Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 3011-3020
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126302

一类浅水波方程周期的非一致连续性

蔡森林

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2023年5月28日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

本文研究中等振幅浅水波模型的周期柯西问题，我们首先构造了两个解序列，他们在$H^s(\mathbb{T}), s > 3/2$中是有界的，并且在初值时刻区间收敛到零，但是这两个序列之间的距离的下界在任意时刻T是一个非零常数，这意味着方程的解映射在Sobolev空间中是非一致连续的。

关键词

柯西问题，非一致连续性，浅水波模型

Nonuniform Continuity of a Class of Shallow Water Wave Equation

Senlin Cai

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: May 28^{th}, 2023; accepted: Jun. 23^{rd}, 2023; published: Jun. 30^{th}, 2023

Abstract

In this paper, the periodic Cauchy problem of shallow water wave model with moderate amplitude is studied, we first construct two solution sequences, they are bounded in

文章引用: 蔡森林. 一类浅水波方程周期的非一致连续性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 3011-3020.
DOI: 10.12677/aam.2023.126302

$H^s(\mathbb{T}), s > 3/2$, and converge to zero at the initial time interval, but the bound of the distance between these two sequence is a non-zero constance at any time. This means that the solution mapping of the equation is non-uniformly continuous in Sobolev space.

Keywords

Cauchy Problem, Nonuniform Continuity, Shallow Water Wave

1. 引用

本文主要研究由Quirchmayr在文献 [1]推导出的具有高阶非线性项的浅水波方程的柯西问题

$$\begin{cases} \eta_t + \eta_x + \frac{3\epsilon}{2}\eta\eta_x + \delta^2(a\eta_{xxx} - \mu\eta_{xxt}) - \frac{3}{8}\varepsilon^2\eta^2\eta_x + \frac{3}{16}\varepsilon^3\eta^3\eta_x \\ = -\frac{15}{128}\varepsilon^4\eta^4\eta_x - \frac{1}{24}\varepsilon\delta^2(c\eta_x\eta_{xx} + d\eta\eta_{xxx}) - \frac{21}{256}\varepsilon^5\eta^5\eta_x \\ +\frac{27}{512}\varepsilon^6\eta^6\eta_x - \frac{1}{32}\varepsilon^2\delta^2(e\eta\eta_x\eta_{xx} + f\eta^2\eta_{xxx} + g\eta_x^3), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \eta(x,0) = \eta_0(x), & x \in \mathbb{R},\ t = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$\eta(x,t)$ 表示自由表面高度，常数ϵ, δ 分别表示振幅和浅度系数，a, c, d, e, f, g 表示和μ相关的常数并且μ是任意非零实数。方程(1.1)从重力水波控制方程推导并且参数分别取为$\delta \ll 1$, $\epsilon = O(\sqrt{\delta})$, 在文献 [1]中被称为大振幅波浪的浅水区域。

近年来，一些非线性模型被提出来解释一些重要现象，如文献 [2]中的KdV方程、文献 [3]中的Constantin-Lannes (CL)方程、文献 [4]中的Camassa-Holm (CH)方程等。学者们对这些模型解的性质做了广泛的研究，如解的局部适定性、全局解的存在性、破碎波以及孤立波等。其中最突出的例子就是中等振幅的浅水波Camassa-Holm 方程：

$$u_t - u_{xxt} + c_0u_x + 3uu_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0. \tag{1.2}$$

许多学者研究了与CH方程相关的浅水波相关的Hölder连续性、适定性、局部存在性、非一致连续性、破裂现象等(见 [5–9])，此外在文献 [10]中，作者运用Kato半群定理证明了它的适定性。但是我们可以发现KDV方程是小振幅的浅水波方程，而CH和CL则是中等振幅的方程，并且很多学者对他们的解的性质进行了广泛的研究，例如在文献 [11]中，作者建立了CL 方程周期解的破裂现象；

