Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(1), 325-331
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121035

3阶零对角组合对称符号模式矩阵

蒋思源，田　岩*

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2022年12月28日；录用日期：2023年1月24日；发布日期：2023年1月31日

摘　要

本文基于组合对称符号模式矩阵的结构特点，考虑了零对角组合对称符号模式矩阵，讨论了3阶零对角组合对称符号模式矩阵是否允许代数正以及要求代数正。利用组合矩阵论和图论的理论，借助Maple软件，通过特征值的方法，分别给出了3阶零对角组合对称符号模式矩阵是允许代数正以及要求代数正的等价条件，从而确定了允许代数正的3阶零对角组合对称符号模式矩阵和要求代数正的3阶零对角组合对称符号模式矩阵的具体结构。

关键词

符号模式矩阵，零对角，组合对称，允许代数正，要求代数正

Zero Diagonal Combinatorial Symmetric Sign Pattern Matrices with Order 3

Siyuan Jiang, Yan Tian*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 24th, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

Based on the structural characteristics of the combinatorial symmetric matrix, the zero diagonal combinatorial symmetric sign pattern matrices are considered, and whether the zero diagonal combinatorial symmetric sign pattern matrices with order 3 allow algebraic positivity and require algebraic positivity are discussed. By using the theory of combinatorial matrix theory and graph theory, with the help of Maple software and the method of eigenvalues, this paper gives the equivalent conditions that the zero diagonal combinatorial symmetric sign pattern matrices allow algebraic positivity and require algebraic positivity, respectively, thus determines the specific structures of the zero diagonal combinatorial symmetric sign pattern matrices with order 3 that

文章引用: 蒋思源, 田岩. 3 阶零对角组合对称符号模式矩阵[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 325-331.
DOI: 10.12677/aam.2023.121035

allow algebra positive and the zero diagonal combinatorial symmetric sign pattern matrices with order 3 that require algebraic positivity.

Keywords

Sign Pattern Matrix, Zero Diagonal, Combinatorial Symmetric, Allow Algebraic Positivity, Require Algebraic Positivity

1. 引言

符号模式矩阵主要通过实矩阵的元素符号来研究实矩阵具有的仅与其元素的符号有关而与元素的数量大小无关的组合性质，它是组合矩阵论的一个重要问题。C. Eschenbach [1]于 1987 年引入并研究了符号模式允许和要求某种性质。2016 年，S. Kirkland、P. Qiao 和 X.Z. Zhan [2]引入并研究了代数正矩阵。同时，他们首次提出了符号模式矩阵要求代数正和允许代数正这两个重要问题。2019 年，J.L. Abagat [3]等讨论了 3 阶不可约符号模式矩阵，分别给出了符号模式矩阵要求代数正、允许代数正非要求代数正以及非允许代数正的刻画。2022 年，A. Biswas 和 S. Kundu [4]从三阶零对角的对称符号模式矩阵出发，对所有 3 阶对称符号模式矩阵要求代数正进行了刻画。同年，S. Das [5]给出了符号模式矩阵允许代数正的充分条件以及从低阶构造高阶代数正矩阵的方法。

本文考虑 3 阶零对角组合对称符号模式矩阵，研究其是否允许代数正以及要求代数正。分别给出 3 阶零对角组合对称符号模式矩阵不是允许代数正、允许代数正非要求代数正以及要求代数正的刻画。

符号模式矩阵(简称符号模式)是指所有元素都来自集合 $\{+,-,0\}$ 的矩阵。任意实矩阵 $A=(a_{ij})$，以 a_{ij} 的符号为元素构成的符号模式矩阵称为 A 的符号模式矩阵。$Q(A)$ 表示与符号模式矩阵 A 具有相同符号的实矩阵构成的集合。设符号模式矩阵 A 具有性质 P，若 $Q(A)$ 中每一个矩阵都有性质 P，则称符号模式矩阵 A 要求 P。若 $Q(A)$ 中存在一个矩阵具有性质 P，则称符号模式矩阵 A 允许 P。

