Advances in Education 教育进展, 2021, 11(5), 1428-1437
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2021.115218

一类递推数列通项公式求解的普适性方法

郑作奎[1]，薛　兵[2*]，孙洪春[2*]

[1]山东省费县第二中学，山东 费县
[2]临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: *xuebing81@163.com, *sunhongchun@lyu.edu.cn

收稿日期：2021年7月9日；录用日期：2021年8月5日；发布日期：2021年8月12日

摘　要

求递推数列通项公式在高考及各类数学竞赛中既是重点又是难点，求通项公式的方法多、技巧强，利用等差、等比数列公式很难直接求得结果。导致学生畏惧，不能准确求解。因此探讨求递推数列通项公式的解题技巧和方法非常必要。基于此，利用同构转换思想，系统探讨了求解一类递推数列通项公式普遍适用的方法，该方法思想可操作性强，既简单又易掌握。

关键词

递推式，数列，通项公式

Generally Applicable Method for General Term Formula of a Recurrence Sequence

Zuokui Zheng[1], Bing Xue[2*], Hongchun Sun[2*]

[1]No. 2 Middle School of Fei County, Fei County Shandong
[2]School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: *xuebing81@163.com, *sunhongchun@lyu.edu.cn

Received: Jul. 9th, 2021; accepted: Aug. 5th, 2021; published: Aug. 12th, 2021

Abstract

It is not only the key but also the difficult point to find the general term formula of the recursive

*通讯作者。

文章引用: 郑作奎, 薛兵, 孙洪春. 一类递推数列通项公式求解的普适性方法[J]. 教育进展, 2021, 11(5): 1428-1437.
DOI: 10.12677/ae.2021.115218

sequence in the college entrance examination and all kinds of mathematics competitions. Many methods for solving the formula of the general term are presented, and its technique is strong. It is difficult to obtain the result directly by using arithmetic sequence and geometrical sequences. As a result, students are afraid and cannot accurately solve the problem. Therefore, it is very necessary to explore the technique and method of solving the general term formula of recursive sequence. Based on this, using the idea of isomorphic transformation, this paper systematically discusses the general method of solving the general term formula of a kind of recursive sequence, which has strong operability and is simple and easy to master.

Keywords

Recursion Formula, Sequence, General Term Formula

1. 引言

已知 a_1, a_2，求由递推式

$$a_{n+2} = A_1 a_{n+1} + A_2 a_n + f(n) q^n, \tag{1}$$

确定数列的通项公式，其中 A_1, A_2, q 为常数，$f(n)$ 是关于自然数 n 的多项式。

众所周知，数列是高中数学教学的重要内容，是进一步学习高等数学的基础，因此是历年高考必考内容，求递推数列通项在高考及各类数学竞赛中既是重点又是难点，成为难点的原因就是求通项的方法多、技巧性强，利用等差、等比数列公式很难直接求得结果，导致学生不能准确求解。因此探讨问题(1)的一种统一的解题技巧和方法非常必要。针对问题(1)的某些特殊情况，许多专家学者对此进行了广泛的研究，并给出了许多有效的求解方法。例如：利用累加法、累乘法和构造法求解数列通项公式[1] [2] [3] [4]，利用待定系数法和辅助数列求解递推数列的通项公式[5] [6] [7] [8]。孔令霞[9]介绍了求数列通项的归纳－猜想－证明、逐差法、积商法、构造法。黄耿跃[10]给出了一种求二阶线型递推数列通项公式的可行性解法。王峰[11]概括归纳数列通项公式求解的叠加法、累积法、迭代法、辅助数列法。吴启明[12]根据数列的前 n 项和 S_n 和通项 a_n 的关系，结合实例介绍了求通项公式的方法。李玉中[13]建立了一阶线型递推数列的通项公式。王维山[14]给出了一类线型递推数列通项公式的一些求解方法。王小彦[15]阐述了三种线型递推数列通项公式的求解策略。赵伟[16]介绍一种利用不动点求通项的方法。钱立凯[17]给出了二阶齐次线性递推数列通项公式的一种行列式求法。汪伟[18]借助矩阵理论介绍了一般二阶线性递推数列通项公式的求法。易斌[19]运用化归与转化的思想，简述了递推数列通项公式的九种求法。本文所探讨的问题是对以上专家所讨论问题的概括和补充，通过分析数列(1)的特点，系统给出了数列(1)求通项公式的一种普遍使用的方法，同时结合相应例题的叙述，使学生能快速掌握该类递推数列求通项公式的方法技巧。

