Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(10), 4501-4507
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1210441

一类具有恐惧效应的随机食物链模型

廖丽芳，冯祖针

广西民族师范学院教育科学学院，广西 崇左

收稿日期：2023 年 9 月 25 日；录用日期：2023 年 10 月 19 日；发布日期：2023 年 10 月 27 日

摘 要

本文建立了一类具有恐惧效应的三种群随机食物链模型. 首先研究了该模型全局唯一正解的存在性，然后利用 Lyapunov 函数方法证明了解的有界性，最后利用随机比较原理得到了种群灭绝的充分条件.

关键词

恐惧效应，食物链模型，灭绝性

A Stochastic Food Chain Model with Fear Effect

Lifang Liao, Zuzhen Feng

School of Education Science, Guangxi Minzu Normal University, Chongzuo Guangxi

Received: Sep. 25^{th}, 2023; accepted: Oct. 19^{th}, 2023; published: Oct. 27^{th}, 2023

Abstract

A three-species stochastic food-chain model with fear effects is established. Firstly, the existence of the globally unique positive solution of the model is established.

文章引用: 廖丽芳, 冯祖针. 一类具有恐惧效应的随机食物链模型 [J]. 应用数学进展, 2023, 12(10): 4501-4507.
DOI: 10.12677/aam.2023.1210441

Then, the boundness of the solution is proved by Lyapunov function method. Finally, the sufficient condition of population extinction is obtained by stochastic comparison principle.

Keywords

Fear Effect, Food-Chain Model, Extinction

1. 引言

在食物链系统中, 捕食者的捕食行为直接影响着食饵种群的密度, 研究表明, 食饵对捕食者的恐惧心理同样影响着食饵的种群大小, 食饵的行为与形态 [1] [2], 文献 [2] 研究了具有恐惧效应的随机捕食者 – 食饵模型, 通过构造 Lyapunov 函数得到了系统平稳分布的充分条件, 即捕食者 – 食饵长期共存的条件, 文献 [3] 研究了具有恐惧和捕获量的食物链模型, 发现恐惧效应会影响着系统的平衡解. 与此同时, 食饵为了有效地躲避捕食者的猎杀和增加食饵的生存率, 食饵通常会寻求庇护, 但过渡的依赖庇护的食饵会导致捕食者找不到猎物使得捕食者的种群减少 [4], 捕食者的时滞和空间扩散也影响着捕食系统的稳定性 [5]. 另一方面, 食物链系统常常受到来自自然环境不同程度的噪声的影响 [6], 因此在对食物链中种群的行为分析时, 考虑种群受到恐惧, 庇护效应以及白噪声的影响更符合现实的意义. 这里, 受文献 [2] [7] 的启发, 主要研究以下具有恐惧效应的随机食物链模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = \left[\frac{\alpha x(t)}{1+Ky(t)} - bx^2(t) - \frac{\beta_1(1-m)x(t)y(t)}{1+a(1-m)x(t)}\right]\mathrm{d}t + \sigma_1 x(t)\mathrm{d}B_1(t) \\ \mathrm{d}y(t) = \left(\frac{c_1\beta_1(1-m)x(t)y(t)}{1+a(1-m)x(t)} - \beta_2 y(t)z(t) - d_1 y(t)\right)\mathrm{d}t + \sigma_2 y(t)\mathrm{d}B_2(t) \\ \mathrm{d}z(t) = (c_2\beta_2 y(t)z(t) - d_2 z(t))\mathrm{d}t + \sigma_3 z(t)\mathrm{d}B_3(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中 α 表示食饵的内禀增长率, K 表示食饵对低级捕食者的恐惧水平, b 表示食饵内部竞争导致的死亡率,β_1, β_2 表示捕食率,d_1, d_2 表示捕食者的死亡率,m 表示待在庇护所里的食饵的比例, a 是半饱和常数,c_1, c_2 表示营养转化系数.

2. 全局正解的存在唯一性

定理 1 对于给定的任意初值 $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^{3+}$, 模型 (1) 存在唯一的全局正解 $(x(t), y(t), z(t))$, 即对 $\forall t \geq 0$, $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^{3+}$ $a.s.$.

