\frac{\pi/2}{\pi/4}} + 1}$
②		$\omega = \frac{R\left(z^{\frac{2}{3}} - 1\right)}{z^{\frac{2}{3}} + 1} = \frac{R\left(z^{\frac{\pi/2}{\pi/3}} - 1\right)}{z^{\frac{\pi/2}{\pi/3}} + 1}$
③		$\omega = \frac{R(z^3 - 1)}{z^3 + 1} = \frac{R\left(z^{\frac{\pi/2}{\pi/6}} - 1\right)}{z^{\frac{\pi/2}{\pi/6}} + 1}$
④		$\omega = \frac{R\left(z^{\frac{\pi/2}{\alpha}} - 1\right)}{z^{\frac{\pi/2}{\alpha}} + 1} = \frac{R\left(z^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1\right)}{z^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1}$

注：下图 4 是表 4④的证明。

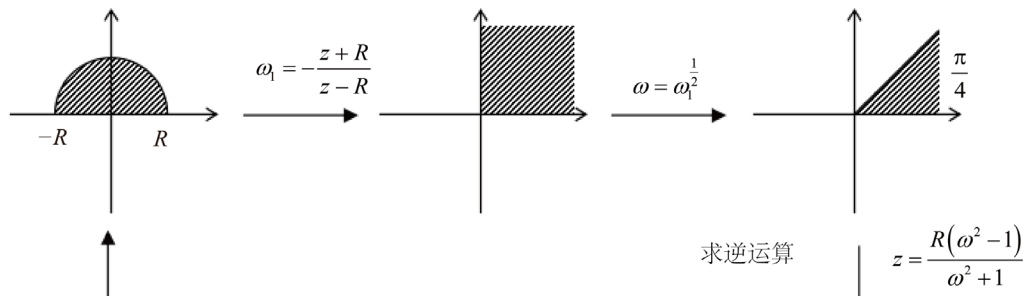


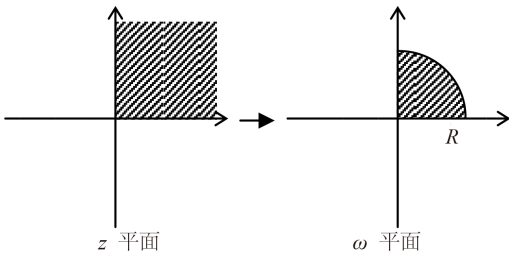
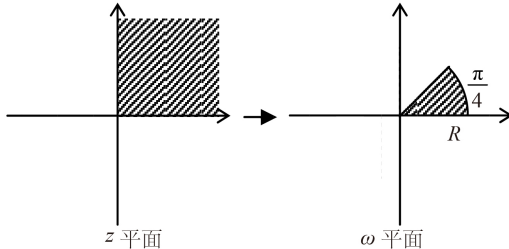
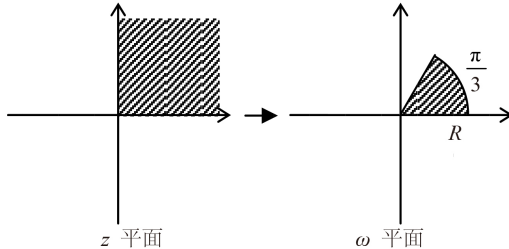
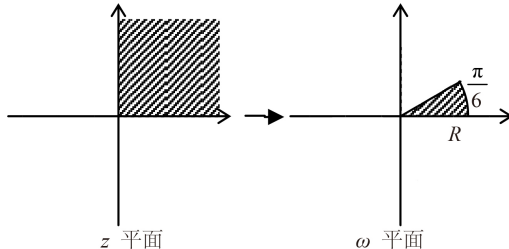
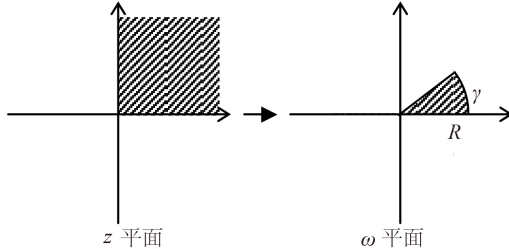
Figure 4. Solving the mapping from $\frac{\pi}{4}$ plane region to upper semicircle region

