

构造拉丁方的初等变换法

张蓉蓉, 刘兴祥*

延安大学数学与计算机科学学院, 陕西 延安

收稿日期: 2021年12月11日; 录用日期: 2022年1月1日; 发布日期: 2022年1月14日

摘要

利用分块矩阵和矩阵的初等变换相结合的方法, 不但给出了拉丁方的构造方法, 而且给出了数独游戏存在的理论依据, 也为数独扩展提供了可能性。

关键词

拉丁方, 分块矩阵, 初等变换, 数独

The Method of Elementary Transformation for Constructing Latin Square

Rongrong Zhang, Xingxiang Liu*

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Dec. 11th, 2021; accepted: Jan. 1st, 2022; published: Jan. 14th, 2022

Abstract

Using the method of combining Partitioned matrix and Elementary transformation of matrix, not only the construction method of Latin square, but also the theoretical basis of the Sudoku is given; it also offers the possibility of Sudoku extension.

Keywords

Latin Square, Partitioned Matrix, Elementary Transformation, Sudoku

*通讯作者。



1. 引言

数独是源自 18 世纪瑞士的一种数学游戏。是一种运用纸、笔进行演算的逻辑游戏。玩家需要根据 9×9 盘面上的已知数字, 推理出所有剩余空格的数字, 并满足每一行、每一列、每一个宫(3×3)内的数字均含 1~9, 不重复。但凡想了解数独历史的玩家在网络、书籍中搜索时, 共同会提到的就是欧拉的“拉丁方块”。拉丁方块的规则: 每一行、每一列均含 1- N (N 即盘面的规格), 不重复。这与前面提到的标准数独非常相似, 但少了一个宫的规则。本文就拉丁方块和数独的联系展开研究, 运用矩阵思想, 结合幻方构造拉丁方的初等变换法, 使得不需要通过运算只需观察和判断就可以填出 9×9 数独, 并且为数独游戏的扩展找到理论依据。

2. 预备知识

定义 1 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F^{n \times n}$ 两两互不相等, 则称矩阵 A 是数域 F 上的 n 阶异元矩阵。

定义 2 [1] 设 F 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F^{n \times n}$, $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 两两互不相等, 如果

$A \left(\sum_{i=1}^n E_i(n, 1) \right) = s_r \left(\sum_{i=1}^m E_i(m, 1) \right)$, 则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶异元行和幻阵, 并称 s_r 为 F 上的 n 阶异元行和幻阵 A 的行幻和。

定义 3 [1] 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F^{n \times n}$, $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 两两互不相等, 如果

$\left(\sum_{j=1}^m E_j(1, m) \right) A = s_c \left(\sum_{j=1}^n E_j(1, n) \right)$, 则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶异元列和幻阵, 并称 s_c 为 F 上的 n 阶异元列和幻阵 A 的列幻和。

定义 4 [2] 设 F 是数域, 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F^{n \times n}$, $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 两两互不相等, 如果矩阵 A 满足下列条件

- 1) $A \left(\sum_{i=1}^n E_i(n, 1) \right) = s \left(\sum_{i=1}^n E_i(n, 1) \right)$,
- 2) $\left(\sum_{j=1}^n E_j(1, n) \right) A = s \left(\sum_{j=1}^n E_j(1, n) \right)$,

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶异元弱和幻方, 并称 s 为 F 上的 n 阶异元弱和幻方 A 的弱幻和。

定义 5 [2] 设 F 是数域, 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F^{n \times n}$, $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 两两互不相等, 如果矩阵 A 满足下列条件

- 1) $A \left(\sum_{i=1}^n E_i(n, 1) \right) = s \left(\sum_{i=1}^n E_i(n, 1) \right)$,
- 2) $\left(\sum_{j=1}^n E_j(1, n) \right) A = s \left(\sum_{j=1}^n E_j(1, n) \right)$,
- 3) $\left(\sum_{i=1}^n E_i(1, n) \right) A \left(\sum_{i=1}^n E_i(n, 1) \right) = s$,
- 4) $\left(\sum_{i=1}^n E_i(1, n) \right) A \left(\sum_{i=1}^n E_{n+1-i}(n, 1) \right) = s$,

则称矩阵 A 为 F 上的 n 阶异元和幻方, 并称 s 为 F 上的 n 阶异元和幻方 A 的幻和。

定义 6 [3] 设 $F_1 = \{i|i(i=1,2,\dots,n^2)\}$, 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F_1^{n \times n}$, $a_{ij}(i, j=1,2,\dots,n)$ 两两互不相等, 如果矩阵 A 满足下列条件

- 1) $A \left(\sum_{i=1}^n E_i(n,1) \right) = s \left(\sum_{i=1}^n E_i(n,1) \right)$,
- 2) $\left(\sum_{j=1}^n E_j(1,n) \right) A = s \left(\sum_{j=1}^n E_j(1,n) \right)$,
- 3) $\left(\sum_{i=1}^n E_i(1,n) \right) A \left(\sum_{i=1}^n E_i(n,1) \right) = s$,
- 4) $\left(\sum_{i=1}^n E_i(1,n) \right) A \left(\sum_{i=1}^n E_{n+1-i}(n,1) \right) = s$,

