Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(5), 3098-3113**
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.115330

Hans汉斯

又一类三次李氏卵圆

李湘江

长沙理工大学工程训练中心，湖南 长沙

收稿日期：2022年4月27日；录用日期：2022年5月21日；发布日期：2022年5月31日

摘 要

本文提出了李氏卵圆的定义，及卵圆的卵心，卵圆的长半径、短半径和对称半径等相关概念的定义。给出一类三次方程，并证明其为李氏卵圆方程。推出了某些三次方程为李氏卵圆方程的判定定理，及此类李氏卵圆的周长、面积和旋转卵球体的表面积和体积。

关键词

李氏卵圆，卵圆方程，卵心，长半径，短半径，对称半径，定形系数

A New Kind of Cubic Li's Oval

Xiangjiang Li

Engineering Training Center, Changsha University of Science & Technology, Changsha Hunan

Received: Apr. 27th, 2022; accepted: May 21st, 2022; published: May 31st, 2022

Abstract

A definition of Li's oval is provided, and the definitions of the oval center, and the long radius, and the short radius, and the symmetrical radius of the oval are provided. A kind of cubic equation is given and proved to be Li's oval equation. The judgment theorems that some cubic equations are Li's oval equation is derived, the perimeter and area of Li's oval and the surface area and volume of rotating oval ball are deduced.

Keywords

Li's Oval, Oval Equation, Oval Center, Long Radius, Short Radius, Symmetric Radius, Shaping Coefficient

文章引用: 李湘江. 又一类三次李氏卵圆[J]. 应用数学进展, 2022, 11(5): 3098-3113.
DOI: 10.12677/aam.2022.115330

1. 引言

笔者在文献[1]中给出了李氏卵圆及其相关概念的定义，并提出了一类四次李氏卵圆方程，在文献[2]中提出了一类三次李氏卵圆方程，在文献[3]中提出了一类参数式李氏卵形曲线方程。本文在此基础上提出另一类三次李氏卵圆方程，并获得该类卵圆的一些性质。

2. 定义

定义 1：平面曲线 L，若满足如下条件：

①L 有一条对称轴且是闭合的；

②L 上有唯一一对对称点，设为 S，T 到对称轴的距离最大；

③L 与其对称轴有且仅有两个交点，设为 P，Q，又 PQ 与 ST 交于一点设为 O，且 $OP > OQ$；

④L 处处光滑，或者除点 P，Q 外处处光滑。

则称曲线 L 为李氏卵形曲线，称点 O 为李氏卵形曲线的卵心、点 P 为远端点、Q 为近端点，点 S 和 T 为对称端点、线段 OP 为长半径、线段 OQ 为短半径，线段 OS 和 OT 为对称半径。

又过 PQ 的中点 O' 作对称轴的垂线交 L 于 S' 和 T' 两点，称点 O' 为李氏卵形曲线的轴心、线段 $O'P$ 和 $O'Q$ 为轴半径、线段 $O'S'$ 和 $O'T'$ 为次对称半径、线段 OO' 为偏心距。并将李氏卵形曲线的长半径、短半径、对称半径、轴半径、次对称半径、偏心距的长度分别记为 a，b，c，e，g，h，而把正数 a，b，c ($a > b$) 称为李氏卵形曲线的三个特征参数。

定义 2：处处光滑且凸的李氏卵形曲线称为李氏卵圆。

定义 3：远端点为尖点，其它点处处光滑且凸的李氏卵形曲线称为李氏弹头线。

若取李氏卵形曲线的卵心为坐标系原点，远端点方向作为 x 轴的正向，则李氏卵圆在直角坐标系的示意图如图 1 所示。

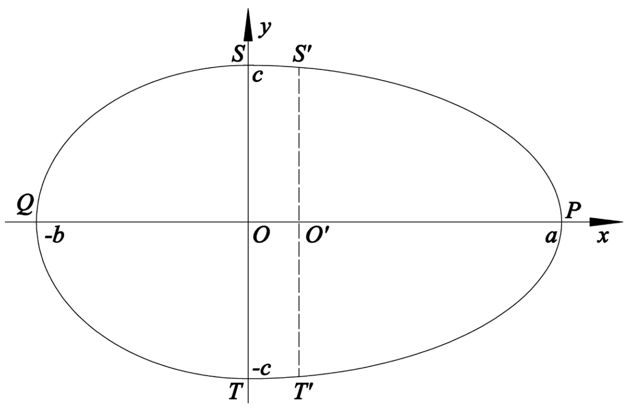


Figure 1. Li's oval and its rectangular coordinate system
图 1. 李氏卵圆及其在直角坐标系示意图

3. 又一类三次李氏卵圆

定理 1：设

$$a,b,c \text{ 均} > 0 \text{ 且 } b < a < 2b \tag{1}$$

$$\frac{-(a-b)x^3+\left(a^2-ab+b^2\right)x^2}{(ab)^2}+\frac{y^2}{c^2}=1, x\in[-b,a] \tag{2}$$

$$y=\pm\frac{c}{ab}\sqrt{(x+b)(x-a)\left[(a-b)x-ab\right]}, x\in[-b,a] \tag{3}$$

$$x^3-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}x^2-\frac{a^2b^2}{(a-b)c^2}y^2+\frac{a^2b^2}{a-b}=0, x\in[-b,a] \tag{4}$$

$$(a-b)c^2x^3-\left(a^2-ab+b^2\right)c^2x^2-a^2b^2y^2+a^2b^2c^2=0, x\in[-b,a] \tag{5}$$

$$\frac{(a-b)y^3+\left(a^2-ab+b^2\right)y^2}{(ab)^2}+\frac{x^2}{c^2}=1, y\in[-a,b] \tag{6}$$

$$x=\pm\frac{c}{ab}\sqrt{(y+a)(y-b)\left[(a-b)y+ab\right]}, y\in[-a,b] \tag{7}$$

$$y^3+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}y^2+\frac{a^2b^2}{(a-b)c^2}x^2-\frac{a^2b^2}{a-b}=0, y\in[-a,b] \tag{8}$$

$$(a-b)c^2y^3+\left(a^2-ab+b^2\right)c^2y^2+a^2b^2x^2-a^2b^2c^2=0, x\in[-a,b] \tag{9}$$

$$\begin{cases} x=c\cos t \\ (a-b)y^3+\left(a^2-ab+b^2\right)y^2-a^2b^2\sin^2 t=0 \end{cases}, t\in[0,2\pi] \tag{10}$$