本文组织结构如下。第二节给出了 $f(n)q^n = 0$ 时问题(1)的求解方法以及应用实例，第三节给出了 $f(n)q^n \neq 0$ 时问题(1)的求解方法以及应用实例，第四节给出了可转化为(1)的三种类型的递推数列以及应用。

2. $f(n)q^n=0$时，问题(1)的求解方法

2.1. 求解方法的思路

在(1)中，令 $f(n)q^n=0$，则(1)变为

$$a_{n+2}=A_1a_{n+1}+A_2a_n \tag{2}$$

将(2)两边构造成结构相同的形式，再借助等比数列的通项公式求解。

第1步. 在(2)两边加上 B_1a_{n+1}，其中 B_1 为待定常数，有

$$\begin{aligned}a_{n+2}+B_1a_{n+1}&=(A_1+B_1)a_{n+1}+A_2a_n\\&=(A_1+B_1)\left(a_{n+1}+\frac{A_2}{A_1+B_1}a_n\right)\end{aligned} \tag{3}$$

要使(3)式两边结构相同，令 $\frac{A_2}{A_1+B_1}=B_1$，即 $B_1^2+A_1B_1-A_2^2=0$，从而有

$$B_1=\frac{-A_1+\sqrt{A_1^2+4A_2}}{2},B_2=\frac{-A_1-\sqrt{A_1^2+4A_2}}{2}.$$

第2步. 若 $B_1\neq B_2$，由(3)知

$$a_{n+2}+B_1a_{n+1}=(a_2+B_1a_1)(A_1+B_1)^n, \tag{4}$$

$$a_{n+2}+B_2a_{n+1}=(a_2+B_2a_1)(A_1+B_2)^n, \tag{5}$$

联立(4)和(5)，有

$$a_{n+2}=(B_2-B_1)^{-1}B_2(a_2+B_1a_1)(A_1+B_1)^n-(B_2-B_1)^{-1}B_1(a_2+B_2a_1)(A_1+B_2)^n,$$

即

$$a_n=(B_2-B_1)^{-1}B_2(a_2+B_1a_1)(A_1+B_1)^{n-2}-(B_2-B_1)^{-1}B_1(a_2+B_2a_1)(A_1+B_2)^{n-2}. \tag{6}$$

第3步. 若 $B_1=B_2$，则 $A_1^2+4A_2=0$，$B_1=-\frac{A_1}{2}$。由(4)知

$$a_{n+2}=-B_1a_{n+1}+(a_2+B_1a_1)(A_1+B_1)^n,$$

两边加上 $c_1(n+1)(A_1+B_1)^{n+1}$，其中 c_1 是待定常数，有

$$\begin{aligned}&a_{n+2}+c_1(n+1)(A_1+B_1)^{n+1}\\&=-B_1a_{n+1}+(a_2+B_1a_1)(A_1+B_1)^n+c_1(n+1)(A_1+B_1)^{n+1}\\&=-B_1a_{n+1}+\left[(a_2+B_1a_1)+c_1(A_1+B_1)\right](A_1+B_1)^n+c_1(A_1+B_1)n(A_1+B_1)^n\\&=-B_1\left\{a_{n+1}+(-B_1)^{-1}\left[(a_2+B_1a_1)+c_1(A_1+B_1)\right](A_1+B_1)^n\right.\\&\quad\left.+c_1(-B_1)^{-1}(A_1+B_1)n(A_1+B_1)^n\right\},\end{aligned} \tag{7}$$

