Advances in Education 教育进展, 2021, 11(6), 2068-2073
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2021.116320

Hans汉斯

“数列极限的概念”教学设计探索

王丽英，孙慧静，毛 凯，刘 丹

海军航空大学，山东 烟台

收稿日期：2021年10月1日；录用日期：2021年10月28日；发布日期：2021年11月4日

摘 要

数列的极限是初等数学向高等数学过渡的关键内容，是学习高等数学的基础与核心，其思想贯穿于高等数学的始终。数列极限的概念高度抽象，是高等数学中最难理解的部分，数学史是帮助学员理解数学的一扇窗，本文结合多年的教学经验、实践和反思，沿着数列极限的发展历程将极限这个难点进行了分割，对“数列极限的概念”教学设计和实施方法进行探究，在拓展学生的科学文化素养的同时，也让学生在探索新知的课堂环境中逐步理解和掌握极限的概念。

关键词

数列的极限，数学史，教学设计

The Concept of the Limits of the Series Teaching Design Exploration

Liying Wang, Huijing Sun, Kai Mao, Dan Liu

Naval Aviation University, Yantai Shandong

Received: Oct. 1st, 2021; accepted: Oct. 28th, 2021; published: Nov. 4th, 2021

Abstract

The limit of the sequence of numbers is the key content of the transition from elementary mathematics to advanced mathematics, and is the foundation and core of learning advanced mathematics. Its ideas run through the whole of advanced mathematics. The concept of the limit of a sequence of numbers is highly abstract and is the most difficult part to understand in advanced mathematics. The history of mathematics is a window to help students understand mathematics. This article combines years of teaching experience, practice and reflection, along the development process of the limit of the sequence, the difficulties are divided, and the teaching

文章引用: 王丽英, 孙慧静, 毛凯, 刘丹. “数列极限的概念”教学设计探索[J]. 教育进展, 2021, 11(6): 2068-2073.
DOI: 10.12677/ae.2021.116320

design and implementation methods of the "concept of sequence limit" are explored. While expanding students' scientific and cultural literacy, it also allows students to gradually understand and master the concept of limit while exploring the new knowledge of the classroom environment.

Keywords

Limits of Sequence, History of Mathematics, Instructional Design

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

函数是高等数学研究的主要对象，研究函数的工具与方法则是极限[1]。如果将高等数学比作一颗参天大树，它就是以初等数学为根基，以极限为树干，由此滋生出了导数、微分、积分等众多枝杈。所以我们说极限是高等数学的基础与核心，是初等数学向高等数学过渡的关键内容，如果要用一句话概括高等数学，那就是用极限的思想研究函数问题。数列极限的概念高度抽象，是高等数学中最难理解的部分。近年来，很多学者对数列极限的教学设计进行了研究，如江苏科技大学的孙红[2]，福州大学的刘宣[3]。上海电力大学的孙玉芹[4]在“数列的极限”教学设计方面进行了相应的创新，在讲授知识的同时，融入了数学史和数学人文思想的相关介绍。数学史能够很好的激发学生的学习兴趣，对培养学生的价值观有着重要的作用[5]。

我们的授课对象大一新生，通过高中系统的学习，学生们具备了一定的数学思想和素养，初步接触了数列的相关知识，为学习奠定了基础；但也存在相应的问题，如正他们于中学到大学的过渡时期，对知识的理解尚处于被动地接受阶段。此外，学生们虽然在高中接触过数列极限的初步知识，但缺乏对概念的深入理解。本文结合我校学生的特点，对“数列的极限”教学设计做了一个全新的探索，以数学史贯穿始终，让学生在学习数学知识的同时，了解它所包含的历史背景。在具体的课例设计中，通过引入相关的应用案例，采用提问引导、图示讲解、动画演示的教学方法，拓展学生思维，激发学生学习兴趣和探索欲望，促进学生们进一步体会极限的思想和内涵。