在文献 [12]中，Jiang和Zhou建立了一类新的在无穷远处代表衰退的尖点孤立波的存在，那么一个自然的问题是能否找到一个用于研究打振幅浅水波模型，恰巧Quirchmayr在文献 [1]中推导出了一个用于研究大振幅的浅水波方程，也就是本文研究的方程。虽然很多学者已经对方程的非一致连续性做了研究并且受文献 [13]的启发，值得注意的是，方程(1.1)、Constantin-Lannes方程和CH方程的特征分别是$a_1u + a_2u^2$, $\mu\alpha\theta^3 - \epsilon\mu\theta^3\gamma u$和$u$，显然本文所研究的方程存在平方项。因此，我们在后面的研究中使用更加复杂的变换来得到想要的结果。我们的主要结果如下：

定理1.1. *若存在初值$u_0(x) \in H^s(\mathbb{T})$且$s > 3/2$, 那么方程(1.1)初值到解的映射$u_0(x) \to u(t)$在任何有界集$H^s(\mathbb{T})$到$\mathcal{C}([0,T];H^s(\mathbb{T})) \times \mathcal{C}([0,T];H^{s-1}(\mathbb{T}))$是非一致连续的。*

定理1.1 告诉我们方程(1.1)的解在索伯列夫$H^s(\mathbb{T})$空间中是非一致连续的。本文结构如下。下一部分，我们回顾需要用到的不等式和基本定义，在第三部分，我们定义近似解并估计误差，在第四部分，我们估计近似解与真实解之间的误差并运用索伯列夫空间的插值不等式的性质，证明结果。

2. 预备知识

本文令算子$\Lambda = (1-\partial_x^2)^{1/2}$, 则作用于$L^2(\mathbb{R})$的算子$\Lambda^{-2}$可以用与它相关的格林函数$G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ 表示为

$$\Lambda^{-2}f(x) = (G * f)(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}f(y)dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

对于任意的$s \in \mathbb{R}$, 利用算子$\Lambda^s = (1-\partial_x^2)^{s/2}$定义下面的运算

$$\widehat{\Lambda^s f}(\xi) = (1+\xi^2)^{s/2}\hat{f}(\xi),$$

其中$\hat{f}(\xi)$ 表示傅里叶变换

$$\hat{f}(\xi) \doteq \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)dx, \xi \in \mathbb{R}.$$

那么对于任意的$f \in H^s(\mathbb{R})$ 有

$$\|f\|_{H^s} \doteq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2} < \infty.$$

为了使计算更加简便，我们做线性变换，设$\eta(x,t) = u(\theta x - \bar{a}t, t) - \bar{b}$, 其中$\theta = \frac{1}{\sqrt{\mu\delta}}$, 因此方程(1.1)可转化为

$$\begin{cases} u_t + (a_1u + a_2u^2)u_x = f(u,u_x), & x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \ t = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned} f(u,u_x) =& (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x(b_1u^2 + b_2u^3 + b_3u^4 + b_4u^5 + b_5u^6 + b_6u^7 + b_7u_x^2 \\ &+ b_8uu_x^2) + b_9(1-\partial_x^2)^{-1}u_x^3. \end{aligned} \tag{2.2}$$

在本文中，$\|f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}$, 符号$\lesssim$ 和$\gtrsim$ 被用来表示相应的包含一个常数的不等式．例

如$f(x) \lesssim g(x)$ 表示对于某些常数$c>0$, $f(x) \le cg(x)$. 我们还需要用到以下引理.

引理2.1. 如果$r>0$, 则$H^r \cap L^\infty$是一个代数. 此外

(i)若$r>0$, 则

$$\| fg \|_{H^r} \le c_r(\| f \|_{L^\infty} \| g \|_{H^r} + \| g \|_{L^\infty} \| f \|_{H^r});$$

(ii)若$r>1/2$, 则

$$\| fg \|_{H^{r-1}} \le c_r \| f \|_{H^r} \| g \|_{H^{r-1}};$$

(iii)若$0 \le r \le 1$, $s>3/2$, $r+s \ge 2$, 则

$$\| fg \|_{H^{r-1}} \le c_{r,s} \| f \|_{H^{s-1}} \| g \|_{H^{r-1}} .$$

这里的第二条是$Calderon-Coifman-Meyer$ 型交换子估计,见文献 [14].