且(10)中的 y 满足

$$\begin{cases} y>0, t\in(0,\pi) \\ y<0, t\in(\pi,2\pi) \\ y(0)=y(\pi)=y(2\pi)=0 \end{cases} \tag{11}$$

则(2)~(10)为相互等价的李氏卵圆方程，其图形曲线均为全等的以 a、b、c 为长、短、对称半径的李氏卵圆，且其轴半径 e、偏心距 h、次对称半径 g 为

$$e=\frac{a+b}{2}, h=\frac{a-b}{2}, g=\frac{c(a+b)}{2\sqrt{2}ab}\sqrt{4ab-a^2-b^2} \tag{12}$$

为了证明定理 1，先引入如下引理：

引理 1：设(1)成立，则(2)~(10)互相等价。

证明：因(1)成立，由(2)经过恒等变形即可得到(3)~(5)，故(2)~(5)互相等价。施行坐标轴绕原点顺时针旋转 90°的坐标变换，则(2)~(5)分别变成(6)~(9)，故(2)~(9)互相等价。

下面证明(10)与(6)等价：

由(10)的第二式得

$$\frac{(a-b)y^3+\left(a^2-ab+b^2\right)y^2}{(ab)^2}=\sin^2 t \tag{13}$$

由(10)的第一式得

$$\frac{x^2}{c^2}=\cos^2 t \tag{14}$$

将(13)与(14)相加即得(6)，故(10)与(6)等价。从而(2)~(10)等价。

引理 2：设参数式(10)所确定的函数 $y(x)$ 的一阶导数和二阶导数分别记为 $y'_x(t)$ 和 $y''_x(t)$，则

(i)

$$y'_x(t) = -\frac{2ab}{cy}\cdot\frac{\cos t}{h(y)} \tag{15}$$

$$y''_x(t) = \frac{2a^2b^2}{c^2y^3}\cdot\frac{w(t)}{h^3(y)} \tag{16}$$

其中

$$h(y) = 3(a-b)y + 2\left(a^2 - ab + b^2\right) \tag{17}$$

$$w(t) = 4a^2b^2\left[3(a-b)y + \left(a^2 - ab + b^2\right)\right]\cos^2 t + y^2\cdot h^2(y) \tag{18}$$

(ii) 若

$$a,b,c \text{ 均} > 0，\quad b < a < 2b \tag{19}$$

则

$$h(y) > 0,\ y\in[-a,b] \tag{20}$$

$$w(t) > 0,\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \tag{21}$$

$$y''_x(t) < 0,\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{22}$$

$$y''_x(t) > 0,\ t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \tag{23}$$

证明：(i)由(10)的第二式，令

$$F(y,t) = (a-b)y^3 + \left(a^2 - ab + b^2\right)y^2 - a^2b^2\sin^2 t$$

则

$$F_y = 3(a-b)y^2 + 2\left(a^2 - ab + b^2\right)y \tag{24}$$

$$F_t = -2a^2b^2\sin t\cos t \tag{25}$$

由(10)的第一式得

$$x'_t = -c\sin t \tag{26}$$

由(24)、(25)和(26)得

$$y'_t = -\frac{F_t}{F_y} = \frac{2a^2b^2\sin t\cos t}{3(a-b)y^2 + 2\left(a^2 - ab + b^2\right)y} \tag{27}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2a^2b^2\cos t}{c\left[3(a-b)y^2 + 2\left(a^2 - ab + b^2\right)y\right]} \tag{28}$$

由(28)、(17)知(15)成立。

由(27)和(28)得

$$
\begin{aligned}
\left(y_x'\right)_t' &= \left(y_x'\right)_y' \cdot y_t' + \left(y_x'\right)_t' \\
&= \left(\frac{-2a^2b^2}{c} \cdot \frac{\cos t}{3(a-b)y^2+2\left(a^2-ab+b^2\right)y}\right)_y' \cdot \frac{2a^2b^2\sin t\cos t}{3(a-b)y^2+2\left(a^2-ab+b^2\right)y} \\
&\quad + \left(\frac{-2a^2b^2}{c} \cdot \frac{\cos t}{3(a-b)y^2+2\left(a^2-ab+b^2\right)y}\right)_t' \\
&= \frac{2a^2b^2}{c^2} \cdot \frac{\sin t}{y^3\left[3(a-b)y^2+2\left(a^2-ab+b^2\right)\right]^3} \\
&\quad \cdot \left\{4a^2b^2\cos^2 t\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right]+y^2\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right]^2\right\}
\end{aligned}
$$

由上式及(26)得

$$
y_x'' = \frac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'} = -\frac{2a^2b^2}{c^2y^3} \cdot \frac{4a^2b^2\cos^2 t\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right]+y^2\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right]}{\left[3(a-b)y+2\left(a^2-ab+b^2\right)\right]^3} \tag{29}
$$

