**Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(9), 6192-6198**
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.119653

# 具弧容量约束交通均衡流的算法研究

**周大琼**

重庆城市职业学院，重庆

收稿日期：2022年8月1日；录用日期：2022年8月30日；发布日期：2022年9月6日

## 摘　要

本文在介绍Wardrop经典交通均衡原理的基础上，重点介绍了具弧容量约束的交通均衡原理，并利用Beckmann 公式，把具弧容量约束交通均衡流的计算问题转化成数学规划问题，在此基础上构造了具弧容量约束交通均衡流的算法，同时举例对算法进行进一步说明。

## 关键词

具弧容量约束，饱和路径，Beckmann 公式，算法，均衡流

# Research on the Algorithm of Traffic Equilibrium Flow with Arc Capacity Constraint

**Daqiong Zhou**

Chongqing City Vocational College, Chongqing

Received: Aug. 1st, 2022; accepted: Aug. 30th, 2022; published: Sep. 6th, 2022

## Abstract

**Based on the introduction of Wardrops classical traffic equilibrium principle, this**

文章引用: 周大琼. 具弧容量约束交通均衡流的算法研究[J]. 应用数学进展, 2022, 11(9): 6192-6198.
DOI: 10.12677/aam.2022.119653

**paper focuses on the principle of traffic equilibrium flow with arc capacity constraint, and makes use of Beckmann formula, the calculation problem of traffic equilibrium flow with arc capacity constraint is transformed into a mathematical programming problem, and the algorithm of traffic equilibrium flow with arc capacity constraint is constructed.**

## Keywords

**Arc Capacity Constraint, Saturated Path, Beckmann Formula, Algorithm, Equilibrium Flow**



## 1. 引言

近年来，由于社会各方面的快速发展，道路堵塞问题在城市日趋严重，为了解决城市道路交通堵塞问题，减少驾车人的出行成本，就需要有效的数学模型才能解决问题。而经典的Wardrop [1]交通均衡模型主要用来解决高速公路堵塞问题，对解决城市道路交通堵塞问题有一定的局限性，因此林志等人把Wardrop 交通均衡模型进行了改进，在模型中加入了路径及弧的研究，把模型推广到了具弧容量约束的交通均衡模型 [3,4]并进行了研究，而关于交通均衡问题的其他研究见 [5–8]。

为了解决交通均衡流的计算问题，Beckmann 等人把Wardrop 交通均衡问题与数学规划问题联系起来 [2]，用数学规划模型去解决交通均衡流的计算问题，这也为交通均衡流的计算提供了理论基础。在本文中，我们通过数学规划构造了具弧容量约束交通均衡流的算法，并举例对算法进行了说明，而关于交通均衡流的其他算法研究见 [9–11]。

## 2. 预备知识

在交通网络中，$V$为节点集合，$E$为有向弧的集合，$W$为OD点对（起点/终点）集合，对任何$\omega \in W$，$P_\omega$ 为OD点对$\omega$的路径集合，记$K = \cup_{\omega\in W} P_\omega, m = \mid K \mid$。$D = (d_\omega)_{\omega\in W}$为需求向量，其中$d_\omega(> 0)$为OD点对$\omega$的交通需求量，对任何弧$a \in E$，$x_a \in R_+ = \{z \in R : z \geq 0\}$为弧上流量。对任何$\omega \in W$，$k \in P_\omega$，用$x_k(\geq 0)$ $k$为路径上的交通流量。称$x = (x_k)^T_{k\in K} \in R^m_+ = \{(z_1, z_2, \cdots, z_m) \in R^m : z_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$ 为路径流(简称流)。易知，对弧$a \in E$，$x_a = \sum_{\omega\in W} \sum_{k\in P_\omega} \delta_{ak} x_k$，当弧$a$属于路径$k$时，$\delta_{ak} = 1$，当弧$a$ 不属于路径$k$时，$\delta_{ak} = 0$。用$C =$