图 4. $\frac{\pi}{4}$ 平面区域到上半圆域的映射求解

3.2. ω 平面区域角度的变化

我们固定 z 平面区域(第一象限), 仅仅使 ω 平面区域的角度发生变化, 来观察 ω 平面区域的角度变化对公式(1)的影响, 如表 5 所示。

Table 5. The effect of angle changes in the ω plane region on mapping
表 5. ω 平面区域角度的变化对映射的影响

序号	图形表示	保形映射
①		$\omega = R \left[\frac{z-1}{z+1} \right]^{\frac{1}{2}}$
②		$\omega = R \left[\frac{z-1}{z+1} \right]^{\frac{1}{4}}$
③		$\omega = R \left[\frac{z-1}{z+1} \right]^{\frac{1}{3}}$
④		$\omega = R \left[\frac{z-1}{z+1} \right]^{\frac{1}{6}}$
⑤		$\omega = R \left[\frac{z-1}{z+1} \right]^{\frac{\gamma}{\pi}}$

注: 下图 5 是表 5②的证明。

其他证明类似。

根据观察, 我们发现: 当 ω 平面区域以原点为顶点, 所形成 γ 角圆弧域, 此时映射为:

$$\omega = R \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi}}$$

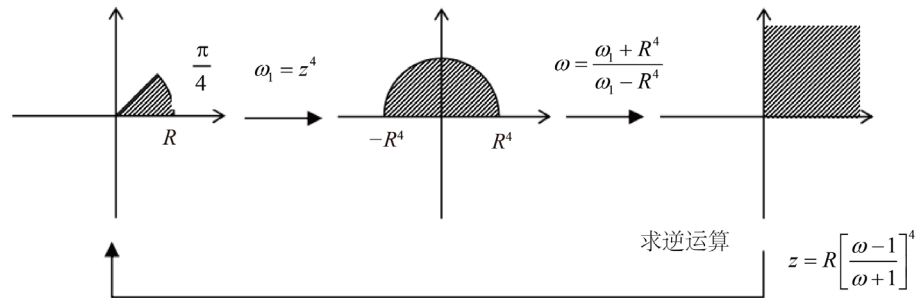


Figure 5. Solving the mapping from the first quadrant to the $\frac{\pi}{4}$ plane region

图 5. 第一象限到 $\frac{\pi}{4}$ 平面区域的映射求解

3.3. 特定角度区域旋转之后的保形映射

接下来, 我们来判断对于特定角形区域的保形映射是否依旧满足区域旋转的规律(即第一部分所得到的规律)。以 $\frac{\pi}{6}$ 角形区域映射为 $\frac{\pi}{6}$ 圆弧域为例, 假设 z 平面区域旋转了 θ 角, ω 平面旋转了 β 角, 如图 6 所示。

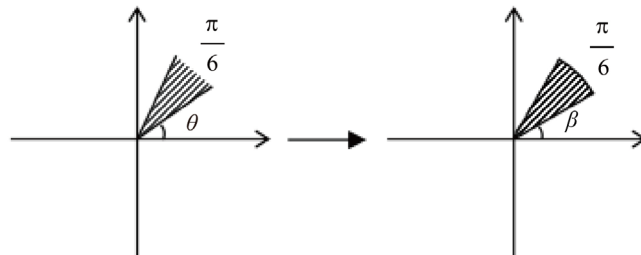


Figure 6. Mapping from $\frac{\pi}{6}$ angle region to $\frac{\pi}{6}$ circular region

图 6. $\frac{\pi}{6}$ 角形区域到 $\frac{\pi}{6}$ 圆弧域的映射

证明如下图 7 所示:

我们发现, 所求得的映射依旧满足区域旋转的规律。则此时假设 z 平面区域为 α 角平面, 旋转了 θ 角; ω 平面区域为 γ 角圆弧域, 旋转了 β 角(如图 8 所示), 此时的映射为:

$$\omega = e^{i\beta} R \left[\frac{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right]^{\frac{\gamma}{\pi}} \quad (2)$$