证明 易知模型 (1) 的系数满足局部 Lipschiz 条件, 因此模型 (1) 存在唯一局部解 $(x(0), y(0), z(0)) \in [0, \tau_e)$, 其中 τ_e 是爆破时刻, 当 $\tau_e = \infty$, 则解就具有全局性. 令 m_0 是充分大的整数, 使 $(x(0), y(0), z(0))$ 都落入 $[\frac{1}{k_0}, k_0]$ 区间内, 对于任意的 $k \geq k_0$, 定义停时

$$\tau_k = \inf\left\{t \in [0, \tau_e] : \min\{x(t), y(t), z(t) \leq \frac{1}{k}\} \text{ 或 } \max\{x(t), y(t), z(t) \geq k\}\right\}$$

其中约定 $\inf \varnothing = \infty$. 显然 τ_k 是关于 m 递增的, 设 $\tau_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} \tau_k$, 则有 $\tau_\infty \leq \tau_e$. 若能够证明 $\tau_\infty = \infty$, 则有 $\tau_e = \infty$. 采用反证法证明. 若 $\tau_e < \infty$, 则存在常数 $T > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$ 使得 $\mathbb{P}(\tau_\infty \leq T) > \varepsilon$ 成立. 因此存在一个正整数 $k_1 \geq k_0$, 使得当 $k \geq k_1$ 时, 有 $\mathbb{P}(\tau_k \leq T) \leq \varepsilon$.

定义 C^3 上的 Lyapunov 函数 $V : \mathbb{R}^{3+} \to \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} V_1(x, y, z) = &\left(x - \frac{d_1}{2c_1\beta_1(1-m)} - \frac{d_1}{2c_1\beta_1(1-m)} \ln \frac{2c_1\beta_1(1-m)}{d_1} x\right) \\ &+ \left(\frac{1}{c_1} y - \frac{d_2}{2c_1c_2\beta_2} - \frac{d_2}{2c_1c_2\beta_2} \ln \frac{2c_1c_2\beta_2}{h_2} y\right) + \frac{1}{c_1c_2}(z - 1 - \ln z) \end{aligned}$$

由 Itô 公式可得

$$\mathrm{d}V_1 = LV_1\mathrm{d}t + \left(x - \frac{d_1}{2c_1\beta_1(1-m)}\right)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t) + \frac{1}{c_1}\left(y - \frac{d_2}{2c_2\beta_2}\right)\sigma_2\mathrm{d}B_2(t) + \frac{1}{c_1c_2}\sigma_3(z-1)\mathrm{d}B_3(t) \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} LV_1 = &\left(x - \frac{d_1}{2c_1\beta_1(1-m)}\right)\left(\frac{\alpha}{1+Ky} - bx - \frac{\beta_1(1-m)y}{1+a(1-m)x}\right) + \frac{d_1\sigma_1^2}{4c_1\beta_1(1-m)} \\ &+ \frac{1}{c_1}\left(y - \frac{d_2}{2c_2\beta_2}\right)\left(\frac{c_1\beta_1(1-m)x}{1+a(1-m)x} - \beta_2 z - d_1\right) + \frac{d_2\sigma_2^2}{4c_1c_2\beta_2} + \frac{1}{c_1c_2}(z-1)(c_2\beta_2 y - d_2) + \frac{\sigma_3^2}{c_1c_2} \\ = &\frac{\alpha x}{1+Ky} - bx^2 - \frac{\beta_1(1-m)xy}{1+a(1-m)x} - \frac{\alpha d_1}{2c_1\beta_1(1-m)(1+Ky)} + \frac{d_1 bx}{2c_1\beta_1(1-m)(1+Ky)} \\ &+ \frac{d_1 y}{2c_1(1+a(1-m)x)} + \frac{d_1\sigma_1^2}{4c_1\beta_1(1-m)} + \frac{\beta_1(1-m)xy}{1+a(1-m)x} - \frac{\beta_2 yz}{c_1} - \frac{d_1 y}{c_1} \\ &- \frac{\beta_1 d_2(1-m)x}{2c_2\beta_2(1+a(1-m)x)} + \frac{d_2 z}{2c_1c_2} + \frac{d_1d_2}{2c_1c_2\beta_2} + \frac{d_2\sigma_2^2}{4c_1c_2\beta_2} + \frac{\beta_2 yz}{c_1} - \frac{d_2 z}{c_1c_2} - \frac{\beta_2 y}{c_1} + \frac{d_2}{c_1c_2} + \frac{\sigma_3^2}{c_1c_2} \\ \leq &-bx^2 + \left(\alpha + \frac{bd_1}{2c_1\beta_1(1-m)}\right)x - \frac{d_1+2\beta_1}{2c_1}y - \frac{d_2}{2c_1c_2}z + \frac{d_2}{c_1c_2} + \frac{d_1\sigma_1^2}{4c_1\beta_1(1-m)} + \frac{d_2\sigma_2^2}{4c_1c_2\beta_2} + \frac{\sigma_3^2}{c_1c_2} \\ \leq &\tilde{J} + \frac{d_2}{c_1c_2} + \frac{d_1\sigma_1^2}{4c_1\beta_1(1-m)} + \frac{d_2\sigma_2^2}{4c_1c_2\beta_2} + \frac{\sigma_3^2}{c_1c_2} := J \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{J} = \limsup_{\{x,y,z\}\to\infty}\left\{-bx^2 + \left(\alpha + \frac{bd_1}{2c_1\beta_1(1-m)}\right)x - \frac{d_1+2\beta_1}{2c_1}y - \frac{d_2}{2c_1c_2}z\right\}$$