$(c_a)_{a\in E}$ 表示容量向量，其中$c_a(>0)$表示弧$a$上交通流的容量。

对任何弧$a\in E$，在弧$a$上的流量需满足下面容量约束条件: $c_a\geq x_a\geq 0$，同时，对任何OD点对$\omega\in W$，流$x$需要满足下面需求约束条件: $\sum_{k\in P_\omega} x_k=d_\omega$。把同时满足需求约束条件和容量约束条件的流$x$称为可行路径流(简称可行流)。

可行流集合用$A=\{x\in R_+^m:\forall\omega\in W,\sum_{k\in P_\omega} x_k=d_\omega \text{ and } \forall a\in E,c_a\geq x_a\geq 0\}$表示。在本文中，对任何$\omega\in W$，假设交通需求$d_\omega$是不变的，并且$A\neq\emptyset$。易知，集合$A$是一个紧凸集。对$a\in E$，用$t_a=t_a(x_a)=t_a(x)\in R_+$表示弧$a$上的成本，对任何$\omega\in W$, $k\in P_w$，假定路径$k$ 上的成本$t_k$是路径上所有弧的成本之和，即$t_k(x)=\sum_{a\in E}\delta_{ak}t_a(x)$。交通网络一般表示为$\aleph=\{V,E,W,D,C\}$。

## 3. 交通均衡原则及Beckmann 公式

在交通均衡流的计算中，由于每个人的出行目标不同，对向量交通均衡流的计算研究过于复杂，因此我们只对标量的交通均衡流的计算进行研究，因此下面的交通均衡原则均为标量交通均衡原则。

**定义3.1. (Wardrop交通均衡原则).** [1] 可行流$x\in A_1$ 被称为均衡流，只要满足

$$\forall\omega\in W,\forall k,j\in P_\omega,t_k(x)-t_j(x)>0\Rightarrow x_k=0.$$

均衡流$x$ 被称为交通均衡问题的一个解。

由于经典的交通均衡模型的局限性，因此林志等人在研究中增加了对路径及弧的研究，把经典的交通均衡模型推广到了具弧容量约束交通均衡模型。见下面的定义[4]。

**定义3.2.**对可行流$x\in A,a\in E$,

i) 如果$x_a=c_a$，则$a$ 是$x$ 的一条饱和弧，否则，$a$ 是$x$的一条非饱和弧;

ii) 对OD点对$\omega\in W$，路径$k\in P_\omega$，如$x$ 的一条饱和弧属于路径$k$，则路径$k$ 称为$x$的一条饱和路径，否则称路径$k$ 为$x$的一条非饱和路径。

**定义3.3. (具弧容量约束交通均衡原则).** 流$x\in A$被称为具弧容量约束的交通均衡流，只要满足如下条件：

$$\forall\omega\in W,\forall k,j\in P_\omega,\ t_k(x)-t_j(x)>0$$
$$\Rightarrow x_k=0\ \textbf{或者}j\ \textbf{是流}x\ \textbf{的一条饱和路径}.$$

把流$x$ 也称为具弧容量约束的交通均衡问题的解。

一般情况下我们用$\Gamma=\{\aleph,A,t\}$表示具弧容量约束的交通均衡问题的解。

对于具弧容量约束的交通均衡问题$\Gamma=\{\aleph,A,t\}$，通过构造如下数学规划问题$Q$来计算交通均衡流:

$$Minz(x)=\Sigma_{a\in E}\int_0^{x_a}t_a(x)dx$$
$$s.t.\quad\begin{cases}\sum_k x_k=d_\omega, & \forall\omega\in W,k\in P_\omega\\ x_a=\sum_\omega\sum_k x_k\delta_{ak}\le c_a, & \forall a\in E,\omega\in W,k\in P_\omega\\ x_k\ge 0, & \forall\omega\in W,k\in P_\omega.\end{cases}$$