由(29)即知(16)、(17)和(18)成立。

(ii)由(17)和(1)得 $h'(y)=3(a-b)>0$，则 $h(y)$ 在 $y\in[-a,b]$ 上严格递增，故

$$
h(y) \ge h(-a) = (a+b)(2b-a), y \in [-a,b]
$$

由上式及(1)得

$$
h(y) > 0, y \in [-a,b]
$$

故(20)成立。

由(18)和(27)得

$$
\begin{aligned}
W'(t) &= \left\{4a^2b^2\cos^2 t\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right]+y^2h^2(y)\right\}_y' \cdot y_t' \\
&\quad + \left\{4a^2b^2\cos^2 t\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right]+y^2h^2(y)\right\}_t' \\
&= \left\{12(a-b)a^2b^2\cos^2 t+2y\cdot h^2(y)+2y^2\cdot h(y)\cdot h'(y)\right\} \cdot \frac{2a^2b^2\sin t\cos t}{y\cdot h(y)} \\
&\quad - 8a^2b^2\cos t\sin t\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right] \\
&= \frac{24(a-b)a^4b^4\sin t\cos^3 t}{y\cdot h(y)} \\
&\quad + \frac{\left[2y\cdot h^2(y)+6(a-b)y^2\cdot h(y)\right]2a^2b^2\sin t\cos t-8a^2b^2\sin t\cos t\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right]}{y\cdot h(y)} \\
&= \frac{24(a-b)a^4b^4\sin t\cos^3 t}{y\cdot h(y)} \\
&\quad + \frac{8a^2b^2\sin t\cos t\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right]-8a^2b^2\sin t\cos t\left[3(a-b)y+\left(a^2-ab+b^2\right)\right]}{y\cdot h(y)}
\end{aligned}
$$

即

$$W'(t)=\frac{24(a-b)a^4b^4\sin t\cos^3 t}{y\cdot h(y)} \tag{30}$$

当 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\sin t>0$， $\cos t>0$，且由(11)知 $y>0$，进而由(20)知 $h(y)>0$，于是由(30)知 $W'(t)>0, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow W(t)$ 在 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调递增，故

$$W(t)>W(0)=4a^2b^2\left(a^2-ab+b^2\right)=4a^2b^2\left[(a-b)^2+ab\right]>0$$

即

$$W(t)>0,\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{31}$$

当 $t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，有 $\sin t<0$， $\cos t<0$，且由(11)知 $y<0$，进而由(20)知 $h(y)>0$，于是由(30)知 $W'(t)>0, t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \Rightarrow W(t)$ 在 $t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 上严格单调递增，故

$$W(t)>W\left(\frac{3\pi}{2}\right),\ t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \tag{32}$$

由(17)和(18)得

$$W\left(\frac{3\pi}{2}\right)=y^2h^2(y)\geq 0 \tag{33}$$

由(32)和(33)得

$$W(t)>0,\ t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \tag{34}$$

由(31)和(34)即知(21)成立。

当 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，由(11)、(20)和(31)得

$$y>0,\ h(y)>0,\ W(t)>0,\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{35}$$

故由(16)和(35)即知(22)成立。

当 $t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，由(11)、(20)和(34)得

$$y<0,\ h(y)>0,\ W(t)>0,\ t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$$

故由上式及(16)即知(23)成立。

引理 3：参数式方程(10)的图形曲线 L 是凸的。

证明：由文献[4]之 P_{148} 及引理 2 之(ii)即(22)知曲线 L 在 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 是上凸的，由(23)知，L 在 $t\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 是下凸的，故 L 的右半部是凸的。由引理 1 知 L 与(7)的图形是全等的，而(7)的图形显然关于 y 轴对称，

故 L 是关于 y 轴对称的。由对称性知 L 左半部是凸的，故整个 L 是凸的。

定理 1 的证明：由引理 1 知，当(1)成立时，(2)~(10)是互相等价的，其图形曲线都是全等的。

由(3)知，L 显然关于 x 轴对称且是闭合的，故 L 满足定义 1 的条件①。

再考察(3)带“+”号的函数

$$y=\frac{c}{ab}\sqrt{(x-a)(x+b)\left[(a-b)x-ab\right]},x\in[-b,a] \tag{36}$$

求出函数(36)的导数，并化简得

$$y'(x)=\frac{c}{2ab\sqrt{a-b}}\cdot\frac{x\left[3(a-b)x-2\left(a^2-ab+b^2\right)\right]}{\sqrt{(x+b)(x-a)\left(x-\frac{ab}{a-b}\right)}},x\in[-b,a] \tag{37}$$

由(37)知，函数(36)的导数 $y'(x)$ 在区间 $(-b,a)$ 上处处有限存在，在端点 $x=-b,x=a$ 处其导数为 ∞，故函数(36)的曲线在 $x\in[-b,a]$ 上处处存在切线从而处处光滑，由对称性知 L 处处光滑，L 满足定义 1 的条件④。

由(37)，令 $y'(x)=0$，得函数(36)仅有两个稳定点

$$x_1=0,\ x_2=\frac{2\left(a^2-ab+b^2\right)}{3(a-b)} \tag{38}$$

由(38)的第二式及 $a>b$ 知

$$x_2>a\Leftrightarrow\frac{2\left(a^2-ab+b^2\right)}{3(a-b)}>a\Leftrightarrow a^2-ab-2b^2<0\Leftrightarrow -b<a<2b\Rightarrow b<a<2b$$

由上式及(1)知，必有 $x_2>a$，故 $x_1=0$ 是函数(36)在区间 $[-b,a]$ 上唯一的稳定点，且由(37)知

$$y'(x)>0,x\in(-b,0),\ y'(x)<0,x\in(0,a) \tag{39}$$

由文献[4]之 P_{153} 及(39)知，点 $x=0$ 是函数(36)在区间 $[-b,a]$ 上的唯一极大值点，从而也是其最大极值点，且最大值由(36)知 $y(0)=c$。于是知曲线 L 上存在唯一对称点 $S(0,c)$、$T(0,-c)$ 到其对称轴 x 轴的距离最大。故 L 满足定义 1 的条件②。

