

数学建模思想在交通运筹学课程教学中的应用研究

何胜学*, 崔允汀

上海理工大学管理学院, 上海

收稿日期: 2021年12月17日; 录用日期: 2022年1月17日; 发布日期: 2022年1月24日

摘要

为了在交通运筹学课程教学过程中增加学生对知识的掌握和学习兴趣, 并培养学生的数学建模思想和能力, 设计了将数学建模思想引入相关课程教学的具体方法步骤。通过比较分析数学建模和交通运筹学的内容, 明确了两者之间存在内在关联关系。以数学建模的基本框架为基础, 提出了在交通运筹学教学中应用建模思想的8个步骤。在上述步骤方法中明确了课堂内外活动的内容差异与联系, 并对活动采取的形式, 如集体讨论和分组协作, 予以说明。通过一个具体案例进一步解释了方法的实际操作, 证实方法的有效性。研究表明: 在交通运筹学的教学过程中引入数学建模思想, 不仅可以实现学生对教学内容的深入理解和增加后续学习兴趣, 而且可以有效培养学生的数学建模思想, 增强学生的实际数学建模能力。

关键词

数学建模, 运筹学, 课程改革, 交通流分配

Applying the Mathematical Modeling Thought to the Course Teaching of Transportation Operations Research

Shengxue He*, Yunting Cui

Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Dec. 17th, 2021; accepted: Jan. 17th, 2022; published: Jan. 24th, 2022

Abstract

In order to increase students' knowledge mastery and interest in learning and cultivate students'

*通讯作者。

thinking and ability of mathematical modeling in the course teaching of transportation operations research, specific steps of method are designed to introduce the thinking of mathematical modeling into the teaching of relevant course. By comparing and analyzing the contents of mathematical modeling and traffic operations research, it is clarified that there is internal correlation between them. Based on the basic framework of mathematical modeling, this paper proposed eight steps of applying modeling idea in the course teaching of transportation operations research. In the above steps, the content differences and connections of activities inside and outside the classroom are clarified, and the forms of activities, such as group discussion and group collaboration, are explained. The practical operation of the method is further explained through a specific case, and the validity of the method is verified. The research shows that the introduction of mathematical modeling in the teaching process of transportation operations research can not only realize students' deep understanding of the teaching content and increase their interest in following study, but also effectively cultivate students' thought of mathematical modeling and increase their ability of practical mathematical modeling.

Keywords

Mathematical Modeling, Operation Research, Teaching Reform, Traffic Assignment

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

各类数学建模竞赛(特别是一年一度的大学生数学建模大赛)的开展对高校数学相关课程的教学产生了深刻影响,也对改进学生的学习方法和思维方式产生了积极作用。在不少学校,参与数学建模大赛俨然成风,每年暑期都会有大量的学生留校备战。一方面参赛本身是对学生数学素养的提升,另一方面大量无序的从众式参与也浪费了学生大量的宝贵时间。尽管数学建模大赛已有良好的赛前与赛后组织,但是提升赛事质量与实现赛事目的的根本却在于学生平时的知识积累、技能提升和思想方法培养。因此,“如何在课程的教学中合理体现和应用数学建模思想”就成为相关教师需要思考和解决的一个重要问题。

交通运筹学是一门理论与实践相结合面向实际应用的应用数学类课程。交通运筹学需要应用各种运筹学知识解决交通运输规划、交通管理、交通控制、交通组织以及交通工程中遇到的各种问题。这样的教学内容正好提供了大量机会来实践数学建模的思想与方法。但是相关的传统教学方法以内容灌输和习题训练为主,缺乏对学生发现问题、提出问题和创造性地解决问题的能力培养,不利于培养学生进一步学习钻研的兴趣。如果能将数学建模的思想引入交通运筹学的教学,实现教学的全过程项目研究形式的组织与推进,不仅可以解决上述问题,也可进一步提升学生数学建模的能力,培养其良好的数学建模思想,为未来的学习研究打好基础。