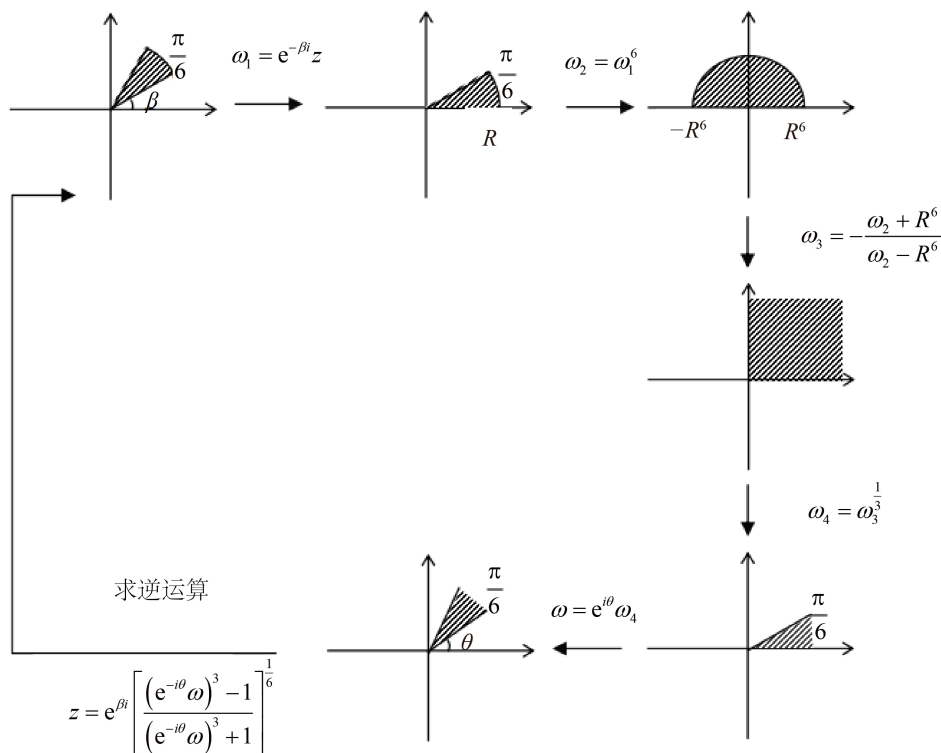


Figure 7. Solving the mapping from $\frac{\pi}{6}$ angle region to $\frac{\pi}{6}$ circular region

图 7. $\frac{\pi}{6}$ 角形区域到 $\frac{\pi}{6}$ 圆弧域的映射求解

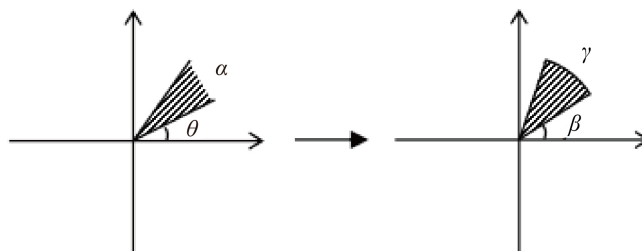


Figure 8. Mapping from α angle region to γ circular region

图 8. α 角形区域到 γ 角圆弧域的映射

4. 不以原点为顶点区域的保形映射

上述内容均是以原点为顶点的区域，以下探究我们首先以两条坐标轴上的点为顶点，然后推广至复平面中任意一点为顶点，观察保形映射的变化。整体研究基于 z 平面区域以原点为顶点，所形成 α 角平面且旋转一定角度 θ ； ω 平面区域以原点为顶点，所形成 γ 角圆弧域且旋转一定角度 β 时的映射(即公式(2))。主要包括以下三部分。

4.1. z 平面区域顶点变化

先固定 ω 平面区域(以原点为顶点， γ 角圆弧域，旋转了 β 角)，仅仅使 z 平面区域的顶点发生变化，找到相应的保形映射，如表 6 所示。

Table 6. The effect of vertex changes in the z plane region on the mapping
表 6. z 平面区域顶点的变化对映射的影响

序号	图形表示	保形映射
①		$\omega = e^{i\beta} R \left(\frac{[e^{-i\theta}(z-a)]^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{[e^{-i\theta}(z-a)]^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi}}$
②		$\omega = e^{i\beta} R \left(\frac{[e^{-i\theta}(z-bi)]^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{[e^{-i\theta}(z-bi)]^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi}}$
③		$\omega = e^{i\beta} R \left(\frac{[e^{-i\theta}(z-(a+bi))]^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{[e^{-i\theta}(z-(a+bi))]^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi}}$