则称矩阵 A 为 n 阶始元和幻方, 并称 s 为 n 阶始元和幻方 A 的幻和。

定义 7 [4] [5] 设 $F_2 = \{a+i|i(i=1,2,\dots,n^2), a \in Z\}$, 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F_2^{n \times n}$, $a_{ij}(i, j=1,2,\dots,n)$ 两两互不相等, 如果矩阵 A 满足下列条件

- 1) $A \left(\sum_{i=1}^n E_i(n,1) \right) = s \left(\sum_{i=1}^n E_i(n,1) \right)$,
- 2) $\left(\sum_{j=1}^n E_j(1,n) \right) A = s \left(\sum_{j=1}^n E_j(1,n) \right)$,
- 3) $\left(\sum_{i=1}^n E_i(1,n) \right) A \left(\sum_{i=1}^n E_i(n,1) \right) = s$,
- 4) $\left(\sum_{i=1}^n E_i(1,n) \right) A \left(\sum_{i=1}^n E_{n+1-i}(n,1) \right) = s$,

则称矩阵 A 为 n 阶连元和幻方, 并称 s 为 n 阶连元和幻方 A 的幻和。

定义 8 [6] 设 $F_3 = \{x_i|i=1,2,\dots,n\}$, 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F_3^{n \times n}$, $\forall i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, 当 $i \neq j$ 时, 有 $x_i \neq x_j$, 如果 $\forall i, j, k \in \{1,2,\dots,n\}$ 且 $j \neq k$ 时有 $a_{ij} \neq a_{ik}$ 恒成立, 则称矩阵 A 为 n 阶行拉丁方。

定义 9 [6] 设 $F_3 = \{x_i|i=1,2,\dots,n\}$, 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F_3^{n \times n}$, $\forall i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, 当 $i \neq j$ 时, 有 $x_i \neq x_j$, 如果 $\forall i, j, k \in \{1,2,\dots,n\}$ 且 $i \neq j$ 时有 $a_{ik} \neq a_{jk}$ 恒成立, 则称矩阵 A 为 n 阶列拉丁方。

定义 10 [7] [8] 设 $F_3 = \{x_i|i=1,2,\dots,n\}$, 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F_3^{n \times n}$, $\forall i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, 当 $i \neq j$ 时, 有 $x_i \neq x_j$, 如果矩阵 A 满足下列条件:

- 1) $\forall i, j, k \in \{1,2,\dots,n\}$ 且 $j \neq k$ 时有 $a_{ij} \neq a_{ik}$ 恒成立;
- 2) $\forall i, j, k \in \{1,2,\dots,n\}$ 且 $i \neq j$ 时有 $a_{ik} \neq a_{jk}$ 恒成立。

则称矩阵 A 为 n 阶拉丁方。

3. 构造拉丁方的初等变换

定理 1 设矩阵 A 是数域 F 上的异元矩阵, 构造分块矩阵 $B = (B_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$\begin{aligned} B_{ij} &= (P_{n-1,n} P_{n-2,n-1} \cdots P_{2,3} P_{1,2})^{i-1} A (P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{n-2,n-1} P_{n-1,n})^{j-1} \\ &= \left(\prod_{n-1}^1 P_{i,i+1} \right)^{i-1} A \left(\prod_1^{n-1} P_{i,i+1} \right)^{j-1} \end{aligned}$$

则 B 是 n^2 阶拉丁方。

证明: 由于经过线性变换之后构造出来的分块矩阵 B 的每一行每一列都含有矩阵 A 中的所有元素, 则分块矩阵 B 就是 n^2 阶拉丁方。

接下来给出一个三阶异元矩阵的例子来验证。

例 1. A 为 F 上的一个三阶异元矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_{13} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_{23} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad B_{32} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{33} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

得到

$$B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

可得 B 为 n^2 阶拉丁方。并且符合数独游戏的形式, 满足每一行、每一列、每一个宫(3*3 内的数字均含 1~9, 不重复。

由该定理可知数独不仅仅局限于 1~9, 而是可以进一步推广到 1~ n 。同时发现当盘面为 9*9 时, 我们只需要观察和判断就可以填出答案, 不过当推广到 n^*n 时, 还是避免不了一定的运算才能顺利完成。

推论 1 设矩阵 A 是数域 F 上的行和异元矩阵, 构造分块矩阵 $B = (B_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$B_{ij} = (P_{n-1,n} P_{n-2,n-1} \cdots P_{2,3} P_{1,2})^{i-1} A (P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{n-2,n-1} P_{n-1,n})^{j-1}$$

$$= \left(\prod_{n-1}^1 P_{i,i+1} \right)^{i-1} A \left(\prod_1^{n-1} P_{i,i+1} \right)^{j-1}$$