由(3)知，其图形曲线 L 是与其对称轴 x 仅有两个交点 $P(a,0)$、$Q(-b,0)$，且由(1)知 $OP=a>b=OQ$，故 L 满足定义 1 的条件③。

故(2)~(10)的图形曲线 L 满足定义 1 的条件①~④，因此 L 是李氏卵形曲线，且 a，b，c（$b<a<2b$）为其长、短、对称半径，而其轴半径 e、偏心距 h 及次对称半径 g 由定义 1 及(3)得

$$\begin{aligned}&e=\frac{a+b}{2},h=\frac{a-b}{2},\\&g=|y(h)|=\frac{c\sqrt{a-b}}{ab}\sqrt{(h+b)(h-a)\left(h-\frac{ab}{a-b}\right)}\\&=\frac{c\sqrt{a-b}}{ab}\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}+b\right)\left(\frac{a-b}{2}-a\right)\left(\frac{a-b}{2}-\frac{ab}{a-b}\right)}=\frac{c(a+b)}{2\sqrt{2}ab}\sqrt{4ab-a^2-b^2}\end{aligned}$$

故(12)成立。

又前已证明曲线 L 在 $x\in[-b,a]$ 区间上处处光滑，且由引理 3 知 L 是凸的，故 L 为李氏卵圆。

为了叙述方便，我们引入如下定义：

定义 4：将文献[2]中给出的一类三次李氏卵圆称为三次 1 型李氏卵圆，其全体记为 $L_{3,1}$，而将本文定

理1给出的又一类三次李氏卵圆称为三次2型李氏卵圆，其全体记为$L_{3.2}$。又将本文定理3中的$k(0<k<1)$称为三次2型李氏卵圆的定形系数。

引理4：施行平移坐标变换$(0,0)\to(h,0)=\left(\frac{a-b}{2},0\right)$，则(3)变成

$$y=\pm\frac{g\sqrt{\lambda}}{e}\sqrt{(x+e)(x-e)\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)},x\in[-e,e] \tag{40}$$

其中

$$e=\frac{a+b}{2},\lambda=\frac{2(a-b)}{4ab-a^2-b^2},g=\frac{c(a+b)\sqrt{a-b}}{2ab\sqrt{\lambda}}=\frac{c(a+b)\sqrt{4ab-a^2-b^2}}{2\sqrt{2}ab} \tag{41}$$

证明：由平移坐标变换公式知，当施行题设平移坐标变换后(3)变成

$$y=\pm\frac{c\sqrt{a-b}}{ab}\cdot\sqrt{\left(x+\frac{a-b}{2}+b\right)\left(x+\frac{a-b}{2}-a\right)\left(x+\frac{a-b}{2}-\frac{ab}{a-b}\right)}$$

上式化简得

$$y=\pm\frac{c\sqrt{a-b}}{ab}\sqrt{\left(x+\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{4ab-a^2-b^2}{2(a-b)}\right)} \tag{42}$$

由(42)及(41)即得(40)。

定理2：设

$$e,g,\lambda\text{ 均}>0\text{ 且 }\lambda<\frac{1}{e} \tag{43}$$

$$\frac{x^2}{e^2}+\frac{y^2}{g^2(1-\lambda x)}=1,\ x\in[-e,e] \tag{44}$$

$$y=\pm\frac{g\sqrt{\lambda}}{e}\sqrt{(x+e)(x-e)\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)},x\in[-e,e] \tag{45}$$

$$\lambda g^2x^3-g^2x^2-e^2y^2-\lambda e^2g^2x+e^2g^2=0,x\in[-e,e] \tag{46}$$

$$\begin{cases}x=e\cos t\\ y=g\sqrt{1-\lambda e\cos t}\cdot\sin t\end{cases},t\in[0,2\pi] \tag{47}$$

则(44)~(47)为等价的三次2型李氏卵圆方程，且此卵圆的长半径a、短半径b、对称半径c、偏心距h分别为

$$\begin{cases}a=\dfrac{1+\sqrt{1+3\lambda^2e^2}+\lambda e}{1+\sqrt{1+3\lambda^2e^2}}\cdot e\\ b=\dfrac{1+\sqrt{1+3\lambda^2e^2}-\lambda e}{1+\sqrt{1+3\lambda^2e^2}}\cdot e\\ c=\dfrac{\sqrt{2}g\cdot\left[\left(1+\sqrt{1+3\lambda^2e^2}\right)^2+\lambda^2e^2\right]}{\left(1+\sqrt{1+3\lambda^2e^2}\right)^{3/2}}\\ h=\dfrac{\lambda e}{1+\sqrt{1+3\lambda^2e^2}}\cdot e\end{cases} \tag{48}$$

证明：由引理 4 知，经过平移变换后(3)变成(45)，且由(41)知

$$a,b,c \text{ 均} > 0 \text{ 且 } b < a < 2b \Leftrightarrow e,g,\lambda \text{ 均} > 0 \text{ 且 } \lambda < \frac{1}{e}$$

于是由上式及定理 1 即知(45)为李氏卵圆，且将(41)反解即得(48)。

又易证(44)~(47)是互相等价的，故定理 2 的结论成立。

在定理 2 中令 $\lambda = \dfrac{k}{e}$，即

$$k = \lambda e = \frac{a^2 - b^2}{4ab - a^2 - b^2} \tag{49}$$

可得如下：

定理 3：设

$$e,g,k \text{ 均} > 0 \text{ 且 } k < 1 \tag{50}$$

$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{g^2\left(1 - \dfrac{k}{e}x\right)} = 1,\ x \in [-e,e] \tag{51}$$

$$y = \pm \frac{g}{e\sqrt{e}}\sqrt{(x+e)(x-e)(kx-e)}, x \in [-e,e] \tag{52}$$

$$kg^2x^3 - g^3x^2 - e^2gy^2 - ke^4x + e^2g^3 = 0, x \in [-e,e] \tag{53}$$

$$\begin{cases} x = e\cos t \\ y = g\sqrt{1 - k\cos t} \cdot \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \tag{54}$$