把 $B_1=-\frac{A_1}{2}$ 代入(7)，有

$$\begin{aligned} & a_{n+2}+c_1(n+1)\left(\frac{1}{2}A_1\right)^{n+1} \\ & =\frac{1}{2}A_1\left\{a_{n+1}+2(A_1)^{-1}\left[\left(a_2-\frac{1}{2}A_1a_1\right)+\frac{1}{2}c_1A_1\right]\left(\frac{1}{2}A_1\right)^n+2c_1(A_1)^{-1}\left(\frac{1}{2}A_1\right)n\left(\frac{1}{2}A_1\right)^n\right\} \\ & =\frac{1}{2}A_1\left\{a_{n+1}+2(A_1)^{-1}\left[\left(a_2-\frac{1}{2}A_1a_1\right)+\frac{1}{2}c_1A_1\right]\left(\frac{1}{2}A_1\right)^n+c_1n\left(\frac{1}{2}A_1\right)^n\right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

在(8)中，令 $2(A_1)^{-1}\left[\left(a_2-\frac{1}{2}A_1a_1\right)+\frac{1}{2}c_1A_1\right]=0$，有

$$c_1=-2(A_1)^{-1}\left(a_2-\frac{1}{2}A_1a_1\right). \tag{9}$$

再由(8)知数列 $a_{n+2}+c_1(n+1)\left(\frac{1}{2}A_1\right)^{n+1}$ 是公比为 $\frac{1}{2}A_1$ 的等比数列，且有

$$a_{n+2}+c_1(n+1)\left(\frac{1}{2}A_1\right)^{n+1}=\left[a_2+c_1\left(\frac{1}{2}A_1\right)\right]\left(\frac{1}{2}A_1\right)^n,$$

即 $a_{n+2}=-c_1(n+1)\left(\frac{1}{2}A_1\right)^{n+1}+\left[a_2+c_1\left(\frac{1}{2}A_1\right)\right]\left(\frac{1}{2}A_1\right)^n$，从而有

$$a_n=-c_1(n-1)\left(\frac{1}{2}A_1\right)^{n-1}+\left[a_2+c_1\left(\frac{1}{2}A_1\right)\right]\left(\frac{1}{2}A_1\right)^{n-2},$$

其中 c_1 定义在(9)中。

2.2. 方法应用举例

例 1 若 $a_1=1, a_2=2$，当 $n\ge 2$ 时，$a_{n+1}=2a_n-2a_{n-1}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解：在 $a_{n+1}=2a_n-2a_{n-1}$ 的两边加上 B_1a_n，其中 B_1 为待定常数，有

$$a_{n+1}+B_1a_n=(2+B_1)a_n-2a_{n-1}=(2+B_1)\left(a_n-2(2+B_1)^{-1}a_{n-1}\right),$$

令 $-2(2+B_1)^{-1}=B_1$，解得 $B_1=-1\pm i$，代入上式，有 $a_{n+1}+(-1+i)a_n=(1+i)^n$，

$$a_{n+1}+(-1-i)a_n=(1-i)^n,$$

进一步计算得 $a_{n+1}=\frac{1}{2i}\left[(1+i)^{n+1}-(1-i)^{n+1}\right]$，即有 $a_n=\frac{1}{2i}\left[(1+i)^n-(1-i)^n\right]$。

例 2 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{4}{3}$，$a_2=\frac{\sqrt{3}}{9}$，$a_n=\frac{2\sqrt{3}}{3}a_{n-1}-\frac{1}{3}a_{n-2}\ (n\ge 3)$，求 a_n。

解：在 $a_n=\frac{2\sqrt{3}}{3}a_{n-1}-\frac{1}{3}a_{n-2}$ 两边加上 B_1a_{n-1}，其中 B_1 为待定常数，有

$$\begin{aligned} a_n+B_1a_{n-1} &= \left(2\sqrt{3}/3+B_1\right)a_{n-1}-1/3\,a_{n-2} \\ &= \left(2\sqrt{3}/3+B_1\right)\left[a_{n-1}-1/3\left(2\sqrt{3}/3+B_1\right)^{-1}a_{n-2}\right] \end{aligned}$$