基于上述对数学建模大赛与交通运筹学课程教学的思考,本文将深入分析两者之间存在的关联关系,给出将数学建模思想应用于相关课程教学的具体方法,并通过案例证实方法的有效性,最后总结研究结论,并指出新方法对其他课程教学的借鉴意义。

近年来,一些研究者针对如何将数学建模思想应用于教学,特别是运筹学课程教学,进行了深入研究。文献[1]将数学建模课程分为预期课程、实施课程和达到课程,并阐述了实施数学建模教育研究的主要方法。文献[2]从理论与实践上论述了数学建模实质上就是科学研究的主要思想和武器,建议从科学研

究的角度重构了数学建模教学内容。文献[3]指出教育量化研究的本质就是通过建立数学模型以达到解决相关教育问题的目的。文献[4]提出在智能教育背景下应当全方位开展数学建模教育教学。文献[5]提出从建模活动的基础、数学建模与传统数学教学的关系、数学建模活动的形式和教师培训等方面出发完善中学的数学建模活动。在将数学建模思想应用于运筹学教学方面, 文献[6]阐述了运筹学与数学建模的内在联系, 指出将运筹学教学与数学建模思想相结合的实施教学改革的重要性。文献[7]认为把数学建模和数学实验融入到运筹学课程教学之中, 可有效培养学生运用运筹学知识解决实际问题的能力。文献[8]从运筹学教学中存在的问题角度出发阐述了将数学建模思想融入运筹学教学的意义。

与现有研究不同, 本文将首先分析数学建模理论与交通运筹学课程之间存在的内在关联关系, 并基于上述分析给出将数学建模思想引入交通运筹学教学的具体实施方法, 最后通过案例说明给定方法的有效性。

2. 交通运筹学与数学建模的关联性

数学建模的过程是一个应用数学知识解决现实问题的复杂过程。在文献[2]中, 作者将数学建模归纳为 9 个步骤, 如图 1 所示。数学建模首先需要有现实的场景与问题。通过对现实场景的分析, 选择合理的数学工具, 对其进行抽象化和条理化, 从而形成合适的数学模型。而为了解决得到的数学模型, 一般需要利用计算机软件、计算机语言进行编程处理, 实现从数学模型到计算机模型的转化。计算的结果需要经过分析处理, 实现与实际场景的契合。而问题是否得到了解决, 需要回到现实中做进一步的验证。上述的过程是一个反复循环, 不断推进的过程, 相关的数学模型与相应的解决方法需要根据结果做出适当的修正与改进。

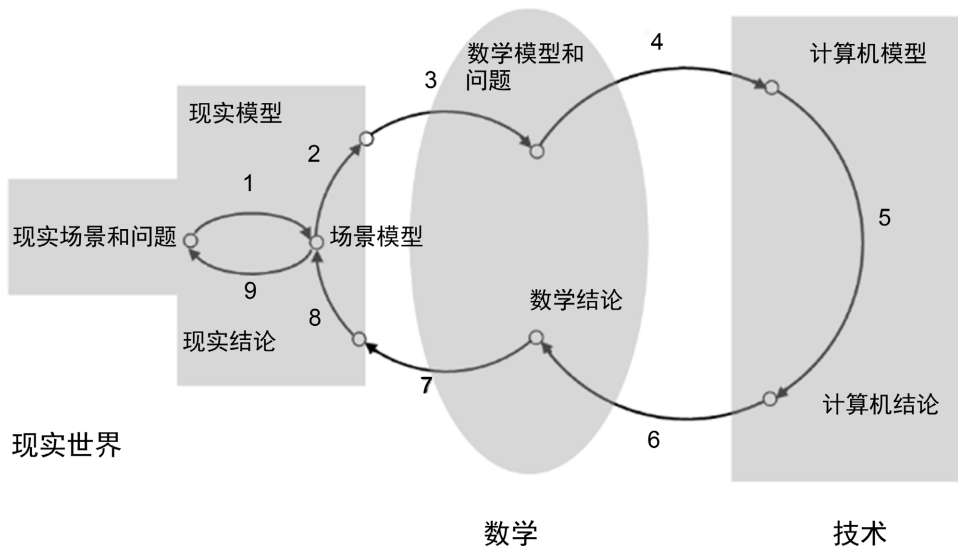


Figure 1. The framework of mathematical modeling with 9 steps [2]
图 1. 数学建模的 9 步框架[2]