对 (2) 式两边从 0 到 $\tau_e \wedge T$ 积分并且取期望可得到

DOI: 10.12677/aam.2023.1210441

$$\begin{aligned}\mathbb{E}V_1(x(\tau_k\wedge T),y(\tau_k\wedge T),z(\tau_k\wedge T))&\leq V_1(x(0),y(0),z(0))+J\mathbb{E}(\tau_k\wedge T)\\&\leq V_1(x(0),y(0),z(0))+JT\end{aligned}\tag{3}$$

对于 $k\geq k_1$, 设 $\Omega_k=\{\tau_k\leq T\}$, 则有 $\mathbb{P}(\Omega_k)\leq\varepsilon$. 对于任意的 $\omega\in\{\tau_k\leq T\},x(\tau_k,\omega),y(\tau_k,\omega),z(\tau_k,\omega)$ 必有一个等于 k 或 $1/k$, 因此

$$\begin{aligned}V_1(x(\tau_k),y(\tau_k),z(\tau_k))\geq&\left[k-\frac{d_1}{2c_1\beta_1(1-m)}-\frac{d_1}{2c_1\beta_1(1-m)}\ln\frac{2c_1\beta_1(1-m)k}{h_1}\right]\\&\wedge\left[\frac{1}{k}-\frac{d_1}{2c_1\beta_1(1-m)}-\frac{d_1}{2c_1\beta_1(1-m)}\ln\frac{2c_1\beta_1(1-m)}{h_1k}\right]\\&\wedge\left[\frac{k}{c_1}-\frac{d_2}{2c_1c_2\beta_2}-\frac{d_2}{2c_1c_2\beta_2}\ln\frac{2c_1c_2\beta_2k}{h_2}\right]\wedge\left[\frac{1}{kc_1}-\frac{d_2}{2c_1c_2\beta_2}-\frac{d_2}{2c_1c_2\beta_2}\ln\frac{2c_1c_2\beta_2}{h_2k}\right]\\&\wedge\frac{1}{c_1c_2}(k-1-\ln k)\wedge\frac{1}{c_1c_2}(\frac{1}{k}-1-\ln\frac{1}{k})\end{aligned}$$

当 $k\to\infty$ 时, 有

$$\mathbb{E}V_1(x(\tau_k\wedge T),y(\tau_k\wedge T),z(\tau_k\wedge T))=\infty$$

与 (3) 相矛盾, 因以 $\tau_\infty=\infty$.