2. 创设情境，导入新课

设计流程：课堂上，首先向学生们提出问题：什么是极限？大家听说过极限吗？接着引导学生思考生活中的极限：1) 挑战极限已经成为了生活中最时髦的词语和活动。像滑雪、踏浪、蹦极等极限运动，这些运动中蕴含了挑战自我胆量、勇气和耐力的极限精神；2) 百米冲刺时，超越自我的极限挑战则是在冲击人类体能的“极限”。3) 各种军事报道中的极限－舰载机在着舰的瞬间，飞行员身体面临的极限考验，航母的实际排水量均已超过了极限排水量；4) 军事训练中隐含着的更多极限挑战，从某些方面来说，训练强度越大，挑战极限越狠。军队越具有强大的战斗力。

设计目的：通过一系列的设问和引导，让学生感悟到生活中的极限意为“不可逾越的数值”。进一步，向学生提问：什么是数学中的极限呢？实现知识的自然顺承和导入，激发学生的学习兴趣和探索欲望。

3. 数列极限概念的形成

3.1. 极限思想的萌芽阶段

设计流程：通过动画向学生展示我国古代最早蕴含极限思想的两个案例：1) 春秋战国时期，著名的思想家哲学家庄子在他的《天下篇》中说过“一尺之锤，日取其半，万事不竭”。它描述的是一根一尺长的木棒，每天截取剩余木棒的一半，按照这种方式依次截取，整个过程可以无限地进行下去。2) 魏晋时期的刘辉为了解决圆周率的计算问题而创立的“割圆术”，它使得我国古代在圆周率的计算方面长期处于世界领先地位。

设计目的：1) 让学生明白庄子的话所隐含的思想本质是指无限的思想，它古人对极限思想的一个初步认识；所谓万世不竭，即为木棒具有无限可分性。这种初步的极限思想为后人们解决实际问题提供了灵感。2) 刘辉的割圆术就是这种“无限”思想在实际问题求解中的一个重要的应用，即用圆内接正多边形的面积来近似圆面积的一种方法。通过动画演示割圆术的过程，让学生体会圆的面积是在无限的变化过程中由正多边形的面积无限逼近得到的这一思想，进而启发学生，它是近代极限思想的雏形，体现的是“用已知逼近未知、用近似逼近精确”的一种直观的极限思想。

3.2. 极限思想的发展阶段

设计流程：1) 为了给出极限的定义，以“截丈术”为例进行研究。2) 给出数列极限的直观性定义后，引导学生对定义的优缺点进行分析，为后续精确性定义的提出奠定基础。3) 增加这一时期的极限发展史。具体流程如下：

3.2.1. 数列极限直观性定义的提出

将剩余木棒的长度按照时间增大的顺序排列出来，得到了一个无穷等比数列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots。$$

结合无穷数列 $0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\cdots,1+\frac{(-1)^n}{n},\cdots$ 和无穷数列 $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$，引导学生通过图示法来讨论这三个数列的整体变化趋势。提炼三个数列通项变化趋势的共性：前两个数列的通项 x_n 会随着项数 n 的无限增大，无限接近于某个确定的常数 a，第 3 个数列不具备这一特性。从而得到了数列极限的直观性定义。

定义 1：对于数列 $\{x_n\}$，如果当项数 n 无限增大时，通项 x_n 无限接近于某个确定的常数 a，则称数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，或称 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，否则称数列 $\{x_n\}$ 无极限，或发散。

3.2.2. 直观性定义详解

首先，定义的核心是“项数 n 无限增大的变化过程中，通项 x_n 具有无限接近于定常数 a 的变化趋势”。其次，“n 无限增大”的变化过程和“x_n 具有无限接近于定常数 a”的变化趋势都是借助于“无限”这个词语加以修饰的。

引导学生分析并思考：1) 定义中的“无限”要说明什么？——“无限”给了我们一种很模糊的而感觉。而造成这种感觉的原因在于这一定义是在运动观点的基础上，将由几何图像所产生的直觉，用自然语言给出了一个定性的描述，缺少定量的分析过程，是不精确的。很可能会导致错误的结论。2) 实例解释定性描述的缺点：数列 $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限为什么是 1 而不是 1.0001？