则(51)~(54)为等价的三次 2 型李氏卵圆方程，且其长半径 a、短半径 b、对称半径 c、偏心距 h 分别为

$$\begin{cases} a = \left(1 + \dfrac{k}{1 + \sqrt{1 + 3k^2}}\right)e \\ b = \left(1 - \dfrac{k}{1 + \sqrt{1 + 3k^2}}\right)e \\ c = \dfrac{1 + k^2 + \sqrt{1 + 3k^2}}{\left(1 + \sqrt{1 + 3k^2}\right)^{3/2}} \cdot \sqrt{2}g \\ h = \dfrac{k}{1 + \sqrt{1 + 3k^2}} \cdot e \end{cases} \tag{55}$$

定理 4：设三次方程

$$Lx^3 - Mx^2 - Ny^2 + G = 0 \tag{56}$$

其中

$$L,M,N,G \text{ 均} > 0 \tag{57}$$

且

$$MG > \frac{3}{2}L^2N \tag{58}$$

$$M=\frac{L^2N^2+G^2\sqrt{N}}{NG} \tag{59}$$

则(56)为三次 2 型李氏卵圆，且其长半径 a、短半径 b、对称半径 c、偏心距 h 分别为

$$a=\frac{LN+\sqrt{4MNG-3L^2N^2}}{2G},b=\frac{-LN+\sqrt{4MNG-3L^2N^2}}{2G},c=\sqrt{\frac{G}{N}},h=\frac{LN}{G} \tag{60}$$

证明：比较(5)与(56)的系数，得

$$(a-b)c^2=L \tag{61}$$

$$\left(a^2-ab+b^2\right)c^2=M \tag{62}$$

$$a^2b^2=N \tag{63}$$

$$a^2b^2c^2=G \tag{64}$$

将(64)除以(63)得

$$c^2=\frac{G}{N} \tag{65}$$

将(65)代入(61)得

$$a=b+\frac{LN}{G} \tag{66}$$

将(65)代入(62)得

$$a^2-ab+b^2=\frac{MN}{G} \tag{67}$$

将(66)代入(67)并化简得

$$G^2b^2+LNGb-\left(MNG-L^2N^2\right)=0.$$

解上述以 b 为未知数的二次方程，并注意到 $b>0$，则得

$$b=\frac{-LN+\sqrt{4MNG-3L^2N^2}}{2G} \tag{68}$$

将(68)代入(66)得

$$a=\frac{LN+\sqrt{4MNG-3L^2N^2}}{2G} \tag{69}$$

由(65)得

$$c=\sqrt{\frac{G}{N}} \tag{70}$$

又由定理 1 知，欲使(56)成为三次 2 型李氏卵圆还须满足 $a<2b$，于是结合(68)和(69)得

$$\begin{aligned}&a<2b\Leftrightarrow LN+\sqrt{4MNG-3L^2N^2}<-2LN+2\sqrt{4MNG-3L^2N^2}\Leftrightarrow 3LN<\sqrt{4MNG-3L^2N^2}\\&\Leftrightarrow 9L^2N^2<4MNG-3L^2N^2\Leftrightarrow 3L^2N^2<2MNG\Leftrightarrow MG>\frac{3}{2}L^2N\end{aligned} \tag{71}$$

由(66)得

$$(a-b)^2=\frac{L^2N^2}{G^2} \tag{72}$$

由(63)得

$$ab=\sqrt{N} \tag{73}$$

由(62)、(72)、(63)和(65)得

$$M=\left[(a-b)^2+ab\right]c^2=\left(\frac{L^2N^2}{G^2}+\sqrt{N}\right)\frac{G}{N}$$

即

$$M=\frac{L^2N^2+G^2\sqrt{N}}{NG} \tag{74}$$

综上，即知(56)与(4)是等价的，故由定理 1 知(56)为三次 2 型李氏卵圆方程，且由(61)~(64)知(57)成立，由(71)知(58)成立，由(74)知(59)成立，由(69)、(68)和(70)知(60)成立。

定理 5：设

$$L,N,G\text{ 均}>0\text{ 且 }G^4>\frac{1}{4}L^4N^2 \tag{75}$$

则

$$Lx^3-\frac{L^2N^2+G^2\sqrt{N}}{NG}x^2-Ny^2+G=0 \tag{76}$$

为三次 2 型李氏卵圆方程，且其长半径 a、短半径 b、对称半径 c、偏心距 h 分别为

$$a=\frac{LN+\sqrt{L^2N^2+4G^2\sqrt{N}}}{2G},b=\frac{-LN+\sqrt{L^2N^2+4G^2\sqrt{N}}}{2G},c=\sqrt{\frac{G}{N}},h=\frac{LN}{G} \tag{77}$$

证明：将定理 4 的(59)代入(58)及(60)，并化简即得(75)、(76)和(77)，故定理 5 的结论成立。

4. 三次 2 型李氏卵圆的周长和面积

定理 6：设三次 2 型李氏卵圆的周长为 l，面积为 S。

(i) 已知三次 2 型李氏卵圆的长、短、对称半径为 a，b，c ($b<a<2b$)，则

$$l=\frac{1}{ab}\int_{-b}^{a}\sqrt{4a^2b^2+\frac{c^2x^2\left[3(a-b)x-2\left(a^2-ab+b^2\right)\right]^2}{(x+b)(x-a)\left[(a-b)x-ab\right]}}\mathrm{d}x \tag{78}$$

$$S=\frac{2c}{ab}\int_{-b}^{a}\sqrt{(x+b)(x-a)\left[(a-b)x-ab\right]}\mathrm{d}x \tag{79}$$