2. 预备知识

以下是本文用到的基本概念以及相关结论。

定义 1 [2]设 A 是实方阵，如果存在一个实系数多项式 $f(x)$，使得 $f(A)$ 是一个正矩阵，则称 A 是代数正矩阵。

定义 2 设 A 是 n 阶矩阵(符号模式矩阵)，若存在置换矩阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 其中 B,D 是阶数小于 n 的方阵，则称 A 为可约的。否则，称 A 是不可约矩阵(不可约符号模式矩阵)。

定义 3 [4]如果矩阵 A 的对角线上的所有元素都为 0，那么 A 称为零对角矩阵。

定义 4 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶符号模式矩阵，若 $a_{ij}\neq 0 \Leftrightarrow a_{ji}\neq 0$，则称 A 为组合对称符号模式矩阵。

定义 5 设 A 是 n 阶符号模式矩阵，若 $A=A^{\mathrm{T}}$，则称 A 为对称符号模式矩阵。

引理 1 [2]设 A 是 n 阶实矩阵，A 是代数正矩阵当且仅当存在一个次数小于等于 $n-1$ 的实系数多项式 $f(x)$，使得 $f(A)>0$。

引理 2 [2]如果 A 是一个不可约的实矩阵，并且非对角线上的元素都是非负的(或非正的)，那么 A 是代数正的。

引理 3 [2]如果一个符号模式矩阵允许代数正，那么它的每行和每列都包含+，或者它的每行每列都包含−。

根据文献[2]中的引理 6，可得：

引理 4 允许代数正的符号模式矩阵都不可约。

引理 5 [3]如果 A 是代数正矩阵，那么下列矩阵也是代数正矩阵：

1) A^{T}；

2) $-A$；

3) PAP^{T} 对于任意置换矩阵 P；

4) $\beta A+\alpha I$ 是代数正的，其中 $\alpha \in R, \beta \in R\setminus\{0\}$。

引理 6 [4]一个实对称矩阵是代数正的当且仅当它有一个单特征值以及对应正的右特征向量。

引理 7 [6]设 A 是一个 n 阶方阵，那么 A 是不可约的当且仅当它的有向图 $D(A)$ 是强连通的。

引理 8 [7]设 A 是不可约符号模式矩阵，若 A 中除对角线以外的非零元符号都相同，则 A 要求代数正。

在本文中，矩阵 A 的第 i 行 j 列元素用 $A_{(i,j)}$ 来表示，且研究的矩阵都是实方阵。

3. 主要结论

设 3 阶零对角组合对称符号模式矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a' & 0 & c \\ b' & c' & 0 \end{pmatrix}$，其中 $a,b,c,a',b',c' \in \{+,-,0\}$。

若 a,b,c 全为零，则 A 为零矩阵；若 a,b,c 中两个为零，则 A 可约。由引理 4 可知，A 不是允许代数正。因此，下面考虑 a,b,c 中至多含有一个零。

(一) 若 a,b,c 中含有一个零，则 a,b,c 的取值为：

$$(0,+,+),\ (0,+,-),\ (0,-,+),\ (0,-,-),\ (+,0,+),\ (+,0,-),$$

$$(-,0,+),\ (-,0,-),\ (+,+,0),\ (+,-,0),\ (-,+,0),\ (-,-,0).$$

根据引理 5，只需考虑 $(0,+,+)$，$(0,+,-)$ 两种情况。

① 当 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$ 时，因为 $A_{(1,3)}A_{(3,2)}A_{(2,3)}A_{(3,1)} \neq 0$，所以 $D(A)$ 强连通。由引理 7 可知，A 不可约。再根据引理 8，A 要求代数正。

② 当 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & - \\ + & - & 0 \end{pmatrix}$ 时，由引理 3 可知，A 不是允许代数正。