上式称为广义Beckmann公式。下面的结论见 [9]。

利用Beckmann公式计算交通均衡流，需证明数学规划问题的解就是交通均衡流，因此引用了以下结论。

**引理3.1.** [9] 对具弧容量约束的交通均衡问题$\{\aleph,A,t\}$，如果对任何$a\in E$，$t_a(x)$在$R_+^m$上连续，并且$x\in A$是数学规划$Q$的解，那么，$x$是交通均衡流。用$P_\omega^s$表示可行流$x$关于OD点对$\omega$的所有饱和路径的集合，记

$$\overline{T}_\omega=\max_{k\in P_\omega}\{t_k:x_k>0\},$$

$$\widetilde{T}_\omega=\begin{cases}\overline{T}_\omega, & \text{如果}P_\omega^s=P_\omega\\ min_{k\in P_\omega\setminus P_\omega^s}\{t_k\}, & \text{如果}P_\omega^s\ne P_\omega.\end{cases}$$

## 4. 具弧容量约束交通均衡流算法

上面我们介绍了Beckmann公式推广式，这就为交通均衡流的计算提供了理论基础，因此我们在计算交通均衡流过程中，利用此公式，然后用Lingo软件计算出交通均衡流。

由于具弧容量约束的交通均衡问题适应性广，有很好的研究价值，因此在此公式基础上，构造了具弧容量约束的交通均衡流的Beckmann 公式推广式算法，并用具体的例子加以说明。

在计算具弧容量约束的交通均衡流的过程中，我们有如下假设：对任何$\alpha\in E$，$t_\alpha(\cdot)$在$R_+^r$上是连续的，此时，对任何$\alpha\in E$，$k\in P_\omega$，路径成本函数$t_\alpha(\cdot)$在$R_+^r$上是连续的，因此，交通均衡流存在。记

$$K=\cup_{\omega\in W},W=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_v\}.$$

其中，$v$为正整数。

## 5. 交通均衡流算法举例

在交通均衡流的计算中，对满足容量约束和需求约束的具弧容量约束的交通均衡流的计算问题，应用以上Beckmann公式推广式，构造了Beckmann 公式算法，分以下三个步骤完成：

第一步：对不同点对，把所有的从O点到D点的路径找出来，并把所有点对的路径表示出来。

第二步：对所有点对的所有路径，算出每条弧上所有路径经过的路径流，即把弧上所有路径经过的路径流相加。

第三步：构造以下数学规划问题($MP_2$)，利用Lingo软件求出具弧容量约束的交通均衡流。

$$
\begin{aligned}
&Minz(x) = \sum_{a\in E}\int_0^{x_a} t_a(x)dx \\
&s.t.\quad \begin{cases}
\sum_k x_k = d_\omega, & \forall\omega\in W, k\in P_\omega \\
x_a = \sum_\omega\sum_k x_k\delta_{ak} \le c_a, & \forall a\in E, \omega\in W, k\in P_\omega \\
x_k \ge 0. & \forall\omega\in W, k\in P_\omega
\end{cases}
\end{aligned}
$$