则 B 是 n^2 阶拉丁方。

推论 2 设矩阵 A 是数域 F 上的列和异元矩阵, 构造分块矩阵 $B = (B_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$B_{ij} = (P_{n-1,n} P_{n-2,n-1} \cdots P_{2,3} P_{1,2})^{i-1} A (P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{n-2,n-1} P_{n-1,n})^{j-1}$$

$$= \left(\prod_{n-1}^1 P_{i,i+1} \right)^{i-1} A \left(\prod_1^{n-1} P_{i,i+1} \right)^{j-1}$$

则 B 是 n^2 阶拉丁方。

推论 3 设矩阵 A 是数域 F 上的异元弱和幻方, 构造分块矩阵 $B = (B_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$\begin{aligned} B_{ij} &= (P_{n-1,n} P_{n-2,n-1} \cdots P_{2,3} P_{1,2})^{i-1} A (P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{n-2,n-1} P_{n-1,n})^{j-1} \\ &= \left(\prod_{n-1}^1 P_{i,i+1} \right)^{i-1} A \left(\prod_1^{n-1} P_{i,i+1} \right)^{j-1} \end{aligned}$$

则 B 是 n^2 阶拉丁方。

推论 4 设矩阵 A 是数域 F 上的异元和幻方, 构造分块矩阵 $B = (B_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$\begin{aligned} B_{ij} &= (P_{n-1,n} P_{n-2,n-1} \cdots P_{2,3} P_{1,2})^{i-1} A (P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{n-2,n-1} P_{n-1,n})^{j-1} \\ &= \left(\prod_{n-1}^1 P_{i,i+1} \right)^{i-1} A \left(\prod_1^{n-1} P_{i,i+1} \right)^{j-1} \end{aligned}$$

则 B 是 n^2 阶拉丁方。

推论 5 设矩阵 A 是数域 F 上的始元和幻方, 构造分块矩阵 $B = (B_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$\begin{aligned} B_{ij} &= (P_{n-1,n} P_{n-2,n-1} \cdots P_{2,3} P_{1,2})^{i-1} A (P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{n-2,n-1} P_{n-1,n})^{j-1} \\ &= \left(\prod_{n-1}^1 P_{i,i+1} \right)^{i-1} A \left(\prod_1^{n-1} P_{i,i+1} \right)^{j-1} \end{aligned}$$

则 B 是 n^2 阶拉丁方。

推论 6 设矩阵 A 是数域 F 上的连元和幻方, 构造分块矩阵 $B = (B_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$\begin{aligned} B_{ij} &= (P_{n-1,n} P_{n-2,n-1} \cdots P_{2,3} P_{1,2})^{i-1} A (P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{n-2,n-1} P_{n-1,n})^{j-1} \\ &= \left(\prod_{n-1}^1 P_{i,i+1} \right)^{i-1} A \left(\prod_1^{n-1} P_{i,i+1} \right)^{j-1} \end{aligned}$$

则 B 是 n^2 阶拉丁方。

由定理 1 可知推论 1 至推论 6 成立。定理 1 中矩阵 A 为数域上的异元矩阵, 推论 1 至推论 6 的证明将条件减弱即可得到。

4. 小结

本文利用矩阵思想, 结合幻方, 通过分块矩阵和矩阵的初等变换进行拉丁方的构造, 定理 1 给出了数独的理论依据, 并且从中可知数独不仅仅局限在 1~9 之间, 而是可以进一步推广。

基金项目

地区科学基金项目(12161086)。

参考文献

- [1] 郭萍, 刘兴祥. 和幻阵的定义及代数性质[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2017, 36(1): 21-27. DOI:10.13876/J.cnki.ydnse.2017.01.021
- [2] 刘兴祥, 董朦朦, 田雨禾. 幻阵的等价定义[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2018, 37(2): 21-25. <https://doi.org/10.13876/J.cnki.ydnse.2018.02.021>
- [3] 强春晨. 始元幻阵广义 Kronecker 积的保持性[D]: [硕士学位论文]. 延安: 延安大学, 2014.
- [4] 郭萍, 刘兴祥. 行和、列和始元幻阵的构造方法[J]. 河南科学, 2018, 36(7): 985-988.
- [5] 何敏梅, 刘兴祥. 4k 阶始元幻方的矩阵构造法[J]. 河南科学, 2017, 35(10): 1562-1566.

-
- [6] 董朦朦, 刘兴祥, 田雨禾. 幻方可以分解为两个正交拉丁方的线性组合[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2018, 32(8): 181-188.
- [7] 郭萍, 刘兴祥, 何敏梅. 偶数阶行列和始元幻阵的构造方法[J]. 河南科学, 2018, 36(4): 482-485.
- [8] 张婧, 刘兴祥, 施钊. 完美和幻方的定义及其构造方法[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2020, 38(4): 420-423.
<https://doi.org/10.13501/j.cnki.42-1908/n.2020.12.013>