3. 解的有界性

定理 2 对于任意的初值 $(x(0),y(0),z(0))\in\mathbb{R}^{3+}$ 与任意的 $p\in[0,1]$, 模型 (1) 存在一个正常数 $K_1(p)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\mathbb{E}(x^p)\leq K_1(p)\tag{4}$$

且存在两个正常数 K_1,K_2 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\mathbb{E}(y(t))\leq K_2\ ,\quad\limsup_{t\to\infty}\mathbb{E}(z(t))\leq K_3\ .\tag{5}$$

证明 定义 Lyapunov 函数

$$V_2(x,t)=e^tx^p$$

由 Itô 公式可得到

$$\begin{aligned}dV_2(x,t)=&e^tx^p+e^t\mathrm{d}x^p\\=&e^tx^p+e^tpx^p\left(\frac{\alpha}{1+Ky}-bx-\frac{\beta_1(1-m)y}{1+a(1-m)x}+\frac{1}{2}p(p-1)\sigma_1^2\right)\mathrm{d}t+\sigma_1e^tx^p\mathrm{d}B_1(t)\\\leq&e^t\left(-pbx^{p+1}+(1+p\alpha+\frac{1}{2}p(p-1)\sigma_1^2)x^p\right)\mathrm{d}t+\sigma_1e^tx^p\mathrm{d}B_1(t)\\\leq&K_1(p)e^t\mathrm{d}t+\sigma_1e^tx^p\mathrm{d}B_1(t)\end{aligned}$$

两边积分并取期望后可得

$$\mathbb{E}(e^t x^p) \leq \mathbb{E}(x(0)) + \int_0^t e^s K_1(p)\mathrm{d}s = \mathbb{E}(x(0)) + K_1(p)(e^t - 1)$$

因此有

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}(x^p) \leq K_1(p)$$

为了证明 (5), 定义三元 Lyapunov 函数

$$V_3(x,y,z) = x(t) + \frac{1}{c_1}y(t) + \frac{1}{c_1c_2}z(t)$$

则由 Itô 公式有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V_3 =& \left(\frac{\alpha x}{1+Ky} - bx^2 - \frac{\beta_1(1-m)xy}{1+a(1-m)x} + \frac{\beta_1(1-m)xy}{1+a(1-m)xy} - \frac{\beta_2}{c_1}yz - \frac{d_1}{c_1}y + \frac{\beta_2}{c_1}yz - \frac{d_2}{c_1c_2}z\right)\mathrm{d}t \\
& + \sigma_1 x\mathrm{d}B_1(t) + \frac{\sigma_2}{c_1}y\mathrm{d}B_2(t) + \frac{\sigma_3}{c_1c_2}y\mathrm{d}B_3(t) \\
\leq & \left(\alpha x - bx^2 - \frac{d_1}{c_1}y - \frac{d_2}{c_1c_2}z\right)\mathrm{d}t + \sigma_1 x\mathrm{d}B_1(t) + \frac{\sigma_2}{c_1}y\mathrm{d}B_2(t) + \frac{\sigma_3}{c_1c_2}z\mathrm{d}B_3(t) \\
\leq & ((\alpha+\xi)x - bx^2 - \xi V_3)\mathrm{d}t + \sigma_1 x\mathrm{d}B_1(t) + \frac{\sigma_2}{c_1}y\mathrm{d}B_2(t) + \frac{\sigma_3}{c_1c_2}z\mathrm{d}B_3(t)
\end{aligned}$$

其中 $\xi = \min\{h_1, h_2\}$, 对上式两边从 0 到 t 积分并取数学期望有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}V_3 \leq & \mathbb{E}((\alpha+\xi)x - bx^2 - \xi V_3) \\
& \leq (\alpha+\xi)\mathbb{E}(x) - b\mathbb{E}((x))^2 - \xi\mathbb{E}(V_3) \ \leq \frac{(\alpha+\xi)^2}{4b} - \xi\mathbb{E}(V_3)
\end{aligned}$$

因此有

$$\mathbb{E}(V_3) \leq \frac{(\alpha+\xi)^2}{4b(1+\xi)}.$$

又因为模型 (1) 的解是正的, 所以存在 $K_1 > 0, K_2 > 0$, 使得 $\mathbb{E}(y(t)) \leq K_2$, $\mathbb{E}(z(t)) \leq K_3$.

4. 灭绝性

为了方便研究, 定义以下符号 $R_1 = \frac{2\alpha}{\sigma_1^2}, R_2 = \frac{c_1\beta_1(1-m)}{d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x}{a+(1-m)x}\pi(x)\mathrm{d}x.$

首先考虑下面的辅助系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = (\alpha X - bX^2)\mathrm{d}t + \sigma_1 X\mathrm{d}B_1(t) \\ X(0) = x(0) \end{cases} \tag{6}$$

由随机比较原理可知 $x(t) \leq X(t)$. 对于模型 (6) 与文献 [8] 可得到以下引理.