下面举例，用Beckmann公式推广式计算交通均衡流。

**例**：考虑具弧容量约束的交通均衡问题（见图 1），

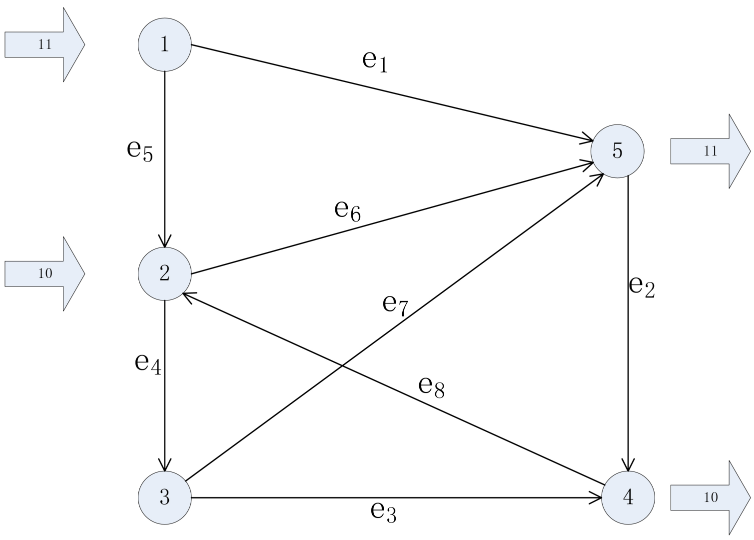


**Figure 1.** The figure of traffic network
**图 1.** 交通网络图

其中

$V = \{1,2,3,4,5,\}$，$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$,

$C$=$\{5,6,5,8,7,9,8,6\}$, $W$=$\{\omega_1,\omega_2\}$=$\{(1,5),(2,4)\}$, $D = (d_{\omega_1}, d_{\omega_2}) = (11,10)$.

并且有

$t_{e_1}(x_{e_1})$=$20x_{e_1}^2$+12, $t_{e_2}(x_{e_2})$=$2x_{e_2}^2$+80, $t_{e_3}(x_{e_3})$=$3x_{e_3}^2$+25,

$t_{e_4}(x_{e_4})$=$3x_{e_4}^2$+15，$t_{e_5}(x_{e_5})$=$x_{e_5}^2$+60，$t_{e_6}(x_{e_6})$=$4x_{e_6}^2$+30，

$t_{e_7}(x_{e_7})$=$3x_{e_7}^2$+113，$t_{e_8}(x_{e_8})$=$6x_{e_8}$。

由图知

第一步：对O/D点对$\omega 1$=(1,5)，$P_{\omega 1}$包含路径$l_1$=$\{e_1\}$，$l_2$=$\{e_5e_6\}$,，$l_3$=$\{e_5e_4e_7\}$;

对O/D点对$\omega 2$=(2,4)，$P_{\omega 2}$ 包含路径$l_4$=$\{e_6e_2\}$,，$l_5$=$\{e_4e_3\}$，$l_6$=$\{e_4e_7e_2\}$。

第二步：记

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)^T\in R_+^6.$$

其中$x_j$表示路径$l_j$上的流量$(j=1,2,\cdots,6)$，因此，有

$x_{e_1}=x_1$，$x_{e_2}=x_4+x_6$，$x_{e_3}=x_5$，

$x_{e_4}=x_3+x_{e_5}+x_{e_6}$，

$x_{e_5}=x_2+x_{e_3}$，$x_{e_6}=x_2+x_4$，

$x_{e_7}=x_3+x_6$，$x_{e_8}=0$，

可知

$\int_0^{x_{e_1}}t_{e_1}(x)dx=\int_0^{x_{e_1}}(20x^2+12)dx=\frac{20}{3}x_{e_1}^3+12x_{e_1}=\frac{20}{3}(x_1)^3+12x_1)$,

$\int_0^{x_{e_2}}t_{e_2}(x)dx=\int_0^{x_{e_2}}(2x^2+80)dx=\frac{2}{3}x_{e_2}^3+80x_{e_2}=\frac{2}{3}(x_4+x_6)^3+80(x_4+x_6)$,

$\int_0^{x_{e_3}}t_{e_3}(x)dx=\int_0^{x_{e_3}}(3x^2+25)dx=x_{e_3}^3+25x_{e_3}=x_5^3+25x_5$,

$\int_0^{x_{e_4}}t_{e_4}(x)dx=\int_0^{x_{e_4}}(3x^2+15)dx=x_{e_4}^3+15x_{e_4}=(x_3+x_5+x_6)^3+15(x_3+x_5+x_6)$,

$\int_0^{x_{e_5}}t_{e_5}(x)dx=\int_0^{x_{e_5}}(x^2+60)dx=\frac{1}{3}x_{e_5}^3+60x_{e_5}=\frac{1}{3}(x_2+x_3)^3+15(x_2+x_3)$,

$\int_0^{x_{e_6}}t_{e_6}(x)dx=\int_0^{x_{e_6}}(4x^2+30)dx=\frac{4}{3}x_{e_6}^3+30x_{e_6}=\frac{4}{3}(x_2+x_4)^3+30(x_2+x_4)$,