(ii) 已知三次 2 型李氏卵圆的轴半径为 e，次对称半径为 g，则

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^2\sin^2t+g^2\frac{\left(k+2\cos t-3k\cos^2t\right)^2}{4(1-k\cos t)}}\mathrm{d}t \tag{80}$$

$$S=\frac{1}{2}eg\int_0^{2\pi}\frac{2-k\cos t-k\cos^3t}{2\sqrt{1-k\cos t}}\mathrm{d}t \tag{81}$$

证明：(i)由文献[4]之 P_{278} 和 P_{269} 的公式得

$$l=2\int_{-b}^{a}\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^{2}}\,\mathrm{d}x \tag{82}$$

$$S=2\int_{-b}^{a}y(x)\,\mathrm{d}x \tag{83}$$

将(37)代入(82)并化简即得(78)。将(36)代入(83)并化简即得(79)。

(ii) 由文献[4]及文献[5]知参数式表示的封闭曲线的周长与面积公式为

$$l=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{x_t'^{2}+y_t'^{2}}\,\mathrm{d}t \tag{84}$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(xy'-yx'\right)\mathrm{d}t \tag{85}$$

由(54)得

$$\begin{cases}x_t'=-e\sin t\\ y_t'=g\dfrac{k+2\cos t-3k\cos^{2}t}{2\sqrt{1-k\cos t}},t\in\left[0,2\pi\right]\end{cases} \tag{86}$$

将(54)和(82)分别代入(84)和(85)，化简即得(80)和(81)。

5. 三次 2 型李氏卵球体的体积和表面积

定理 7：设三次 2 型李氏卵圆绕 x 轴旋转而成的卵球体的体积为 V，表面积为 S_v。

(i) 已知三次 2 型李氏卵圆的长、短、对称半径为 a，b，c($b<a<2b$)，则

$$V=\frac{\pi c^{2}}{12a^{2}b^{2}}\left(a+b\right)^{3}\left(4ab-a^{2}-b^{2}\right) \tag{87}$$

$$S_v=\frac{\pi c}{a^{2}b^{2}}\int_{-b}^{a}\sqrt{4a^{2}b^{2}\left(x+b\right)\left(x-a\right)\left[\left(a-b\right)x+ab\right]+c^{2}x^{2}\left[3\left(b-a\right)x+2\left(a^{2}-ab+b^{2}\right)\right]^{2}}\,\mathrm{d}x \tag{88}$$

(ii) 已知三次 2 型李氏卵圆的轴半径为 e，次对称半径为 g，定形系数为 $k\left(0<k<1\right)$，则

$$V=\frac{4}{3}\pi eg^{2} \tag{89}$$

$$S_v=\frac{\pi g}{e^{2}}\int_{-e}^{e}\sqrt{4e^{3}\left(x+e\right)\left(x-e\right)\left(kx-e\right)+g^{2}\left(3kx^{2}+2ex-ke^{2}\right)^{2}}\,\mathrm{d}x \tag{90}$$

证明：(i)由文献[4]之 P_{273} 的旋转体体积公式及(3)得

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-b}^{a}y^{2}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi c^{2}\left(a-b\right)}{a^{2}b^{2}}\int_{-b}^{a}\left(x^{3}-\frac{a^{2}-ab+b^{2}}{a-b}x^{2}+\frac{a^{2}b^{2}}{a-b}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi c^{2}\left(a-b\right)}{a^{2}b^{2}}\left[\frac{x^{4}}{4}-\frac{a^{2}-ab+b^{2}}{3\left(a-b\right)}x^{3}+\frac{a^{2}b^{2}}{a-b}x\right]_{-b}^{a}\\
&=\frac{\pi c^{2}\left(a-b\right)}{a^{2}b^{2}}\left[\frac{a^{4}-b^{4}}{4}-\frac{a^{2}-ab+b^{2}}{3\left(a-b\right)}\left(a^{3}+b^{3}\right)+\frac{a^{2}b^{2}\left(a+b\right)}{a-b}\right]\\
&=\frac{\pi c^{2}\left(a-b\right)}{12a^{2}b^{2}}\left(-a^{5}-b^{5}+a^{4}b+ab^{4}+8a^{3}b^{2}+8a^{2}b^{3}\right)\\
&=\frac{\pi c^{2}}{12a^{2}b^{2}}\left(a+b\right)^{3}\left(4ab-a^{2}-b^{2}\right)\end{aligned}$$

故(87)成立。

由文献[6]之 P_{215} 的旋转体表面积公式及(3)得

$$S_v = 2\pi\int_{-b}^{a} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi\int_{-b}^{a}\frac{c}{ab}\sqrt{(x+b)(x-a)\left[(a-b)x-ab\right]}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2c^2\left(2a^2-2ab-3ax+2b^2+3bx\right)^2}{4a^2b^2(x-a)(x+b)\left[(a-b)x-ab\right]}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi c}{a^2b^2}\int_{-b}^{a}\sqrt{4a^2b^2(x+b)(x-a)\left[(a-b)x+ab\right]+c^2x^2\left[3(b-a)x+2\left(a^2-ab+b^2\right)\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

故(88)成立。

(ii)同样由旋转体体积公式及(45)得

$$V = \pi\int_{-e}^{e} y^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\lambda g^2}{e^2}\int_{-e}^{e}\left(x^2-e^2\right)\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi\lambda g^2}{e^2}\int_{-e}^{e}\left(x^3-\frac{1}{\lambda}x^2-e^2x-\frac{e^2}{\lambda}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi\lambda g^2}{e^2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3\lambda}x^3+\frac{e^2}{2}x^2+\frac{e^2}{\lambda}x\right]_{-e}^{e}$$
$$= \frac{\pi\lambda g^2}{e^2}\left(-\frac{2}{3\lambda}e^3+\frac{2}{\lambda}e^3\right) = \frac{\pi\lambda g^2}{e^2}\cdot\frac{4e^3}{3\lambda} = \frac{4}{3}\pi e g^2$$