设计目的：让学生体会到直观的描述性定义虽通俗易懂但不精确，让学生明白一个道理——没有任何理论依据的定性描述，是不严谨的，必然会引起怀疑。

3.2.3. 数列极限直观描述性定义的发展史

数列极限的直观型定义一直延续到极限思想发展的第 2 个历程，17~18 世纪。1) 17~18 世纪是微积分诞生的世纪，牛顿和莱布尼兹分别从物理和几何等研究方向上各自独立地建立了微积分，在他们创立微积分的过程中都用到了极限的思想，但都没能严格明确极限的含义，这种理论上的缺陷，招来了哲学上的非难、嘲讽和攻击。导致了第二次数学危机的爆发。数学的天空阴云密布，但科学的发展势不可挡。2) 在随后近一个世纪的时间里，为数众多的数学家们都在致力于解释什么是极限？18 世纪法国的数学家达朗贝尔第一个将极限作为一个概念提了出来：“极限是一个变量趋于一个固定量，趋于程度小于任何给定量且变量永远达不到固定量”。可惜的是，他没能将这个表示公式化，使得他的极限观念仍然是描述性的。随后，法国数学家柯西在他的教程中给出了当时是最清晰的极限定义，但这个定义的严谨性还是不够，定义中的“无限趋于”、“要多么小就多么小”仍然是描述性的，含义不够明确。

设计目的：1) 让学生在学习数学知识的同时，了解相关文化背景，拓展学生的科学文化素养。

2) 启发学生思考，如何才能将极限定义从这种定性描述转化为严格的数学定义呢？即用数学语言将直观性定义中的“n 无限增大的变化过程”和“ x_n 无限接近于常数 a 的变化趋势”这两个定性描述，定量地刻化出来。

3.3. 极限思想的完善阶段

设计流程：1) 举例引导学生完成定性描述向定量描述的转化。2) 给出数列极限的精确性数学定义，并展示这一时期的极限发展史。

3.3.1. 定性描述向定量描述的过渡

以无穷数列 $0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\cdots,1+\frac{(-1)^n}{n},\cdots$ 为例，引导学生定量地刻化项数 n 足够大时，通项 x_n 无限接近于 a 的过程。注意，在这个数列中， $x_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$, $a=1$ 。

首先，引导学生实现“n 无限增大时，$x_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$ 无限接近于常数 1”的等价转化。1) 等价于当“n 无限增大时，$|x_n-1|$ 无限接近于 0；而 $|x_n-1|$ 无限接近于 0 也就意味着 $|x_n-1|$ 可以要多么小就多么小。要多么小就多么小，即当任意给定一个正数时(不论多么小)，都能够做到 $\frac{1}{n}$ 比所给定的正数还要小。显然对于 $\frac{1}{n}$ 来说，当 n 越来越大，n 足够大时，$\frac{1}{n}$ 就会越来越小，就可以小于任意给定的正数。而这里的这个任意小的正数，实际上就是度量 x_n 与 1 接近程度的一个尺码。

其次，列举实例让学生具体感受这个衡量接近程度的尺码。如给定尺码 0.01，要使 $\frac{1}{n}$ 小于 0.01，只需 $n>100$，这表明，该数列从第 101 项起之后的所有项与 1 之间的距离都可以小于事先给定的正数 0.01；再给定一个更小的尺码 0.001，要使 $\frac{1}{n}<0.001$，只需 $n>1000$，那么数列从第 1001 项起之后的所有项与 1 之间的距离都可以小于事先给定的正数 0.001。当然，还可以给定更小的尺码，如万分之 1，亿分之 1，同样的都可以找到足够大的 n，使得数列从该项之后的所有项与 1 之间的距离都小于我们所选定的尺码。

最后，启发学生思考：“选定的尺码可以任意的小”与“小于一个任意小的数”是一个意思吗？如

何解决？引入符号 ε，用它来表示任意小的正数。显然，要让 $|x_n-1|$ 小于事先给定的任意小的正数 ε，显然只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，为了找到相应的正整数，将它取整再加 1，这样数列从第 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 项之后的所有项与 1 之间的距离都能小于任意给定的正数 ε。为简化用 $N(\varepsilon)$ 来简化表示。于是得到了数列极限的严格数学定义。至此，极限的思想的到了完善。

3.3.2. 数列极限的精确数学定义

定义 2 对于数列 $\{x_n\}$，若存在常数 a，对于任意 $\varepsilon>0$ (不论多么小)，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$，都成立，则称数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a。