令 $-\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+B_1\right)^{-1}=B_1$，化简得 $3B_1^2+2\sqrt{3}B_1+1=0$，该方程有两个相同的解，即 $B_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，进一步有

$$a_n-\frac{\sqrt{3}}{3}a_{n-1}=\left(a_2-\frac{\sqrt{3}}{3}a_1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}=-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1},(n\ge 2)$$

在上式两边加上 $c(n-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$，有

$$\begin{aligned}a_n+c(n-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}&=\frac{\sqrt{3}}{3}a_{n-1}+c(n-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}a_{n-1}+c\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(n-2)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}+(c-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{a_{n-1}+c(n-2)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}+\sqrt{3}(c-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

令 $c-1=0$，得 $c=1$，由上式得 $a_n+(n-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}=a_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$，即

$$a_n=\left(\frac{7}{3}-n\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}.$$

3. $f(n)q^n\ne 0$ 时，问题(1)的求解方法

在(1)式两边同除以 q^n，有 $q^2\frac{1}{q^{n+2}}a_{n+2}=A_1q\frac{1}{q^{n+1}}a_{n+1}+A_2\frac{1}{q^n}a_n+f(n)$，并令 $b_n=\frac{1}{q^n}a_n$，则有

$$q^2b_{n+2}=A_1qb_{n+1}+A_2b_n+f(n),$$

为叙述方便，记为 $b_{n+2}=C_1b_{n+1}+C_2b_n+f(n)$，其中

$$C_1=A_1\frac{1}{q},C_2=A_2\frac{1}{q^2}. \tag{10}$$

在下面的讨论中，还要应用到多项式相等的定义。

定义 2.1 假设 $f(n)=a_0+a_1n+a_2n^2+\cdots+a_kn^k,g(n)=b_0+b_1n+b_2n^2+\cdots+b_ln^l$ 是关于自然数 n 的多项式(k,l 为自然数)，$f(n)=g(n)$ 当且仅当 $k=l,a_i=b_i,i=0,1,\cdots,k$。

3.1. 求解方法的思路

第1步. 确定非负整数m和多项式 $p(n)$。

在(10)的两边加上 $x_1b_{n+1}+p(n+1)(n+1)^m$，其中 x_1 为待定常数，m为待定非负整数，$p(n)$ 和 $f(n)$ 的次数相同的多项式，不妨设为

$$f(n)=a_0+a_1n+a_2n^2+\cdots+a_kn^k,p(n)=c_0+c_1n+c_2n^2+\cdots+c_kn^k,$$

有

$$
\begin{aligned}
&b_{n+2}+x_1b_{n+1}+p(n+1)(n+1)^m\\
&=C_1b_{n+1}+C_2b_n+f(n)+x_1b_{n+1}+p(n+1)(n+1)^m\\
&=(C_1+x_1)b_{n+1}+C_2b_n+f(n)+p(n+1)(n+1)^m\\
&=(C_1+x_1)\left\{b_{n+1}+\frac{C_2}{C_1+x_1}b_n+\frac{1}{C_1+x_1}\left[f(n)+p(n+1)(n+1)^m\right]\right\},
\end{aligned}\tag{11}
$$

