Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(5), 2200-2206
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125225

关于一类具有特殊对称性的牛顿方程周期解的研究

刘宝婷

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2023年4月19日；录用日期：2023年5月11日；发布日期：2023年5月22日

摘 要

近年来，对牛顿方程周期解的研究引起了国内外学者的广泛关注。因此，本文对一类具有特殊对称性的牛顿方程非常数周期解存在性和稳定性的研究现状进行了梳理。

关键词

牛顿方程，周期解，存在性，稳定性

A Study on the Periodic Solutions of a Class of Newton Equations with Special Symmetry

Baoting Liu

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Apr. 19th, 2023; accepted: May 11th, 2023; published: May 22nd, 2023

Abstract

In recent years, the study of periodic solutions to Newton's equations has attracted widespread attention from domestic and foreign scholars. Therefore, this paper reviews the current research status on the existence and stability of non-constant periodic solutions in a class of Newton equations with Special Symmetry.

Keywords

Newton Equation, Periodic Solutions, Existence, Stability

文章引用: 刘宝婷. 关于一类具有特殊对称性的牛顿方程周期解的研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2200-2206.
DOI: 10.12677/aam.2023.125225

1. 引言

微分方程[1]产生于 17 世纪，是一门既具有理论研究意义又具有实际应用价值的学科，它的形成和发展与力学、物理学、化学、天文学、生物学等学科有着紧密的联系。人类社会中的许多自然现象和物体运动规律都可用微分方程来描述，比如人口预测模型、生物繁衍问题、飞机飞行的稳定性、自动控制、各种电子回路的设计等。总之，构建微分方程模型是人类认识自然和进行社会实践的重要方法。

牛顿方程是微分方程中一类特殊的二阶方程。最初，对牛顿方程的研究起源于对单摆振动方程[2] [3] [4]的研究。之后，希尔方程[5]的发展促进了牛顿方程理论的成熟。因此，众多学者展开了对牛顿方程的研究并且对其一般研究的内容有：有界解[6]、调和解[7]、拟周期解[8]、周期解的存在性及稳定性等。周期运动在自然界和人类活动领域中都是十分重要的现象。天体力学领域中航天器、行星的运行以及机械力学领域中驱动器的构造、摆钟的运动等都能体现物体的周期运动，而对该类问题的研究可转化为对牛顿方程周期解的研究。因此，对牛顿方程周期解的研究一直是天体力学和机械力学领域中的热点话题。例如，丁同仁和丁伟岳[9]利用 Poincare-Birkhoff 不动点定理给出了方程 $\ddot{x}+g(x)=f(t)$ 非共振周期解的存在性条件。Wang 和 Li [10]利用最优化控制方法研究了 Duffing 方程周期解的存在唯一性。Chu 和 Li [11]应用 Leray-Schauder 非线性抉择定理和锥不动点定理研究了具有奇异非线性扰动的 Hill 方程的正周期解。学术界对牛顿方程周期解的研究还在不断发展中[12] [13] [14]。下面本文对一类具有特殊对称性质的牛顿方程的研究现状进行阐述。

2. 研究现状

本文主要考虑一类具有特殊对称性质的牛顿方程，描述如下：

$$\ddot{x}+F(x,t,\sigma)=0 \tag{1}$$

其中，F 为关于 $(x,t,\sigma)\in\mathbb{R}^3$ 的光滑函数，并且满足以下条件：

$$\begin{cases} F(-x,t,\sigma)=-F(x,t,\sigma), \\ F(x,-t,\sigma)=F(x,t,\sigma), \\ F(x,t+T_0,\sigma)=F(x,t,\sigma), \\ F(x,t,0)=f(x), \\ xf(x)>0, x\neq 0, \end{cases}$$

当 $\sigma=0$ 时，方程(1)对应如下自治方程

$$\ddot{x}+f(x)=0 \tag{2}$$

令 $E(x):=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$。显然，$E(x)$ 为偶函数，$E(0)=0$ 且 $E(x)>0$，$x\neq 0$。可得知方程(2)的解 $x(t)$ 满足

$$C_h:\frac{1}{2}\dot{x}^2(t)+E(x(t))\equiv h \tag{3}$$

其中，$h\in[0,+\infty)$。当 $h=0$ 时，C_h 对应于平衡点 $x(t)\equiv 0$。当 $0<h<E_{\max}:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}E(x)$ 时，C_h 对应于方程