引理2.2. (见 [15]中的引理1) 如果$[\Lambda^r, f]g = \Lambda^r(fg) - f\Lambda^r g$ 且$\Lambda = (1-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}}$, 则下面的交换子估计成立

(i)若$r>0$, 则

$$\| [\Lambda^r, f]g \|_{L^2} \le c_r(\| \partial_x f \|_{L^\infty} \| \Lambda^{r-1} g \|_{L^2} + \| \Lambda^r f \|_{L^2} \| g \|_{L^\infty});$$

(ii)若$r+1 \ge 0$, $s>3/2$, $r+1 \le s$, 则

$$\| [\Lambda^r \partial_x, f]g \|_{L^2} \le c_{r,s} \| f \|_{H^s} \| g \|_{H^r} .$$

引理2.3. (见 [16]) 假设$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ 且$f \in H_1^\sigma$. 则

$$\| f \|_{H^\sigma} \le \| f \|_{H^{\sigma_1}}^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} \| f \|_{H^{\sigma_2}}^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}} .$$

3. 构造近似解

在这一节中，我们考虑方程的近似解并且令方程(2.1)的近似解的形式为

$$u^{\omega,n}(x,t) = \omega n^{-1} - n^{-s} cos A, A = nx - (a_1\omega + a_1\omega^2\lambda^{-1})t, \tag{3.1}$$

其中ω等于1或者-1并且n取正整数。现在我们估计这些近似解的H^σ模范数的误差，将近似解$u^{\omega,n}(x,t)$ 代入方程(2.1), 我们可以得到以下误差：

$$F = u_t^{\omega,n}(x,t) + a_1 u^{\omega,n} + a_2 (u^{\omega,n})^2 u_x^{\omega,n} - f(u^{\omega,n}, u_x^{\omega,n}) \tag{3.2}$$

显然$u_t^{\omega,n} + a_1 u^{\omega,n} + a_2 (u^{\omega,n})^2 u_x^{\omega,n}$可以写成如下等式

$$u_t^{\omega,n} + a_1 u^{\omega,n} + a_2 (u^{\omega,n})^2 u_x^{\omega,n} = -1/2 a_1 \lambda^{-2s+1} sin 2A - a_1 \omega \lambda^{-2s} sin 2A + 1/2 a_2 \lambda^{-3s} sin 2A cos^2 A, \tag{3.3}$$

其中我们用到了性质$sin 2A = 2 sin A cos A$.

引理3.1. 令σ, α, β 属于实数，n属于正整数且$n \gg 1$, 则以下等式成立：

$$\| \, cos(n(x+\alpha)-\beta) \, \|_{H^\sigma} = \sqrt{2}\pi(1+n^2)^{\sigma/2} \approx n^\sigma. \tag{3.4}$$

如果（3.4）中cos换成sin仍然成立。则对于任意$s \geq 0$, 我们有

$$\| \, u^{\omega,n}(x,t) \, \|_{H^\sigma} = \| \, \omega n^{-1} - n^{-s} cosA, \|_{H^\sigma} \lesssim n^{-1} + n^{-s+\sigma}, \quad n \gg 1. \tag{3.5}$$

Proof. 这个引理的证明和文献 [17]中的证明类似，本文将不再进行证明。 □

下面证明(3.3)的H^σ模，使用引理3.1，我们可以得到

$$\| -1/2a_1\lambda^{-2s+1} sin2A - a_1\omega\lambda^{-2s} sin2A + 1/2a_2\lambda^{-3s} sin2Acos^2A\|_{H^\sigma} \lesssim \lambda^{-2s+1+\sigma} + \lambda^{-2s+\sigma} + \lambda^{-3s+\sigma}. \tag{3.6}$$