这一定义被称为数列极限的精确数学定义,也被称为高等数学上最难理解和掌握的定义。它的提出历经了 2 个多世纪，是由德国数学维尔斯特拉斯在众多数学家一步步积累的基础上总结出来的，被称为“增加一个字显得多，去掉一个字显得少”并且沿用至今的一个经典概念。该定义的提出也平息了第二次数学危机。

设计目的：让学生体会数学概念的精确性、严谨性；让学生感知到科学的力量是无穷的。激发学生的学习热情和动力。

4. 剖析概念，揭示辩证关系

数列极限精确数学定义的简洁形式为：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in N^+,\ \text{s.t.当 } n>N \text{ 时，恒有 } |x_n-a|<\varepsilon\text{。}$$

引导学生对这一定义进行剖析，重点掌握定义中 ε 和 N 的特性：1) 定义中的 ε 具有两重性，它既是确定的，又是任意变化的。一旦被确定，它就是一个常数，是定的。而当它任意变化时，可以比你想象到的任意一个正数还要小。原因是它是动的。ε 的两重性中蕴含了静与动的辩证哲学思想。正是由于 ε 的运动性，才准确地刻画了 x_n 与 a 的无限接近程度。2) ε 的相对静止性即确定性，则是被用来寻找项数 N 的，N 是后 ε 而提出的，依赖于 ε 而存在，是一个正整数，具有无穷多个。3) 整个定义的关键在于 N 的存在性，对于一个有极限的数列，必须要找到相应的 N，因为我们关心的是数列从 N 项之后的 $N+1$ 项、$N+2$ 项……直到最后的无穷项的变化趋势。

同时，通过具体的例题加深学生对定义的理解，并引导学生总结上述证明过程中的关键步骤。

例：用数列极限的定义证明 $\lim_{n\to\infty}\left(1+(-1)^n/n\right)=1$

证明：对任意的 $\varepsilon>0$，欲找到一个正整数 N，使得 $n>N$ 时，恒成立 $\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$。

注意到，$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$，故要使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，恒成立

$$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$。

设计目的：1) 让学生在理解和掌握 ε 和 N 所具有的特性的同时，揭示其中蕴含的辩证关系。2) 通过例题，进一步加强学生对抽象概念的理解。3) 提示学生，数列极限的定义并没有告诉我们如何去求一

个数列的极限，但我们可以用它来验证某个常数是否是给定数列的极限，同时它也给了我们跳出无限过程而达到有限真值的方法。

5. 教学设计特色

5.1. 教学内容渗透哲学思想，突出文理结合

“博古通今”创设情境，导入新课，揭示数学中的辩证关系；引入学科发展史，在讲授知识的同时，拓展学员的科学文化素养。

5.2. 教学过程增强“导”、“悟”能力

始终坚持以教员的导，学员的学与悟为主线，揭示概念的生成，完成教学过程的升华；以极限的发展历程为时间轴，将极限概念这个难点进行了分割，让学员在了解历史知识的同时，学好数学知识。

5.3. 教学目标凸显政理结合、训练思维

在系统讲授经典知识的同时，优化学员的思维品质，拓展学员的数学视野，增强学员的概括能力和抽象思维能力。

6. 小结

极限的思想贯穿于高等数学的始终，随后我们将要学习的连续的定义、导数的定义、定积分的概念等都要用到极限。极限是高等数学这个大草原的星星之火，能够燎原整个高等数学，同时它还是数学界的文艺青年，李白曾在诗中写道：孤帆影碧空尽，唯见长江天际流。同学们课后可以尝试着体会一下这两句话中包含的极限意境。最后，生活中的极限与数学中的极限虽不同，但又有着千丝万缕的联系，极限的这个符号向我们诠释着永远运动，无限接近。希望同学们能够坚守住最初的理想，不忘初心，砥砺前行，做到精益求精，方得始终。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(第七版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 孙红, 徐维艳. “数列的极限”的教学设计探索[J]. 兰州教育学院学报, 2016, 36(12): 121-123.

[3] 刘宣. 数列概念教学设计[J]. 南昌教育学院学报, 2015, 2(1): 77-79.

[4] 孙玉芹, 刘建军. 有限的生命与无限的价值——数列的极限教学案例[J]. 教育教学论坛, 2019(42): 175-176.

[5] 李玲. 数学史融入数列教学的行动研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2016.