故(89)成立。

将(52)求导并化简得

$$g'(x) = \frac{g\left(3kx^2-2ex-ke^2\right)^2}{2e\sqrt{e}\sqrt{(x+e)(x-e)(kx-e)}}, x\in[-e,e] \tag{91}$$

将(52)及(91)代入文献[6]之 P_{215} 的表面积公式并化简即得(90)。

6. 三次李氏弹头线

前面讨论了当 $a<2b$ 时，(2)~(10)为全等的李氏卵圆，而当 $a=2b$ 时，其远端点为尖点，故这时(2)~(10)为全等的满足定义 3 的李氏弹头线，因此，当 $a=2b$ 即 $k=1$ 时，定理 1 和定理 3 分别变成如下的定理 1′和定理 3′。

定理 1′：设

$$b>0, c>0, a=2b \tag{92}$$

$$\frac{-bx^3+3b^2x^2}{4b^4}+\frac{y^2}{c^2}=1, x\in[-b,2b] \tag{93}$$

$$y=\pm\frac{c}{2b\sqrt{b}}\sqrt{(x+b)(x-2b)^2}, x\in[-b,2b] \tag{94}$$

$$x^3-3bx^2-\frac{4b^3}{c^2}y^2+4b^3=0, x\in[-b,2b] \tag{95}$$

$$c^2x^3-3bc^2x^2-4b^3y^2+4b^3c=0, x\in[-b,2b] \tag{96}$$

$$\frac{by^3+3b^2y^2}{4b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1, y\in[-2b,b] \tag{97}$$

$$x = \pm \frac{c}{2b\sqrt{b}}\sqrt{(y-b)(y+2b)^2}, y \in [-2b, b] \tag{98}$$

$$y^3 + 3by^2 + \frac{4b^3}{c^2}x^2 - 4b^3 = 0,\ y \in [-2b, b] \tag{99}$$

$$c^2y^3 + 3bc^2y^2 + 4b^3x^2 - 4b^3c = 0,\ x \in [-2b, b] \tag{100}$$

$$\begin{cases} x = c\cos t \\ by^3 + 3b^2y^2 - 4b^4\sin^2 t = 0 \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \tag{101}$$

且(101)中的 y 满足

$$\begin{cases} y > 0, t \in (0, \pi) \\ y < 0, t \in (\pi, 2\pi) \\ y(0) = y(\pi) = y(2\pi) = 0 \end{cases} \tag{102}$$

则(93)~(101)为相互等价的李氏弹头线方程，其图形曲线均为全等的以 $2b$、b、c 为长、短、对称半径的李氏弹头线，而其轴半径 e、偏心距 h、次对称半径 g 及旋转弹头体的体积 V 分别为

$$e = \frac{3}{2}b, h = \frac{b}{2}, g = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}c, V = \frac{27}{16}bc^2 \tag{103}$$

定理 3′：设

$$e > 0, g > 0 \tag{104}$$

$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{g^2\left(1 - \frac{x}{e}\right)} = 1, x \in [-e, e] \tag{105}$$

$$y = \pm \frac{g}{e\sqrt{e}}\sqrt{(x+e)(x-e)^2}, x \in [-e, e] \tag{106}$$

$$g^2x^3 - g^3x^2 - e^2gy^2 - e^4x + e^2g^3 = 0, x \in [-e, e] \tag{107}$$

$$\begin{cases} x = e\cos t \\ y = g\sqrt{1-\cos t}\cdot\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \tag{108}$$

则(105)~(108)为等价的李氏弹头线方程，其图形为全等的李氏弹头线，其长半径 a、短半径 b、对称半径 c、偏心距 h、及旋转弹头体的体积 V 分别为

$$a = \frac{4}{3}e, b = \frac{2}{3}e, c = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}g, h = \frac{1}{3}e, V = \frac{4}{3}\pi e g^2 \tag{109}$$

7. 实例与仿真验证

7.1. 实例

下面分别给出一个具体的三次 2 型李氏卵圆方程和三次李氏弹头线方程，比如取 $a = 5$、$b = 4$、$c = 3$ (满足 $b < a < 2b$)，代入(3)得三次 2 型李氏卵圆方程