接下来证明$f(u,u_x)$的H^σ模，其中我们需要用到引理2.1(ii)、Cauchy-Schwarz 不等式和引理3.1,

$$\begin{aligned} \|f(u,u_x)\|_{H^\sigma} &= \|(1-\partial_x)^{-1}\partial_x(b_1u^2 + b_2u^3 + b_2u^4 + b_3u^4 + b_4u^5 + b_5u^6 + b_6u^7 + b_7u_x^2 + b_8uu_x^2)\|_{H^\sigma} \\ &\quad + \|b_9(1-\partial_x)^{-1}u_x^3\|_{H^\sigma} \\ &\lesssim \lambda^{-2s+1+\sigma} + \lambda^{-s-1+\sigma}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

根据以上估计，我们可以得到以下命题。

命题3.1. 对于$s > 3/2, \quad 1/2 < \sigma \leq 1, \quad n \gg 1$, 我们有

$$\| \, F \, \|_{H^\sigma} \lesssim n^{-r_s}, \tag{3.8}$$

其中$r_s > 0$且

$$r_s = \begin{cases} 2s-1-\sigma, & 3/2 < s < 2, \\ s+1-\sigma, & s \geq 2. \end{cases} \tag{3.9}$$

4. 近似解与真实解之间的误差

令$u_{\omega,n}(t,x)$是方程(2.1)的周期解，则$u_{\omega,n}(t,x)$满足

$$\begin{cases} \partial_x u_{\omega,n} + (a_1u_{\omega,n} + a_2u_{\omega,n}^2)\partial_x u_{\omega,n} - f(u_{\omega,n}, \partial_x u_{\omega,n}) = 0, \\ u_{\omega,n}(0,x) = u^{\omega,n}(0,x) = \omega n^{-1} - n^{-s}cos(nx). \end{cases} \tag{4.1}$$

为了估计近似解与真实解的误差，我们设

$$v = u^{\omega,n} - u_{\omega,n}.$$

显然，v满足以下等式

$$\begin{cases} \partial_t v = F - a_1 u^{\omega,n}\partial_x v - a_1 v\partial_x u_{\omega,n} - a_2(u^{\omega,n})^2\partial_x u^{\omega,n} + a_2(u^{\omega,n})^2\partial_x u_{\omega,n} \\ +f(u^{\omega,n},\partial_x u^{\omega,n}) - f(u_{\omega,n},\partial_x u_{\omega,n}), \\ V(0,x) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

其中F被(3.2)定义且满足不等式(3.8).

命题4.1. 若$n \gg 1, \quad s > 3/2, \quad 1/2 < \sigma \leq min1, s-1$, 则

$$\| v(t) \|_{H^\sigma} \doteq \| u^{\omega,n}(t) - u_{\omega,n}(t) \|_{H^\sigma} \lesssim n^{-r_s}, \quad n \gg 1, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4.3}$$

其中$r_s > 0$且由*(3.9)*给出。

Proof. 用算子Λ^σ去乘以方程(4.2)两边，然后用$\Lambda^\sigma v$去乘以结果，再对周期空间内的x进行积分我们可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{H^\sigma} = & \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma F \Lambda^\sigma v dx - a_1 \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma u^{\omega,n}\partial_x v \Lambda^\sigma v dx - a_1 \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma v \partial_x u_{\omega,n} \Lambda^\sigma v dx \\ & - a_2 \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma (u^{\omega,n})^2 \partial_x u^{\omega,n} \Lambda^\sigma v dx + a_2 \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma (u_{\omega,n})^2 \partial_x u_{\omega,n} \Lambda^\sigma v dx \\ & + \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma (f(u^{\omega,n}, \partial_x u^{\omega,n} - f(u_{\omega,n}, \partial_x u_{\omega,n})) \Lambda^\sigma v dx \\ = & E_1 + E_2 + +E_3 + E_4 + E_5 + E_6. \end{aligned} \tag{4.4}$$