(2)的非常数周期解。

本文主要考虑具有上述对称性质的两类模型：Sitnikov 问题和静电梳齿驱动器模型。接下来本文具体阐述这两种模型周期解的研究现状。

2.1. Sitnikov 问题的国内外研究现状

N (N 为任意正整数)体问题的发展已有三百年的历史，其主要研究的是：对任意给定质量、初始速度和初始位置的 N 个质点，在万有引力相互作用下的运动规律。其中，对 N 体问题周期解的研究受到了众多学者的广泛关注。当 $N=1$ 时，称之为单体问题，单个质点的运动轨迹只能是匀速直线运动。当 $N=2$ 时，称之为二体问题(或开普勒问题)，二体问题的周期解为一椭圆。当 $N=3$ 时，这是著名的三体问题，对一般三体问题的求解是不易的。欧拉和拉格朗日发现的几个特殊性周期解对三体问题周期解的研究作出了突破性的贡献。之后，庞加莱引入了庞加莱映射、后继函数等数学工具，极大地促进了三体问题周期解的发展。对于 $N>3$ 的 N 体问题，根本无法求出其解析周期解，现在采用的研究方法主要是数值计算和定性分析的方法。

Sitnikov 问题是天体力学中一种特殊的限制性牛顿 N 体问题，其描述的是：在万有引力的作用下，N 个具有相同质量的质点(称之为基本质点)围绕其共同的质心以离心率 $e\in[0,1)$ 做相同的椭圆(或圆周)运动，以这 N 个基本质点共同的质心为坐标原点 O，运动平面为 OXY 平面，建立空间直角坐标系 $OXYZ$。一质量无穷小的质点 P_0 在基本质点形成的引力场作用下沿 OZ 轴运动。由于质点 P_0 的质量无穷小，因此对其他质点运动的影响忽略不计。当 $N=2$ 时，我们称该模型为经典椭圆型(或圆型) Sitnikov 三体问题。当 $N\geq 3$ 时，我们称该模型为广义椭圆型(或圆型) Sitnikov($N+1$)体问题。

研究 Sitnikov 问题的周期解一直是众多学者的研究热点。1907 年，Pavanini [15]用 Weierstrassian 椭圆函数表示了经典圆型 Sitnikov 三体问题的解。四年后，MacMillan [16]用 Jacobian 椭圆函数表示了这些解。1960 年，Sitnikov [17]第一次证明了 Sitnikov 问题中存在振荡解，此后，Sitnikov 问题引起了广泛的关注。1978 年，Markello [18]研究了经典 Sitnikov 三体问题直线型振荡解的分岔情况。另外，还有其他学者研究了经典 Sitnikov 三体问题振荡解的情况[19]-[24]。

经典 Sitnikov 三体问题的周期解一直是国内外学者关注的对象。Cabral 和 Xia [25]应用次调和 Melnikov 方法，证明了对于离心率 $e>0$ 充分小时，经典椭圆型 Sitnikov 三体问题对称周期解的存在性。在这之后，Corbera 和 Llibre [26] [27]应用 Poincare 解析延拓方法同样证明了其对称周期解的存在性。此外，Llibre 和 Ortega [28]利用全局延拓法，证明了对于任意离心率 $e\in[0,1)$，经典椭圆型 Sitnikov 三体问题中偶周期解的存在性。Ortega [29]应用打靶法及 Sturm 振动理论，得到了对于任意离心率 $e\in[0,1)$，经典椭圆型 Sitnikov 三体问题奇周期解的存在性。Belbruno [30]等人应用数值方法证明了经典椭圆型 Sitnikov 三体问题对称周期解的存在性。Jimenez 和 Escalona [31]同样应用数值计算构造了经典椭圆型 Sitnikov 三体问题的对称周期解。