$\int_0^{x_{e_7}}t_{e_7}(x)dx=\int_0^{x_{e_7}}(3x^2+113)dx=x_{e_7}^3+113x_{e_7}=(x_3+x_6)^3+113(x_3+x_6)$,

第三步：Beckmann公式推广式$MP_3$如下

$Minz(x)=\frac{20}{3}(x_1)^3++12x_1+\frac{2}{3}(x_4+x_6)^3+80(x_4+x_6)+x_5^3+25x_5+(x_3+x_5+x_6)^3+15(x_3+x_5+x_6)+\frac{1}{3}(x_2+x_3)^3+15(x_2+x_3)+\frac{4}{3}(x_2+x_4)^3+30(x_2+x_4)+(x_3+x_6)^3+113(x_3+x_6)$

$$s.t\begin{cases}x_1+x_2+x_3=11\\x_4+x_5+x_6=10\\x_4+x_6\le 6,x_2+x_3\le 7\\x_2+x_4\le 9,x_3+x_6\le 8\\x_3+x_5+x_6\le 8,0\le x_2\\0\le x_5\le 5,0\le x_1\le 5\\0\le x_3,0\le x_4,0\le x_6\end{cases}$$

用Lingo软件，可以算出其均衡流为(A为可行流集合)

$$x=(4.58,6.09,0.33,2.58,5.00,2.42)^T\in A.$$

通过此例可以看出，在具弧容量约束交通均衡流的计算中，把交通均衡流的计算转化为数学规划问题，利用Beckmann公式推广式构造算法，是一种行之有效的方法，即为交通均衡流的计算提供了理论基础，又能应用于实际。

# 基金项目

重庆城市职业学院科研项目(No.XJKJ202102004)。

# 参考文献


[1] Wardrop, J. (1952) Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II*, **1**, 325-378. https://doi.org/10.1680/ipeds.1952.11259

[2] Beckmann, M.J., McGuire, C.B. and Winsten, C.B. (1956) Studies in the Economics of Transportation. Yale University Press, New Haven.

[3] Lin, Z. (2010) The Study of Traffic Equilibrium Problems with Capacity Constraints of Arcs. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 2280-2284. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.07.002

[4] Lin, Z. (2010) On Existence of Vector Equilibrium Flows with Capacity Constraints of Arcs. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **72**, 2076-2079. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.10.007

[5] Chen, A., Zhou, Z. and Xu, X.D. (2012) A Self-Adaptive Gradient Projection Algorithm for the Nonadditive Traffic Equilibrium Problem. *Computers and Operations Research*, **39**, 127-138. https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.02.018

[6] Xu, Y.D. and Li, S.J. (2013) Optimality Conditions for Generalized Ky Fan Quasi-Inequalities with Applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **157**, 663-684. https://doi.org/10.1007/s10957-012-0242-z

[7] Xu, Y.D. and Li, S.J. (2014) Vector Network Equilibrium Problems with Capacity Constraints of Arcs and Nonlinear Scalarization Methods. *Applicable Analysis*, **93**, 2199-2210. https://doi.org/10.1080/00036811.2013.875160

[8] Luc, D.T. and Phuong, T.T.T. (2016) Equilibrium in Multi-Criteria Transportation Networks. *Journal of Optimization Theory Applications*, **169**, 116-147. https://doi.org/10.1007/s10957-016-0876-3

[9] Zhi, L. (2015) An Algorithm for Traffic Equilibrium Flow with Capacity Constraints of Arcs. *Journal of Transportation Technologies*, **5**, 240-246. https://doi.org/10.4236/jtts.2015.54022

[10] Chiou, S.W. (2010) An Efficient Algorithm for Computing Traffic Equilibria Using TRANSYT Model. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 3390-3399. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.02.028

[11] Xu, M., Chen, A., Qu, Y. and Gao, Z. (2011) A Semismooth Newton Method for Traffic Equilibrium Problem with a General Nonadditive Route Cost. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 3048-3062. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.12.021