要使(11)式两边的结构相同，令

$$x_1=\frac{C_2}{C_1+x_1},\tag{12}$$

并使得$(C_1+x_1)^{-1}\left[f(n)+p(n+1)(n+1)^m\right]=p(n)n^m$，也就是

$$p(n+1)(n+1)^m-(C_1+x_1)p(n)n^m=-f(n),\tag{13}$$

由(13)，首先确定非负整数 m 的取值。若已知 m 的值，然后根据多项式相等的定义可由(13)确定多项式 $p(n)$，因此，下面只讨论 m 的取值。

考察等式(13)左边的最高次数项$c_kn^{m+k}-(C_1+x_1)c_kn^{m+k}=(1-C_1-x_1)c_kn^{m+k}$。

若$1-C_1-x_1\neq 0$，由(13)和$c_k\neq 0$，有$m+k=k$，所以，$m=0$。

若$1-C_1-x_1=0$，考察(13)式左边的$m+k-1$，有

$$
\begin{aligned}
&c_{k-1}n^{m+k-1}-(C_1+x_1)\left[c_{k-1}n^{m+k-1}+c_kC_{m+k}^{m+k-1}n^{m+k-1}\right]\\
&=\left\{c_{k-1}-(C_1+x_1)\left[c_{k-1}+c_kC_{m+k}^{m+k-1}\right]\right\}n^{m+k-1}\\
&=\left\{(1-C_1-x_1)c_{k-1}-(C_1+x_1)c_k(m+k)\right\}n^{m+k-1}\\
&=-(C_1+x_1)c_k(m+k)n^{m+k-1},
\end{aligned}\tag{14}
$$

由(13)和(14)，有$m+k-1=k$，所以，$m=1$。

第2步．若$C_1^2+4C_2\neq 0$，则(12)有两个不同的解，即

$$x_1=\frac{-C_1+\sqrt{C_1^2+4C_2}}{2},x_2=\frac{-C_1-\sqrt{C_1^2+4C_2}}{2}.$$

由(11)知 $$b_{n+2}+x_1b_{n+1}+p(n+1)(n+1)^m=(b_2+x_1b_1+p(1))(C_1+x_1)^n,\tag{15}$$

$$b_{n+2}+x_2b_{n+1}+p(n+1)(n+1)^m=(b_2+x_2b_1+p(1))(C_1+x_2)^n,\tag{16}$$

联立(15)和(16)，有

$$
\begin{aligned}
b_{n+2}=&(x_2-x_1)^{-1}x_2(b_2+x_1b_1+p(1))(C_1+x_1)^n\\
&-(x_2-x_1)^{-1}x_1(b_2+x_1b_1+p(1))(C_1+x_1)^n-p(n+1)(n+1)^m,
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
b_n=&(x_2-x_1)^{-1}x_2(b_2+x_1b_1+p(1))(C_1+x_1)^{n-2}\\
&-(x_2-x_1)^{-1}x_1(b_2+x_1b_1+p(1))(C_1+x_1)^{n-2}-p(n-1)(n-1)^m,
\end{aligned}\tag{17}
$$

第3步．若$C_1^2+4C_2=0$，则(12)有两个相同的解，即$x_1=-\dfrac{C_1}{2}$，再由(11)、(12)和(13)知数列

$b_{n+2}-\frac{C_1}{2}b_{n+1}+p(n+1)(n+1)^m$ 是以公比为 $\frac{C_1}{2}$ 的等比数列，且有

$$b_{n+2}=\frac{C_1}{2}b_{n+1}+\left(b_2-\frac{C_1}{2}b_1+p(1)\right)\left(\frac{C_1}{2}\right)^n-p(n+1)(n+1)^m, \tag{18}$$

利用与第一步相同的方法，在(18)的两边加上 $c(n+1)\left(\frac{C_1}{2}\right)^{n+1}+d\psi(n+1)(n+1)^l$，其中 c,d 是待定常数，l 为待定非负整数，$\psi(n)$ 待定多项式，$\psi(n)$ 是和 $\varphi(n)=p(n+1)(n+1)^m$ 次数相同的多项式，有