近年来，广义 Sitnikov($N+1$)体问题引起了人们的关注。Bountis [32]等人分析了广义圆型 Sitnikov($N+1$)体问题中垂直运动的稳定性及其在三维周期解族中的分岔。Rivera [33] [34]等人应用全局延拓的方法，证明了对任意离心率 $e\in[0,1)$，广义椭圆型 Sitnikov($N+1$)体问题偶周期解的存在性。此外，也有其他学者研究了广义椭圆型 Sitnikov($N+1$)体问题周期解的情况[35] [36]。

关于 Sitnikov 问题周期解稳定性的研究是动力系统发展过程中的一个难点内容。Ortega [37]应用三阶近似的方法研究了经典 Sitnikov 三体问题平衡点的 Lyapunov 稳定性。Misquero [38]研究了广义 Sitnikov($N+1$)体问题平衡点的 Lyapunov 稳定性。对于非定常周期解稳定性的研究虽然已有一些解析式的推导，但由于非定常周期解和方程的非自治性所带来的困难，这些结果大多是数值的。例如，Galán [39] [40]等人应用

数值计算方法研究了经典椭圆型 Sitnikov 三体问题偶周期解的稳定性和分岔。此外，章梅荣[41]等人应用希尔方程理论建立了一般非线性牛顿方程非定常周期解的稳定性判据，这是一项开创性的工作，实现了应用解析的方法研究 Sitnikov 问题周期解的稳定性。并且 Cen [42] [43]等人应用这些稳定性判据分析了经典椭圆型 Sitnikov 三体问题奇偶周期解的线性稳定性与 Lyapunov 不稳定性。最近，Cheng [44]等人研究了广义椭圆型 Sitnikov($N+1$)体问题对称周期解的线性稳定性与 Lyapunov 不稳定性。

对 Sitnikov 问题周期解的研究具有广泛的实际意义，特别是人造天体出现后，Sitnikov 问题周期解的研究为月球火箭和行星际飞行器运动的力学模型提供了理论支撑，同时对航空航天领域中航天器的设计与构造具有重要的参考价值。

2.2. 静电梳齿驱动器模型的国内外研究现状

微机电系统(MEMS)的概念始于 20 世纪 80 年代，从广义上讲，MEMS 是以微电子、微机械以及材料科学为基础，研究、设计、制造具有特定功能的微型装置。随着时代的发展和科学的进步，MEMS 技术被广泛应用于汽车制造、生物医学、电子信息、航空航天等多个领域，并集成了当今许多尖端科技成果，比如汽车自动驾驶系统的设计、精密医疗器械的制造、传感器的制造[45]、光通信设备的制造[46]、飞机性能的提升等。总之，MEMS 有着广阔的应用前景，它是本世纪科技领域的重要技术之一。

静电梳齿驱动器是 MEMS 中应用最广泛的器件之一，最早由 Tang [47]等人在 1989 年提出，其本身结构可描述为：一质量为 m 的可移动电极，连接刚度系数为 k ($k>0$)的弹簧，它的上侧和下侧连接相同的电源。在静电力的作用下，可移动电极在两个固定电极之间纵向移动，并且当它位于固定电极的中心时，可移动电极与固定电极之间的距离为 d，称此模型为静电梳齿驱动器模型。根据牛顿第二定律，此模型中可移动电极的运动方程为

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\frac{4dh_0 xV_\delta^2(t)}{\left(d^2-x^2\right)^2},\quad |x|<d$$

其中，x 表示可移动电极静止时的垂直位移，$\omega^2=k/m$，$h_0=cl\varepsilon/2m>0$，ε 为真空介电常数，c 为电极的宽度，l 为电极在相互作用区域中的长度，并且 $V_\delta(t)$ 为输入电压。

静电梳齿驱动器中一个值得关注的问题是控制输入电压，避免可移动电极与固定电极之间的碰撞，即电容器吸合不稳定现象。Nathanson [48]和 Taylor [49]等人对这种不稳定现象的研究取得了开创性的成果。同时也有其他学者研究了这种不稳定现象[50] [51]，这些文献都体现了研究静电梳齿驱动器模型振荡运动的重要性。