接下来我们对误差F的H^ρ模进行估计，首先第一项估计如下：

$$|E_1| = \left| \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma F \Lambda^\sigma v dx \right| \leq \| F \|_{H^\sigma} + \| v \|_{H^\sigma} \lesssim n^{-r^s} ||v(t)||_{H^\sigma} \tag{4.5}$$

第二项估计如下：

$$\begin{aligned} |E_2| & \lesssim \left| \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma \partial_x (u^{\omega,n}, v) \Lambda^\sigma v dx \right| + \left| \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma v \partial_x u^{\omega,n} \Lambda^\sigma v dx \right| \\ & \leq ||[\Lambda^\sigma \partial_x, u^{\omega,n}]v||_{L^2} ||v||_{H^\sigma} + \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{T}} \partial_x u^{\omega,n} (\Lambda^\sigma v)^2 dx \right| + ||u^{\omega,n}||_{H^s} ||v||^2_{H^\sigma} \\ & \lesssim ||u^{\omega,n}||_{H^s} ||v||^2_{H^\sigma}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中用到了分部积分和引理2.2(ii). 接下来我们估计式(4.4)的第三项如下：

$$\begin{aligned} |E_3| & = \left| \int_{\mathbb{T}} \Lambda^\sigma v \partial_x u_{\omega,n} \Lambda^\sigma v dx \right| \\ & \leq ||v \partial_x u_{\omega,n}||_{H^\sigma} ||v||_{H^\sigma} \\ & \leq C(||v||_{H^\sigma} ||\partial_x u_{\omega,n}||_{L^\infty} + ||\partial_x u_{\omega,n}||_{H^\sigma} ||v||_{H^\sigma}) ||v||_{H^\sigma} \\ & \lesssim ||u_{\omega,n}||_{H^s} ||v||^2_{H^\sigma}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中运用到了引理2.1(i)和Cauchy-Schwar不等式。

类似前面的证明过程，我们能得到剩余误差的H^σ模的估计，并将结果结合起来可以得到

$$\frac{1}{2}||v||^2_{H^\sigma} \lesssim B||v||^2_{H^\sigma} + n^{-r^s}||v||_{H^\sigma}. \tag{4.8}$$

即

$$\frac{d}{dt}||v||_{H^\sigma} \lesssim B||v||_{H^\sigma} + n^{-r^s}, \tag{4.9}$$

其中B是剩余项的整体。我们应用不等式

$$||u_{\omega,n}(t)||_{H^s} \lesssim ||u_{\omega,n}(0)||_{H^s} = ||u^{\omega,n}(0)||_{H^s}$$

可以得到

$$||v(t)||_{H^\sigma} \lesssim n^{-r^s}, \quad n \gg 1 \quad 0 \le t \le T, \tag{4.10}$$

这就证明了命题4.1. □

接下来我们证明定理1.1

Proof. 让我们首先假设$s > 3/2$, 并且$u_{1,n}(x,t)$ 和$u_{-i,n}(x,t)$分别是方程(2.1)在初值条件为$u_{1,n}(x,0)$和$u_{-1,n}(x,0)$的解,且这两个解属于$\mathcal{C}([0,T];H^s(\mathbb{T}))$. 由式(3.1)和$||u(t)||_{H^s} \le 2||u(0)||_{H^s}$, 我们能够得到

$$||u_{1,n}(x,t)||_{H^s} + ||u_{-1,n}(x,t)||_{H^s} \le 2C||u^{1,n}(0)||_{H^s} + ||u^{-1,n}(0)||_{H^s} \lesssim 1. \tag{4.11}$$