$$\begin{aligned}
&b_{n+2}+c(n+1)\left(\frac{C_1}{2}\right)^{n+1}+d\psi(n+1)(n+1)^l\\
&=\frac{C_1}{2}b_{n+1}+c(n+1)\left(\frac{C_1}{2}\right)^{n+1}+\left(b_2-\frac{C_1}{2}b_1+p(1)\right)\left(\frac{C_1}{2}\right)^n-\varphi(n)+d\psi(n+1)(n+1)^l\\
&=\frac{C_1}{2}b_{n+1}+\left[c\frac{C_1}{2}+\left(b_2-\frac{C_1}{2}b_1+p(1)\right)\right]\left(\frac{C_1}{2}\right)^n+c\frac{C_1}{2}n\left(\frac{C_1}{2}\right)^n-\varphi(n)+d\psi(n+1)(n+1)^l\\
&=\frac{C_1}{2}\left\{b_{n+1}+\frac{2}{C_1}\left[c\frac{C_1}{2}+\left(b_2-\frac{C_1}{2}b_1+p(1)\right)\right]\left(\frac{C_1}{2}\right)^n+cn\left(\frac{C_1}{2}\right)^n+\frac{2}{C_1}d\psi(n)n^l\right\}\\
&\quad+\frac{2}{C_1}\left[d\psi(n+1)(n+1)^l-d\psi(n)n^l-\varphi(n)\right]\\
&=\frac{C_1}{2}\left\{b_{n+1}+cn\left(\frac{C_1}{2}\right)^n+d\psi(n)n^l\right\},
\end{aligned} \tag{19}$$

最后一个等式是为使(19)两边的结构相似，在此令

$$c\frac{C_1}{2}+\left(b_2-\frac{C_1}{2}b_1+p(1)\right)=0, \tag{20}$$

$$d\psi(n+1)(n+1)^l-d\psi(n)n^l-\varphi(n)=0. \tag{21}$$

由(20)，有 $c=-\frac{2}{C_1}\left(b_2-\frac{C_1}{2}b_1+p(1)\right)$。对于(21)，本节第1步同样的方法，可以确定待定常数d、非负整数l的取值和多项式$\psi(n)$。

由(19)，得

$$b_{n+2}+c(n+1)\left(\frac{C_1}{2}\right)^{n+1}+d\psi(n+1)(n+1)^l=\left\{b_2+c\left(\frac{C_1}{2}\right)+d\psi(1)\right\}\left(\frac{C_1}{2}\right)^n,$$

即有 $b_n=\left\{b_2+c\left(\frac{C_1}{2}\right)+d\psi(1)\right\}\left(\frac{C_1}{2}\right)^{n-2}-c(n-1)\left(\frac{C_1}{2}\right)^{n-1}+d\psi(n-1)(n-1)^l$。

3.2. 方法应用举例

例 3 数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，$a_{n+1}=3a_n+(2n+1)3^{n+1}$，求通项$a_n$。

解：在 $a_{n+1}=3a_n+(2n+1)3^{n+1}$ 的两边同除以 3^{n+1}，我们有 $\frac{1}{3^{n+1}}a_{n+1}=\frac{1}{3^n}a_n+(2n+1)$，并且令 $b_n=\frac{1}{3^n}a_n$，

则有 $b_{n+1}=b_n+(2n+1)$，在此式两边加上 $p(n+1)(n+1)^m$，其中m为待定非负整数，$p(n)$和 $2n+1$的次数相同的多项式，不妨设为 $p(n)=c_0+c_1n$，有

$$b_{n+1}+p(n+1)(n+1)^m=b_n+p(n)n^m+p(n+1)(n+1)^m-p(n)n^m+(2n+1),$$

要使得上式结构相似，令 $p(n+1)(n+1)^m-p(n)n^m=-2n-1$，用以确定 $p(n)$。将 $p(n)=c_0+c_1n$ 代入上式，考察上式左边 n 的最高次数项为 $(1+m)c_1n^m$，有多项式相等的定义，有 $m=1,c_1=-1$，进而有 $c_0=0$。因此，有 $b_{n+1}-(n+1)^2=b_1-1=\frac{1}{3}a_1-1=\frac{1}{3}$，即 $b_n=\frac{1}{3}+n^2$，也就是

$$a_n=\left(\frac{1}{3}+n^2\right)3^n=\left(1+3n^2\right)3^{n-1}.$$

例 4 数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，$a_{n+1}=3a_n+\left(2n^4+1\right)3^{n+1}$，求通项 a_n。