注：下图 9 是表 6③的证明。

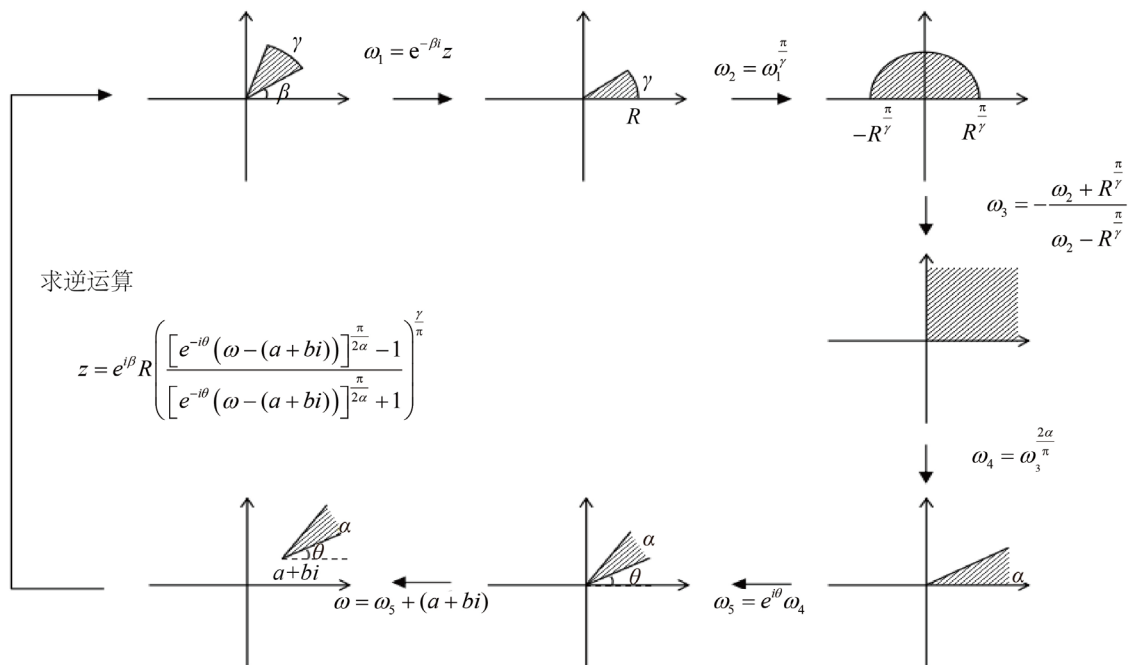


Figure 9. Solving the mapping of the z plane region with vertex $a+bi$
图 9. 顶点为 $a+bi$ 的 z 平面区域的映射求解

其他证明类似。
我们发现， z 平面区域顶点的变化仅仅使 z 发生了变化。若顶点变为 $a+bi$ ，此时映射为：

$$\omega = e^{i\beta} R \left\{ \frac{\left[e^{-i\theta} (z - (a+bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{\left[e^{-i\theta} (z - (a+bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right\}^{\frac{\gamma}{\pi}}$$

4.2. ω 平面区域顶点的变化

先固定 z 平面区域(以原点为顶点， α 角平面域，旋转了 θ 角)，仅仅使 ω 平面区域的顶点发生变化，找到相应的保形映射，如表 7 所示。

Table 7. The effect of vertex changes in the ω plane region on the mapping
表 7. ω 平面区域顶点的变化对映射的影响

序号	图形表示	保形映射
①		$\omega = e^{i\beta} R \left(\frac{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi}} + m$
②		$\omega = e^{i\beta} R \left(\frac{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi}} + ni$
③		$\omega = e^{i\beta} R \left(\frac{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi}} + (m+ni)$

注：下图 10 是表 7③的证明。

其他证明类似。
根据表格，我们发现， ω 平面区域顶点的变化仅仅使 z 发生了变化。若顶点变为 $m+ni$ ，此时映射为：

$$\omega = e^{i\beta} R \left[\frac{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{(e^{-i\theta} z)^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right]^{\frac{\gamma}{\pi}} + (m+ni)$$