$$y = \pm \frac{3}{20}\sqrt{(x+4)(x-5)(x-20)},\ x \in [-4, 5] \tag{110}$$

用计算机绘制方程(110)的图形如图 2 所示。

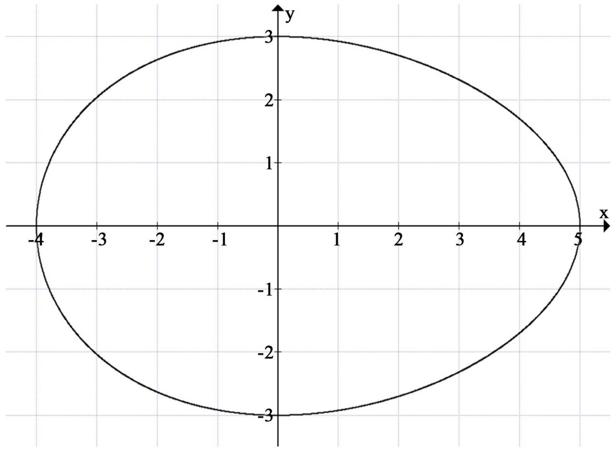


Figure 2. Equation (110) graphics
图 2. 方程(110)图形

再比如取 $a=6$、$b=3$、$c=3.5$ （$a=2b$），代入(94)得三次李氏弹头线方程

$$y=\pm\frac{3}{6\sqrt{3}}\sqrt{(x+3)(x-6)^2},\ x\in[-3,6] \tag{111}$$

用计算机绘制方程(111)的图形如图 3 所示。

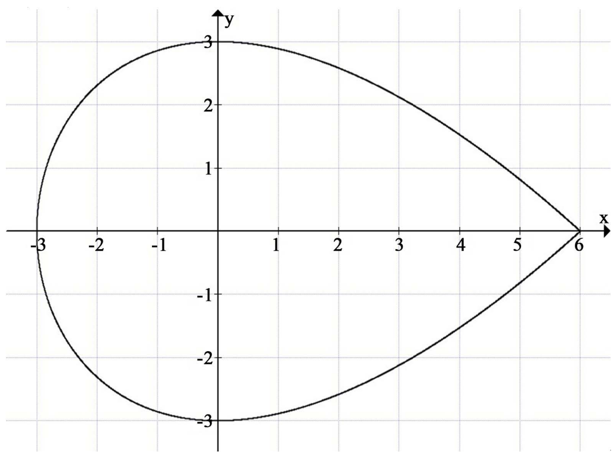


Figure 3. Equation (111) graphics
图 3. 方程(111)图形

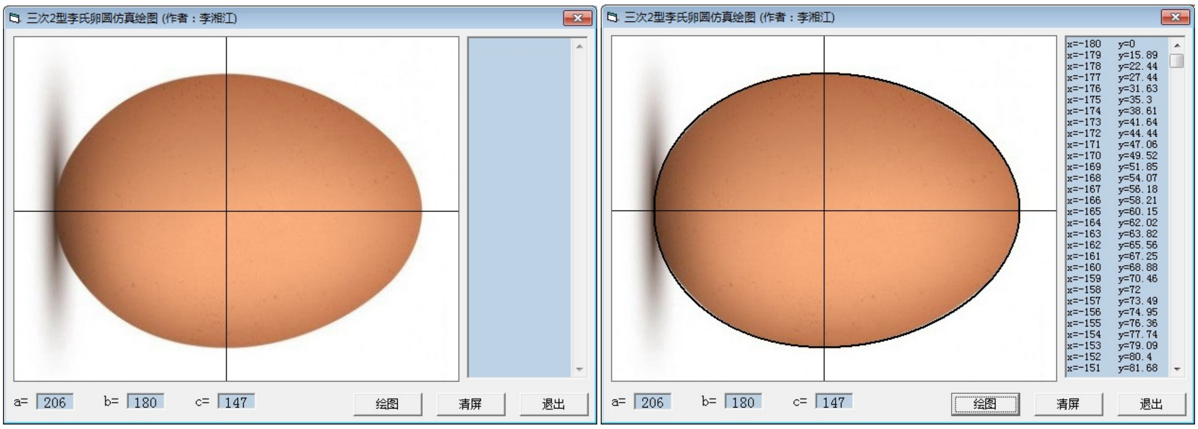
7.2. 仿真验证

为了验证本文所建三次 2 型李氏卵圆方程图形与真实鸡蛋的卵形对比效果，用计算机编写仿真绘图程序。取一张鸡蛋照片作为绘图区的背景。通过像素分析和计算，获得图片中鸡蛋图像横向最大像素为 386，纵向最大像素为 294，在鸡蛋图像横向和纵向最大像素处画两条直线作为 x、y 轴，x 轴与 y 轴的交点即为鸡蛋的卵心，并将卵心位置设定为绘图区的原点。仿真程序界面如图 4(a)所示。

按卵圆方程的需求量取鸡蛋以像素为单位的长、短、对称半径三个参数值，得出 $a=206$、$b=180$、$c=147$。则由(3)即得其三次 2 型李氏卵圆方程。

$$y=\pm\frac{147}{37080}\sqrt{(x+180)(x-206)(26x-37080)},x\in[-180,206] \quad (112)$$

绘图程序对方程(112)进行计算并绘制图形。程序界面右侧文本框中显示方程取点的计算值。绘图程序运行结果如图 4(b)所示。



(a) 绘图程序界面　　(b) 绘图程序运行结果

Figure 4. Drawing program of simulating
图 4. 仿真绘图程序

图 4(b)中鸡蛋外轮廓的黑色图线是绘图程序根据方程(112)绘制的卵圆图形，图片中黑色卵圆图线与图片中鸡蛋外轮廓高度吻合，说明本文所得三次 2 型李氏卵圆方程能仿真真实卵圆。

8. 结语

众所周知，圆只有一个参数(半径 r)，椭圆有两个参数(半长轴 p，半短轴 q)，而卵圆与它们的主要区别在于它有三个参数(长半径 a，短半径 b，对称半径 c)，本文所提出的李氏卵圆的定义正是抓住了卵圆的这种本质特征。当然符合所述定义的李氏卵圆方程是很多的，本文与文献[1]、文献[2]和文献[3]所得三次、四次和参数式方程只是李氏卵圆的几个特类，其他满足李氏卵圆定义的方程有待进一步研究。

参考文献

[1] 李湘江. 一类四次李氏卵圆[J]. 应用数学进展, 2019, 8(2): 193-202. https://doi.org/10.12677/AAM.2019.82022

[2] 李湘江. 一类三次李氏卵圆[J]. 甘肃科学学报, 2020, 32(1): 22-27.

[3] 李湘江. 一类参数式李氏卵形曲线[J]. 应用数学进展, 2021, 10(1): 311-327. https://doi.org/10.12677/AAM.2021.101036

[4] 同济大学应用数学系. 高等数学第五版上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 148, 153, 269, 273, 278.

[5] 同济大学应用数学系. 高等数学第五版下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 145.

[6] Г.M.菲赫金哥尔茨. 微积分学教程二册一分册[M]. 北京大学高等数学教研组, 译. 北京: 人民教育出版社, 1959: 21.