解：在 $a_{n+1}=3a_n+(2n+1)3^{n+1}$ 的两边同除以 3^{n+1}，我们有

$$\frac{1}{3^{n+1}}a_{n+1}=\frac{1}{3^n}a_n+\left(2n^4+1\right),$$

并且令 $b_n=\frac{1}{3^n}a_n$，则有 $b_{n+1}=b_n+\left(2n^4+1\right)$，在此式两边加上 $p(n+1)(n+1)^m$，其中m为待定非负整数，$p(n)$和 $2n^4+1$ 的次数相同的多项式，不妨设为 $p(n)=c_0+c_1n+c_2n^2+c_3n^3+c_4n^4$，有

$$b_{n+1}+p(n+1)(n+1)^m=b_n+p(n)n^m+p(n+1)(n+1)^m-p(n)n^m+\left(2n^4+1\right),$$

要使的上式结构相似，令 $p(n+1)(n+1)^m-p(n)n^m=-2n^4-1$，并将

$$p(n)=c_0+c_1n+c_2n^2+c_3n^3+c_4n^4,$$

代入上式，有多项式相等的定义，我们有

$$m=1,c_0=\frac{11}{15},c_1=-\frac{5}{3},c_2=-\frac{2}{3},c_3=1,c_4=-\frac{2}{5}.$$

因此，有 $b_{n+1}+p(n+1)(n+1)=b_1+p(1)=\frac{1}{3}$，即

$$b_{n+1}=-p(n+1)(n+1)+\frac{1}{3}=-\frac{2}{5}+\frac{5}{3}(n+1)+\frac{2}{3}(n+1)^2-(n+1)^3+\frac{2}{5}(n+1)^4,$$

也就是 $a_n=\left(-\frac{2}{5}+\frac{5}{3}n+\frac{2}{3}n^2-n^3+\frac{2}{5}n^4\right)3^n$。

4. 可转化为(1)的几种类型

4.1. 形如 $a_{n+2}=A_1a_{n+1}+A_2\mu^n+f(n)$ 递推式

已知 A_1,A_2,μ 为非零常数，$f(n)$ 是关于自然数 n 的多项式。若已知递推关系形如

$$a_{n+2}=A_1a_{n+1}+A_2\mu^n+f(n). \tag{22}$$

将(22)的两边同时除以 μ^n，有 $\mu^2\frac{1}{\mu^{n+2}}a_{n+2}=A_1\mu\frac{1}{\mu^{n+1}}a_{n+1}+A_2+f(n)\left(\frac{1}{\mu}\right)^n$，令 $b_n=\frac{1}{\mu^n}a_n,q=\frac{1}{\mu}$，则有 $\mu^2b_{n+2}=A_1\mu b_{n+1}+A_2+f(n)q^n$，即

$$b_{n+2}=A_1\mu^{-1}b_{n+1}+\mu^{-2}f(n)q^n+A_2\mu^{-2}, \tag{23}$$

$$b_{n+1}=A_1\mu^{-1}b_n+\mu^{-2}q^{-1}f(n-1)q^n+A_2\mu^{-2}, \tag{24}$$

由(23)和(24)，有 $b_{n+2}=\left(A_1\mu^{-1}+1\right)b_{n+1}-A_1\mu^{-1}b_n+\mu^{-2}\left(f(n)-q^{-1}f(n-1)\right)q^n$。即为(1)的形式。

4.2. 形如 $a_{n+1}=(aa_n+b)/(ca_n+d)$ 递推式

已知 a,b,c 为非零常数，若已知递推关系形如

$$a_{n+1}=(aa_n+b)/(ca_n+d) \tag{25}$$

令 $a_n=b_n+x$，并代入(25)，有

$$\begin{aligned} b_{n+1}&=\left[a(b_n+x)+b\right]/\left[c(b_n+x)+d\right]-x \\ &=\frac{a(b_n+x)+b-xc(b_n+x)-dx}{c(b_n+x)+d} \\ &=\frac{(a-xc)b_n-cx^2+(a-d)x+b}{c(b_n+x)+d}, \end{aligned} \tag{26}$$