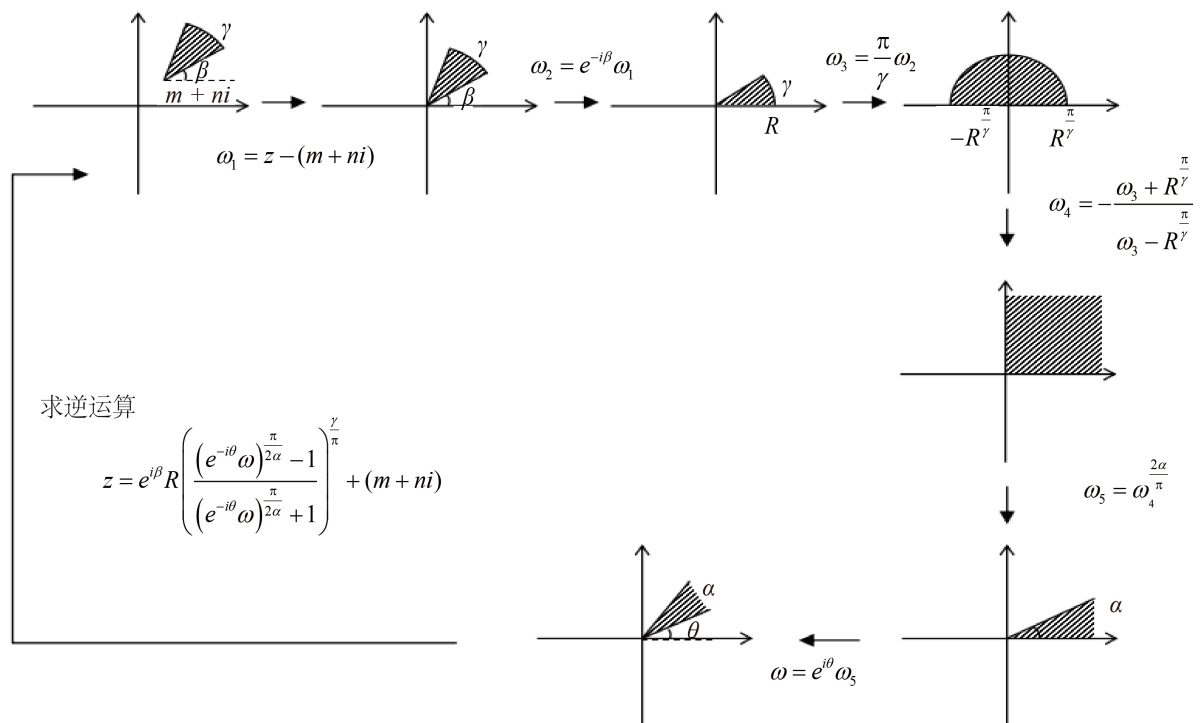


Figure 10. Solving the mapping of γ -arc domain with vertex $m + ni$

图 10. 顶点为 $m + ni$ 的 γ 圆弧域的映射求解

4.3. z 、 ω 平面区域顶点均发生变化

假设 z 平面区域为 α 角平面, 以 $a + bi$ 为顶点, 旋转了 θ 角; ω 平面区域为 γ 角圆弧域, 以 $m + ni$ 为顶点, 旋转了 β 角(如图 11)。则根据上述规律, 得到此时的映射为:

$$\omega = e^{i\beta} R \left\{ \frac{\left[e^{-i\theta} (z - (a + bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} - 1}{\left[e^{-i\theta} (z - (a + bi)) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}} + 1} \right\}^{\frac{\gamma}{\pi}} + (m + ni) \quad (3)$$