当$t = o$且$\lambda \longrightarrow \infty$时有

$$||u_{1,n}(0) - u_{-1,n}(0)||_{H^s} \longrightarrow 0. \tag{4.12}$$

当$t < 0$时，运用三角不等式可以得到

$$||u_{1,n}(x,t)||_{H^s} + ||u_{-1,n}(x,t)||_{H^s} \le 2C||u^{1,n}(0)||_{H^s} + ||u^{-1,n}(0)||_{H^s} \lesssim 1. \tag{4.13}$$

当$t = o$且$\lambda \longrightarrow \infty$时有

$$\begin{aligned} ||u_{1,n}(t) - u_{-1,n}(t)||_{H^s} \ge\ & ||u^{1,n}(t) - u^{-1,n}(t)||_{H^s} \\ & - ||u^{1,n}(t) - u_{1,n}(t)||_{H^s} - ||u^{-1,n}(t) - u_{1,n}(t)||_{H^s}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

运用$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$可得

$$||u^{1,n}(t) - u^{-1,n}(t)||_{H^s} = ||2n^{-1} - 2n^{-s}sin(nx - a_1\omega t - a_2\omega^2\lambda^{-1}t)sin(a_1\omega t + a_2\omega^2\lambda^{-1}t)||_{H^s}. \tag{4.15}$$

设$k=[s]+2$, 运用引理3.1和$||u(t)||_{H^s}\le 2||u(0)||_{H^s}$可得

$$||u^{\omega,n}(t)-u_{\omega,n}(t)||_{H^k}\le ||u^{\omega,n}(t)||_{H^k}+2||u^{\omega,n}(0)||_{H^k}\lesssim n^{k-s},\quad 0<t\le T. \tag{4.16}$$

使用引理2.3且令$s_1=\sigma,\quad s_2=[s]+2$有

$$\begin{aligned}||u^{\omega,n}(t)-u_{\omega,n}(t)||_{H^s}&\le ||u^{\omega,n}(t)-u_{\omega,n}(t)||_{H^\sigma}^{\frac{k-s}{k-\sigma}}||u^{\omega,n}(t)-u_{\omega,n}(t)||_{H^k}^{\frac{s-\sigma}{k-\sigma}}\\&\lesssim n^{\frac{-r_s(k-s)}{k-\sigma}}n^{\frac{(k-s)(s-\sigma)}{k-\sigma}}\\&\lesssim n^{\frac{-(r_s-s+\sigma)}{k-\sigma}},\end{aligned} \tag{4.17}$$

将之前的r_s代入上式可得$||u^{\omega,n}(t)-u_{\omega,n}(t)||_{H^s}\lesssim n^{-\varepsilon_s}$,其中

$$\varepsilon_s=\begin{cases}\frac{(s-1)(k-s)}{k-\sigma}, & 3/2<s<2,\\ \frac{(k-s)}{k-\sigma}, & s\ge 2,\end{cases} \tag{4.18}$$

这里的ε_s大于零，我们取(4.14)两边极限的下确界有

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\parallel u_{1,n}(t)-u_{-1,n}(t)\parallel_{H^s}&\ge\liminf_{n\to\infty}(\parallel u^{1,n}(t)-u^{-1,n}(t)\parallel_{H^s}-||u^{1,n}(t)-u_{1,n}(t)\parallel_{H^s}\\&\quad-||u^{-1,n}(t)-u_{-1,n}(t)\parallel_{H^s})\\&\gtrsim\left|\sin\frac{a_1t+a_2\lambda^{-1}t}{2}\right|>0,\end{aligned}$$

其中$0<t<\min\left\{T,\frac{2\pi}{|a_1+a_2\lambda^{-1}|}\right\}$. 这就证明了定理1.1. $\square$

5. 结论及展望

本文研究中等振幅浅水波模型的周期柯西问题，我们首先构造了两个解序列，他们在$H^s(\mathbb{T})$, $s>3/2$中是有界的，并且在初值时刻区间收敛到零，但是这两个序列之间的距离的下界在任意时刻T是一个非零常数，这意味着方程的解映射在Sobolev空间中是非一致连续的。虽然得到了非一致连续性，但是仍然有一些问题值得进一步研究，例如该模型的解在Sobolev空间中的Hölder连续性。