在(26)中，令 $cx^2-(a-d)x-b=0, a-xc\neq 0$，不妨设其解为 μ，则(26)变为

$$b_{n+1}=\frac{(a-\mu c)b_n}{cb_n+c\mu+d},$$

进而有 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{c\mu+d}{a-\mu c}\frac{1}{b_n}+\frac{c}{a-\mu c}$，令 $c_n=\frac{1}{b_n}$，则 $c_{n+1}=\frac{c\mu+d}{a-\mu c}c_n+\frac{c}{a-\mu c}$，即为(1)的形式。

4.3. 形如 $a_{n+1}=a^r a_n^s a_{n-1}^t$ 递推式

已知 $a>0$ 为常数，r,s,t 为常数，$a_1>0$。若已知递推关系形如

$$a_{n+1}=a^r a_n^s a_{n-1}^t \tag{27}$$

将(27)两边取对数，有 $\lg a_{n+1}=s\lg a_n+t\lg a_{n-1}+r\lg a$，即转化为(20)，进而可以化为(1)的形式。

基金项目

临沂大学教学质量工程项目(2017, 2019)；临沂大学本科教学改革研究面上项目(2020)。

参考文献

[1] 徐佩. 求数列通项公式的三种常用方法[J]. 语数外学习(高中版下旬), 2021(4): 47.
[2] 李俊. 求数列通项公式的两个技巧[J]. 语数外学习(高中版中旬), 2021(4): 53.
[3] 刘少林. 求数列通项公式的途径[J]. 语数外学习(高中版上旬), 2021(4): 38.
[4] 马力. 求数列通项公式的常用方法[J]. 语数外学习(高中版下旬), 2020(3): 39-40.
[5] 王小龙. 谈一类递推数列通项公式的求法[J]. 中学教学参考, 2019(26): 22.
[6] 郑观宝. 完善一类递推数列通项公式的求法[J]. 中学数学教学, 2006(6): 27-28.
[7] 林志斌. 递推数列通项公式的一种常用求法——待定系数法[J]. 数学教学通讯, 2004(7): 41-42.
[8] 夏金根. 二阶线型递推数列通项公式的求法[J]. 数学通讯, 2005(Z1): 12.
[9] 孔令霞. 递推数列通项公式求法探讨[J]. 中学数学教学参考, 2004(8): 33-34.
[10] 黄耿跃. 二阶线型递推数列通项公式的一种求法[J]. 数学教学通讯, 2007(5): 64-65.

[11] 王峰. 求解数列通项公式的常用方法[J]. 数学通讯, 2005(2): 3-4.

[12] 吴启明. 求一类数列通项公式的思路[J]. 数学通讯, 2004(24): 4-5.

[13] 李玉中. 一类递推数列通项公式的求法[J]. 中学数学教学参考, 1994(4): 40-41.

[14] 王维山. 一类数列的通项公式公式[J]. 数学教学研究, 1994(4): 25-27.

[15] 王小彦. 常见递推数列通项公式的求解策略[J]. 中学教学参考, 2010(1): 32-33.

[16] 赵伟. 由数列的递推公式求通项公式的一类特殊解法[J]. 中学数学杂志(高中), 2005(4): 39-40.

[17] 钱立凯. 二阶齐次线性递推数列通项公式的求法——行列式法[J]. 中学数学教学参考, 2015(12): 46-47.

[18] 汪伟. 二阶线性递推数列通项公式的矩阵求法[J]. 淮南师范学院学报, 2004, 6(3): 27-29.

[19] 易斌. 常见递推数列通项公式的求法[J]. 数学通讯, 2020(5): 13-17.