(二) 若 a,b,c 都不为零，则由于 A 是零对角组合对称符号模式矩阵，故 a',b',c' 中也全不为零。下面分别考虑符号模式矩阵 A 对称与不对称两种情况。

1) 若 A 对称，则只需考虑 a,b,c 的取值，故 a,b,c 的取值为

$$(+,+,+),\ (+,+,-),\ (+,-,+),\ (+,-,-),\ (-,+,+),\ (-,+,-),\ (-,-,+),\ (-,-,-).$$

根据引理 5，只需考虑 $(+,+,+)$，$(+,+,-)$ 这两种情况。

① 当 $A=\begin{pmatrix}0&+&+\\+&0&+\\+&+&0\end{pmatrix}$ 时，因为 $A_{(1,2)}A_{(2,3)}A_{(3,1)}\neq 0$，所以 $D(A)$ 强连通。由引理 7 可知，A 不可约，再根据引理 8，A 要求代数正。

② 当 $A=\begin{pmatrix}0&+&+\\+&0&-\\+&-&0\end{pmatrix}$ 时，

i) $Q(A)$ 中存在实矩阵

$$B_1=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\1&-2&0\end{pmatrix},$$

具有单特征值 $\sqrt{3}-1$ 以及对应的右的正特征向量 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1},1,1\right)$，故由引理 6 可知，$B_1$ 是代数正矩阵，所以 A 允许代数正。

ii) $Q(A)$ 中存在实矩阵

$$B_2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix},$$

存在单特征值−2，但对应的右特征向量不是正的。由引理 6 可知，B_2 不是代数正矩阵，故 A 不是要求代数正。

2) 若 A 不对称，则根据引理 5，只需考虑 a,b,c 的取值为 $(+,+,+)$，$(+,+,-)$，$(+,-,+)$，$(+,-,-)$ 即可。

a) 若 a,b,c 为 $(+,+,+)$，则 a',b',c' 的取值为：

$$(+,+,-),\ (+,-,+),\ (+,-,-),\ (-,+,+),\ (-,+,-),\ (-,-,+),\ (-,-,-).$$

根据引理 5，只需考虑 a',b',c' 的取值为 $(+,+,-)$，$(+,-,-)$，$(-,-,-)$，$(-,+,-)$ 这四种情况。

① 若 $A=\begin{pmatrix}0&+&+\\+&0&+\\+&-&0\end{pmatrix}$，则

i) $Q(A)$ 中存在实矩阵

$$B_1=\begin{pmatrix}0&1&\sqrt{2}\\1&0&1\\\sqrt{2}&-1&0\end{pmatrix},$$

具有单特征值 $\sqrt{2}$ 以及对应的右的正特征向量 $(3,2\sqrt{2},1)$，故由引理 6 可知，B_1 是代数正矩阵，所以 A 允许代数正。

ii) $Q(A)$ 中存在实矩阵

$$B_2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix},$$

存在单特征值$1,0,-1$，但对应的右特征向量都不是正的，由引理 6 可知，B_2不是代数正矩阵，故A不是要求代数正。

② 若$A=\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$，则由引理 3 可知，$A$不是允许代数正。

③ 若$A=\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & + \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$，则由引理 3 可知，$A$不是允许代数正。

④ 若$A=\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}$，则

i) $Q(A)$中存在实矩阵

$$B_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{5} \\ -1 & 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix},$$