参考文献

[1] Quirchmayr, R. (2016) A New Highly Nonlinear Shallow Water Wave Equation. *Journal of Evolution Equations*, **16**, 539-567. https://doi.org/10.1007/s00028-015-0312-4

[2] Korteweg, D.J. and de Vries, G. (1895) On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *Philosophical Magazine*, **39**, 422-443. https://doi.org/10.1080/14786449508620739

[3] Zhou, S., Wang, B. and Chen, R. (2018) Non-Uniform Dependence on Initial Data for the Periodic Constantin-Lannes Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **59**, Article 031502. https://doi.org/10.1063/1.5027092

[4] Constantin, A. and Lannes, D. (2009) The Hydrodynamical Relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **192**, 165-186. https://doi.org/10.1007/s00205-008-0128-2

[5] Himonas, A.A. and Holliman, C. (2013) Hölder Continuity of the Solution Map for the Novikov Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **54**, 319-361. https://doi.org/10.1063/1.4807729

[6] Constantin, A. and Escher, J. (1998) Global Existence and Blow-Up for a Shallow Water Equation. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **26**, 303-328.

[7] Constantin, A. and Escher, J. (2011) Analyticity of Periodic Traveling Free Surface Water Waves with Vorticity. *Annals of Mathematics* **173**, 559-568. https://doi.org/10.4007/annals.2011.173.1.12

[8] Zhou, S. (2020) Well-Posedness and Wave Breaking for A Shallow Water Wave Model with Large Amplitude. *Journal of Evolution Equations*, **20**, 141-163. https://doi.org/10.1007/s00028-019-00518-4

[9] Yang, S. (2021) Wave Breaking for a Model Equation for Shallow Water Waves of Moderate Amplitude. *Communications in Mathematical Sciences*, **19**, 1799-1807. https://doi.org/10.4310/CMS.2021.v19.n7.a2

[10] Kato, T. (1975) Quasi-Linear Equations of Evolution with Applications to Partial Differential Equation. In: Everitt, W.N., Ed., *Spectral Theory and Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 448, Springer, Berlin, Heidelberg, 25-70.

[11] Basu, B., Haziot, S. and Staino, A. (2022) Wave Breaking for Periodic Solutions of a Nonlinear Shallow Water Equation. *Applicable Analysis*, **101**, 519-526. https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1750603

[12] Jiang, B. and Zhou, Y. (2020) Cusped Solitary Wave with Algebraic Decay Governed by the Equation for Surface Waves of Moderate Amplitude. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **27**, 219-226. https://doi.org/10.1080/14029251.2020.1700632

[13] Mutlubas, N.D., Geyer, A. and Quirchmayr, R. (2020) Ronald Well-Posedness of a Highly Nonlinear Shallow Water Equation on the Circle. *Nonlinear Analysis*, **197**, Article 111849. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111849

[14] Taylor, M. (2003) Commutator Estimates. *Proceedings of the AMS*, **131**, 1501-1507. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-02-06723-0

[15] Himonas, A.A. and Holliman, C. (2014) The Cauchy Problem for a Generalized Camassa-Holm Equation. *Advances in Differential Equations*, **19**, 161-200. https://doi.org/10.57262/ade/1384278135

[16] Himonas, A.A. and Mantzavinos, D. (2014) Hölder Continuity for the Fokas-Olver-Rosenau-Qiao Equation. *Journal of Nonlinear Science*, **24**, 1105-1124.
https://doi.org/10.1007/s00332-014-9212-y

[17] Himonas, A.A., Kenig, C. and Misiolek, G. (2010) Non-Uniform Dependence for the Periodic CH Equation. *Communications in Partial Differential Equations*, **35**, 1145-1162.
https://doi.org/10.1080/03605300903436746