一直到 2013 年，Gutierrez [52]等人首次利用拓扑和变分的方法研究了微机电系统周期振荡运动的存在性和稳定性。在这之后，对静电梳齿驱动器模型周期运动的研究引起了众多学者的广泛关注。2017 年，Alexander [53]等人运用全局延拓定理探究了静电梳齿驱动器模型偶周期解的存在性。2021 年，Núñez [54]等人运用打靶法及 Sturm 比较定理研究了静电梳齿驱动器模型奇周期解的存在性。目前，已有的文献主要研究了静电梳齿驱动器模型对称周期解的存在性，对其稳定性的分析尚未得到解决。

静电梳齿驱动器作为一种特殊的微机电系统，对其周期解的研究具有广泛的实际意义。它被广泛应用于传感器、加速度计和光通信器件等仪器上。此外，电子信息领域中微谐振器、微继电器、快门等电子元件的构造都需要其作为理论依据。同时，由于其广泛的应用，使静电梳齿驱动器成为研究者和设计者的研究热点。

3. 总结

一方面针对 Sitnikov 问题，目前大多数学者从数值计算和解析分析两个方面讨论了经典 Sitnikov 三

体问题奇偶周期解的存在性。部分学者研究了广义 Sitnikov($N+1$)体问题的偶周期解的存在性。因此，对广义 Sitnikov($N+1$)体问题奇周期解的存在性有待研究。此外，虽然对 Sitnikov 稳定性的分析已有一些研究成果，但仍需进一步深化。

另一方面针对静电梳齿驱动器模型，目前已有的文献主要研究了静电梳齿驱动器模型奇偶周期解的存在性，对其奇偶周期解稳定性的分析有待解决。

参考文献

[1] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] Mawhin, J. (1987) Recent Results on Periodic Solutions of the Forced Pendulum Equation. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, **19**, 119-129.

[3] Mawhin, J. (1988) The Forced Pendulum: A Paradigm for Nonlinear Analysis and Dynamical Systems. *Expositiones Mathematicae*, **6**, 271-287.

[4] Salas, S. and Alvaro, H. (2020) Analytic Solution to the Pendulum Equation for a Given Initial Conditions. *Journal of King Saud University Science*, **32**, 974-978. https://doi.org/10.1016/j.jksus.2019.07.005

[5] Magnus, W. and Winkler S. (1966) Hill's Equations. John Wiley, New York.

[6] Yin, Z. (2006) Bounded Positive Solutions of Nonlinear Second-Order Differential Equations. *Differential Equations*, **42**, 26-36. https://doi.org/10.1134/S0012266106010034

[7] 陈太勇, 刘文斌, 张慧星, 等. 二阶微分方程奇调和解的存在性[J]. 应用泛函分析学报, 2006, 8(2): 130-138.

[8] Zhang, X. (2020) Quasi-Periodic Solutions for Duffing Equation with Jumping Term. *Periodical of Ocean University of China*, **50**, 145-150.

[9] Ding, T. and Ding, W. (1985) Resonance Problem for a Class of Duffing's Equations. *Chinese Annals of Mathematics Series B*, **6**, 427-432.

[10] Wang, H. and Li, Y. (1995) Periodic Solutions for Duffing Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **24**, 961-979. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00114-W

[11] Chu, J. and Li, M. (2008) Positive Periodic Solutions of Hill's Equations with Singular Nonlinear Perturbations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **69**, 276-286. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.05.016

[12] Georgiev, Z., Trushev, I., Todorov, T. and Uzunov, I. (2021) Analytical Solution of the Duffing Equation. *COMPEL—The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, **40**, 109-125. https://doi.org/10.1108/COMPEL-10-2019-0406

[13] Shadman, D. and Mehri, B. (2005) A Non-Homogeneous Hill's Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **167**, 68-75. https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.06.072

[14] Liang, S. (2019) Exact Multiplicity and Stability of Periodic Solutions for Duffing Equation with Bifurcation Method. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **18**, 477-493. https://doi.org/10.1007/s12346-018-0296-x

[15] Pavanini, G. (1907) Sopra una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema di tre corpi. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **13**, 179-202. https://doi.org/10.1007/BF02422989

[16] Macmillan, W.D. (1911) An Integrable Case in the Restricted Problem of Three Bodies. *The Astronomical Journal*, **27**, 625-626. https://doi.org/10.1086/103918

[17] Sitnikov, K. (1960) The Existence of Oscillatory Motions in the Three-Body Problem. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **133**, 303-306.