具有单特征值 2 以及对应的右的正特征向量$\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$，故由引理 6 可知，$B_1$是代数正矩阵，所以$A$允许代数正。

ii) $Q(A)$中存在实矩阵

$$B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

存在单特征值$-2,-1,3$，但对应的右特征向量都是不是正的，由引理 6 可知，B_2不是代数正矩阵，故A不是要求代数正。

b) 若a,b,c为$(+,+,-)$，则a',b',c'的取值为：

$(+,+,+)$，$(+,-,-)$，$(+,-,+)$，$(-,+,+)$，$(-,+,-)$，$(-,-,+)$，$(-,-,-)$。

根据引理 5，只需考虑$(+,-,-)$这种情况。

若$A=\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$，则由引理 3 可知，$A$不是允许代数正。

c) 若a,b,c为$(+,-,-)$，则a',b',c'的取值为：

$(+,+,+)$，$(+,+,-)$，$(+,-,+)$，$(-,+,+)$，$(-,+,-)$，$(-,-,+)$，$(-,-,-)$。

根据引理 5，只需考虑$(+,+,-)$这种情况。

若$A=\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ + & 0 & - \\ + & - & 0 \end{pmatrix}$，与(b)中情况置换相似，则由引理 5 可知，$A$也不是允许代数正。

d) 若 a,b,c 为 $(+,-,+)$，则 a',b',c' 的取值为：

$$(+,+,+)，(+,+,-)，(+,-,-)，(-,+,+)，(-,+,-)，(-,-,+)，(-,-,-)。$$

根据引理 5，只需考虑 $(-,+,-)$ 这种情况。

若 $A=\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}$，则 $Q(A)$ 中任取实矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{pmatrix},$$

其中 a,b,c,a',b',c' 均为正实数，存在实系数多项式 $f(x)$，使得 $f(M)=\alpha M^2+\beta M+\gamma>0$，其中 $\alpha=1$，γ 充分大，

$$\max\left\{-\frac{bc'}{a},-\frac{ba'}{c},-\frac{a'c'}{b'}\right\}<\beta<\min\left\{-\frac{ac}{b},-\frac{cb'}{a'},-\frac{ab'}{c'}\right\}。$$

因此由引理 1 知，A 要求代数正。

以下是本文的主要定理：

定理 1 设 A 是 3 阶零对角组合对称符号模式矩阵，A 允许但不要求代数正当且仅当 A 或 $-A$ 置换相似于 S_1 中的符号模式矩阵

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & - \\ + & - & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}\right\}。$$

定理 2 设 A 是 3 阶零对角组合对称符号模式矩阵，A 要求代数正当且仅当 A 或 $-A$ 置换相似于 S_1 中的符号模式矩阵

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}\right\}。$$

4. 结论

本文主要通过对 3 阶零对角组合对称符号模式矩阵的研究，分别给出 3 阶零对角组合对称符号模式矩阵不是允许代数正、允许代数正以及要求代数正的等价条件。在此基础之上，给出 3 阶零对角组合对称符号模式矩阵允许代数正且要求代数正的充分必要条件。本文对于研究其它类型的符号模式矩阵的允许代数正和要求代数正具有借鉴意义。

基金项目

辽宁省教育厅自然科学研究青年项目(LQ2020021)。

参考文献

[1] Eschenbach, C.A. (1987) Eigenvalue Classification in Qualitative Matrix Analysis. Clemson University, South Carolina.

[2] Kirkland, S., Qiao, P. and Zhan, X. (2016) Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **504**, 14-26. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.049

[3] Abagat, J.L. and Pelejo, D.C. (2019) On Sign Pattern Matrices That Allow or Require Algebraic Positivity. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **35**, 331-356. https://doi.org/10.13001/1081-3810.3862

[4] Biswas, A. and Kundu, S. (2022) On Algebraically Positive Matrices with Associated Sign Patterns. *Resonance*, **27**, 1211-1235. https://doi.org/10.1007/s12045-022-1415-1

[5] Das, S. (2022) Sign Patterns That Allow Algebraic Positivity. *Linear Algebra and Its Applications*, **653**, 151-182. https://doi.org/10.1016/j.laa.2022.08.007

[6] Brualdi, R.A. and Ryser, H.J. (1991) Combinatorial Matrix Theory. Cambridge University Press, New York, 55. https://doi.org/10.1017/CBO9781107325708

[7] Das, S. and Bandopadhyay, S. (2019) On Some Sign Patterns of Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **562**, 91-122. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.10.007