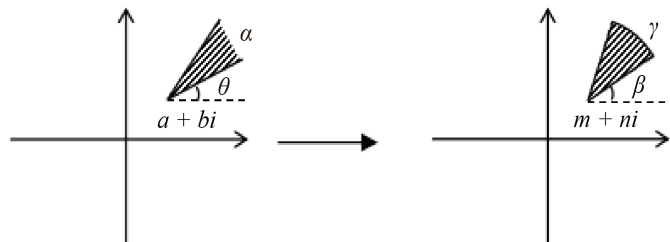


Figure 11. Mapping of general angular region to circular region

图 11. 一般角形区域到圆弧域的映射

此映射与求逆运算所得到的结果一致, 如图 12 所示。该公式(3)即为角形区域到圆弧域保形映射的一般通式。

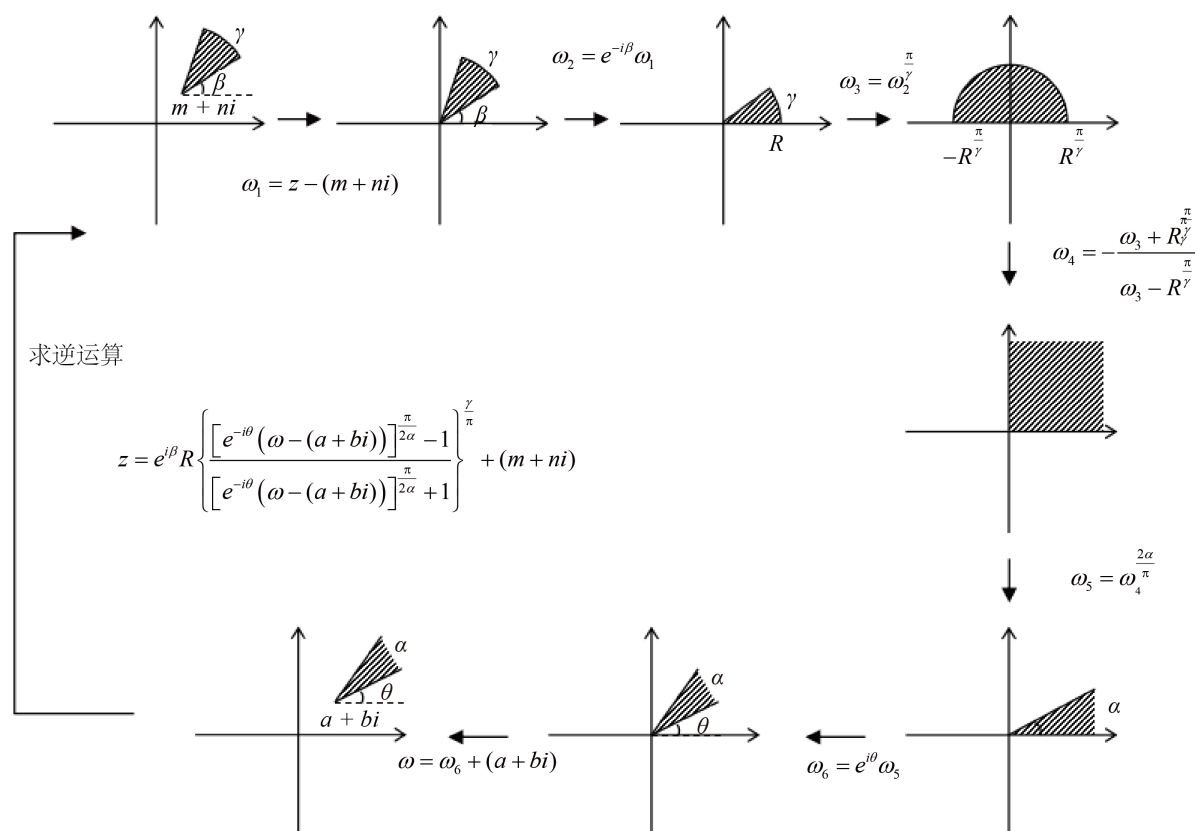


Figure 12. Solving the mapping of general angular region to circular region

图 12. 一般角形区域到圆弧域的映射求解

致 谢

本篇论文的顺利完成离不开全员的共同努力，离不开《大学生创新创业训练计划项目》给我们的这个平台。通过这次项目，我们不仅有机会将自己的知识展示出来，而且在撰写论文的过程中也收获颇丰。因此，在这里我们诚挚地感谢《大学生创新创业训练计划项目》，也非常感谢团队之间的团结协作。

基金项目

辽宁师范大学 2021 年度大学生创新创业训练计划项目资助。

参考文献

- [1] 卢玉峰, 刘西民, 李崇君. 复变函数[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [2] 薛均晓. 保形映射理论在几何造型中的某些应用研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2009.
- [3] 颜昌元, 欧阳培昌, 孔翠香, 占小根. Schwarz-Christoffel 保形映射的解析和数值方法实现[J]. 井冈山大学学报 (自然科学版), 2019, 40(127): 9-13.