[18] Markellos, V. (1978) Bifurcations of Straight-Line Oscillations. *Astronomy and Astrophysics*, **67**, 229-240.

[19] Hagel, J. (1992) A New Analytic Approach to the Sitnikov Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **53**, 267-292. https://doi.org/10.1007/BF00052614

[20] Hagel, J. and Trenkler T. (1993) A Computer Aided Analysis of the Sitnikov Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **56**, 81-98. https://doi.org/10.1007/BF00699722

[21] Alfaro, J.M. and Chiralt, C. (1993) Invariant Rotational Curves in Sitnikov's Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **55**, 351-367. https://doi.org/10.1007/BF00692994

[22] Markeev, A.P. (2020) Subharmonic Oscillations in the Near-Circular Elliptic Sitnikov Problem. *Mechanics of Solids*, **55**, 1162-1171. https://doi.org/10.3103/S0025654420080154

[23] Shibayama, M. (2019) Variational Construction of Orbits Realizing Symbolic Sequences in the Planar Sitnikov Problem. *Regular and Chaotic Dynamics*, **24**, 202-211. https://doi.org/10.1134/S1560354719020060

[24] Abouelmagd, E.I., Guirao, J.L.G. and Pal, A.K. (2020) Periodic Solution of the Nonlinear Sitnikov Restricted Three-Body Problem. *New Astronomy*, **75**, Article ID: 101319. https://doi.org/10.1016/j.newast.2019.101319

[25] Xia, Z. and Cabral, H. (1995) Subharmonic Solutions in the Restricted Three-Body Problem. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **1**, 463-474. https://doi.org/10.3934/dcds.1995.1.463

[26] Corbera, M. and Llibre, J. (2000) Periodic Orbits of the Sitnikov Problem via a Poincaré Map. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **77**, 273-303. https://doi.org/10.1023/A:1011117003713

[27] Corbera, M. and Llibre, J. (2002) On Symmetric Periodic Orbits of the Elliptic Sitnikov Problem via the Analytic Continuation Method. *Contemporary Mathematics*, **292**, 91-127. https://doi.org/10.1090/conm/292/04918

[28] Llibre, J. and Ortega, R. (2008) On the Families of Periodic Orbits of the Sitnikov Problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **7**, 561-576. https://doi.org/10.1137/070695253

[29] Ortega, R. (2016) Symmetric Periodic Solutions in the Sitnikov Problem. *Archiv der Mathematik*, **107**, 405-412. https://doi.org/10.1007/s00013-016-0931-1

[30] Belbruno, E., Llibre, J. and Ollé, M. (1994) On the Families of Periodic Orbits which Bifurcate from the Circular Sitnikov Motions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **60**, 99-129. https://doi.org/10.1007/BF00693095

[31] Jiménez-Lara, L. and Escalona-Buendía, A. (2001) Symmetries and Bifurcations in the Sitnikov Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **79**, 97-117. https://doi.org/10.1023/A:1011109827402

[32] Bountis, T. and Papadakis, K.E. (2009) The Stability of Vertical Motion in the N-Body Circular Sitnikov Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **104**, 205-225. https://doi.org/10.1007/s10569-009-9194-5

[33] Rivera, A. (2013) Periodic Solutions in the Generalized Sitnikov (N+1)-Body Problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **12**, 1515-1540. https://doi.org/10.1137/120883876

[34] Beltritti, G. (2021) Periodic Solutions of a Generalized Sitnikov Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **133**, Article No. 6. https://doi.org/10.1007/s10569-021-10005-z

[35] Beltritti, G., Mazzone, F. and Oviedo, M. (2018) The Sitnikov Problem for Several Primary Bodies Configurations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **130**, Article No. 45. https://doi.org/10.1007/s10569-018-9838-4

[36] Beltritti, G. (2022) On the Global Families of Periodic Solutions of a Generalized Sitnikov Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **134**, 1-22. https://doi.org/10.1007/s10569-022-10068-6