引理 1 如果 $R_1 < 1$, 那么 $X(t)$ 趋于灭绝, 即 $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$; 如果 $R_1 > 1$, 那么 (6) 存在唯一的遍历平稳分布 $\pi(X)$, 且

$$\pi(X) = \frac{\varrho_2^{\varrho_1}}{\Gamma(\varrho_1)} X^{\varrho_1 - 1} e^{-\varrho_2 X}$$

其中 $\varrho_1 = \frac{2\alpha}{\sigma_1^2} - 1$, $\varrho_2 = \frac{2b}{\sigma_1^2}$, $\Gamma(v) = \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$

由 $x(t) \le X(t)$ 与引理 1 可得到如下推论.

推论 1 如果 $R_1 < 1$, 模型 (1) 中的食饵 $x(t)$ 趋于灭绝 $a.s.$, 即 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0.$

定理 3 如果 $R_2 < 1$, 那么捕食者 $y(t)$ 趋于灭绝 $a.s.$, 即 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0.$

证明 对系统 (1) 的第二个式子运用 Itô 公式可有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\ln y) &= \left(\frac{c_1\beta_1(1-m)x}{a+(1-m)x} - \beta_2 z - h - \frac{\sigma_2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma_2 \mathrm{d}B_2(t) \\ &\le \left(\frac{c_1\beta_1(1-m)X}{a+1-m)X} - d_1 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma_2 \mathrm{d}B_2(t) \end{aligned}$$

两边从 0 到 t 积分后同时除以 t 并取极限的可得

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln y(t)}{t} &\le c_1\beta_1(1-m)\int_0^{+\infty} \frac{x}{a+(1-m)x}\pi(x)\mathrm{d}x - (d_1 + \frac{\sigma_2^2}{2}) \\ &= \left(d_1 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right) R_2 - \left(d_1 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \\ &= \left(d_1 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(R_2 - 1) < 0 \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

5. 结论

本文研究了具有恐惧效应的随机食物链模型解的性质, 包括全局正解的存在唯一性与解的有界性, 还讨论了种群的灭绝性. 由定理 3 可知, 当环境噪声过大时, 可以导致食饵与捕食者的灭绝, 并且由于对捕食者的恐惧, 导致待在庇护所的食饵比例过大时, 捕食者无法捕捉到猎物也会导致捕食者的灭绝.

参考文献

[1] Zanette, L.Y., White, A.F., Allen, M.C., *et al.* (2011) Perceived Predation Risk Reduces the Number of Offspring Songbirds Produce per Year. *Science*, **334**, 1398-1401.

https://doi.org/10.1126/science.1210908

[2] Liu, Q. and Jiang, D. (2021) Influence of the Fear Factor on the Dynamics of a Stochastic Predator-Prey Model.*Applied Mathematics Letters*, **112**, Article ID: 106756. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106756

[3] Alabacy, Z.K. and Majeed, A.A. (2021) The Fear Effect on a Food Chain Prey-Predator Model Incorporating a Prey Refuge and Harvesting. *Journal of Physics: Conference Series*, **1804**, Article ID: 012077. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1804/1/012077

[4] Zhang, H., Cai, Y., Fu, S., *et al.* (2019) Impact of the Fear Effect in a Prey-Predator Model Incorporating a Prey Refuge. *Applied Mathematics and Computation*, **356**, 328-337. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.03.034

[5] 焦淑云, 郑亚丽. 一类具有恐惧和避难效应的时滞捕食模型的图灵不稳定性 [J]. 信阳师范学院学报 (自然科学版), 2022, 34(4): 517-522.

[6] Xia, Y. and Yuan, S. (2020) Survival Analysis of a Stochastic Predator-Prey Model with Prey Refuge and Fear Effect. *Journal of Biological Dynamics*, **14**, 871-892. https://doi.org/10.1080/17513758.2020.1853832

[7] Mukherjee, D. (2014) The Effect of Prey Refuges on a Three Species Food Chain Model. *Differential Equations and Dynamical Systems*, **22**, 413-426. https://doi.org/10.1007/s12591-013-0196-0

[8] Pasquali, S. (2001) The Stochastic Logistic Equation: Stationary Solutions and Their Stability. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **106**, 165-183.