[37] Ortega, R. (1996) Periodic Solutions of a Newtonian Equation: Stability by the Third Approximation. *Journal of Differential Equations*, **128**, 491-518. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0103

[38] Misquero, M. (2018) Resonance Tongues in the Linear Sitnikov Equation. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **130**, Article No. 30. https://doi.org/10.1007/s10569-018-9825-9

[39] Galán, J., Núñez. D. and Rivera, A. (2013) Quantitative Stability of Certain Families of Periodic Solutions in the Sitnikov Problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **17**, 52-77. https://doi.org/10.1137/17M1113990

[40] Galán, J., Núñez, D., Rivera, A.and Riccio, C. (2018) Stability and Bifurcations of even Periodic Orbits in the Sitnikov Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **130**, 82-101. https://doi.org/10.1007/s10569-018-9875-z

[41] Zhang, M.R., Cen, X.L. and Cheng, X.H. (2018) Linearized Stability and Instability of Nonconstant Periodic Solutions of Lagrangian Equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 4853-4866. https://doi.org/10.1002/mma.4935

[42] Cen, X.L., Cheng, X.H., Huang, Z.T. and Zhang, M. (2020) On the Stability of Symmetric Periodic Orbits of the Elliptic Sitnikov Problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **19**, 1271-1290. https://doi.org/10.1137/19M1258384

[43] Cen, X.L., Liu, C.J. and Zhang, M.R. (2021) A Proof for a Stability Conjecture on Symmetric Periodic Solutions of the Elliptic Sitnikov Problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **20**, 941-952. https://doi.org/10.1137/20M1349692

[44] Cheng, X., Wang, F. and Liang, Z. (2023) On the Stability of Symmetric Periodic Solutions of the Generalized Elliptic Sitnikov (N+1)-Body Problem. *Journal of Differential Equations*, **345**, 208-232. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.11.020

[45] 孙国琛, 张志强, 刘佳琦, 等. MEMS 微波功率传感器的系统级建模[J]. 电子器件, 2021, 44(6): 1353-1359.

[46] Chen, H., Chen, X., Lu, J., *et al.* (2020) Toward Long-Distance Underwater Wireless Optical Communication Based on a High-Sensitivity Single Photon Avalanche Diode. *IEEE Photonics Journal*, **12**, 1-10.

[47] Tang, W.C., Nguyen, T.H. and Howe, R.T. (1989) Laterally Driven Polysilicon Resonant Microstructures. *Sensors and Actuators A*, **20**, 25-32. https://doi.org/10.1016/0250-6874(89)87098-2

[48] Nathanson, H.C., Newell, W.E., Wickstrom, R.A., *et al.* (1967) The Resonant Gate Transistor. *IEEE Transactions on Electron Devices*, **14**, 117-133. https://doi.org/10.1109/T-ED.1967.15912

[49] Taylor, G.I. (1968) The Coalescence of Closely Spaced Drops When They Are at Different Electric Potentials. *Proceedings of the Royal Society of London*, **306**, 423-434. https://doi.org/10.1098/rspa.1968.0159

[50] Ai, S. and Pelesko, J.A. (2007) Dynamics of a Canonical Electrostatic MEMS/NEMS System. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **20**, 609-641. https://doi.org/10.1007/s10884-007-9094-x

[51] Elata, D. (2005) On the Static and Dynamic Response of Electrostatic Actuators. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, **53**, 373-384.

[52] Gutirrez, A. and Torres, P.J. (2013) Nonautonomous Saddle-Node Bifurcation in a Canonical Electrostatic MEMS. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**, Article ID: 1350088. https://doi.org/10.1142/S0218127413500880

[53] Gutierrez, A., Núñez, D. and Rivera, A. (2017) Effects of Voltage Change on the Dynamics in a Comb-Drive Finger of an Electrostatic Actuator. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **95**, 224-232. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.008

[54] Núñez, D., Larreal, O. and Murcia, L. (2021) Odd Periodic Oscillations in Comb-Drive Finger Actuators. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **61**, Article ID: 103347. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103347