交通运筹学的课程内容非常丰富, 所涉及的场景主要包括: 交通控制中的道路交叉口控制、快速路匝道控制、干道及线网整体控制; 城市交通网络规划与管理中的出行需求预测、交通流量分配、交通方式选择、停车设施选址、停车供需匹配; 公共交通中的公交调度排班、公交线路协同控制、常规公交与轨道交通等方式的整合优化; 其他交通方式中的飞机航线优化、乘务调度、列车时刻表优化、多种方式联运的组织优化; 交通工程中涉及的一些优化问题, 如道路维护保养、道路巡检线路优化、道路流量检

测设施布设等。交通运筹学课程中涉及的常用数学建模手段主要包括：线性规划、非线性规划、启发式求解算法、变分不等式、图论、现代的各种人工智能方法。

通过上述对数学建模思想与交通运筹学课程内容的介绍，可以看出两者之间具有一些内在的联系，也存在显著的差异。在处理问题时两者的基本思想上是一致的，即针对一个实际场景，构建数学模型，然后选择合理方法进行求解。两者的主要差异在于数学建模更重视问题的提炼与方法的选择，在解决问题过程中对数学的应用是有意识的；而交通运筹学课程基于长期实践已经有了大量的基础数学模型和有效方法，因此更加注重对这些知识的了解和掌握，而在解决问题过程中往往缺乏针对数学建模过程和求解方法选择的深入分析。

综合上述的分析，可以看出将数学建模思想应用于交通运筹学的教学不仅可行，也有必要。通过将两者融合不仅可以培养学生应用数学思维解决实际问题的能力，而且可以深化学生对交通运筹学课程中核心内容的掌握。首先，需要从改变问题引入方式的角度出发，对现有教学中直接给出问题的引入形式做改进。通过设计场景，让学生思考，从而发现问题。其次，从改变问题解决方案的提出方式角度出发，将现有教学中直接的灌输转变为集思广益的团队合作式问题解决方案研讨、设计与实现。最后，在对问题解决方案的合理性评价方面，引入数学建模思想的现实场景分析与检验，从而为改进和拓展已构模型和方法创造条件。

3. 引入数学建模思想的具体方法

下面从“如何与具体的课内外活动相结合”，以及“是否采取项目小组形式”等角度出发，给出将数学建模思想应用于交通运筹学教学的具体方法。方法的具体实施步骤如下：

步骤 1：从现实与期望的差异角度出发，提出问题。教师可以根据将要解决的问题在课堂上留题。这里主要包括两部分内容：一是在课堂上提供一个问题的场景，简单分析后提出实际面临的问题；二是布置学生课后需要思考的问题和阅读材料。

步骤 2：通过对背景知识的研读，提炼信息。学生可以根据自愿分成小组完成课后作业。根据具体问题，完成作业报告或准备课堂汇报的资料与 PPT。

步骤 3：组织信息，构建模型。在课后作业基础上，首先组织学生在课内进行汇报和讨论；整理问题的限制条件和目标，构建对应的数学模型。此时，教师需从模型的合理性角度对构建的模型加以解释分析。

步骤 4：选择具体求解方法，制定实施方案。同样，在建立了相应的数学模型后，组织学生进行课内的讨论，寻找并确定解决问题的有效方法。这里可以采取头脑风暴的形式，允许多种方法并存。在分组基础上，对不同解决方案加以实施。

步骤 5：利用计算机求解问题。确定问题的求解方案后，一般需要利用计算机软件，编写程序求解模型。这一步一般为课外作业。同学们应以小组为单位，分工协作，收集数据，编写程序，撰写报告。

步骤 6：分析结果，验证模型及假设。这一步需要将课外作业与课内分析相结合，课外经过计算得到结果，可以进行一些初步分析。在课内通过结果展示和讨论，确定计算结果是否合理，是否已回答问题，同时需对结果中的出现的异常、特征进行分析与解释。

步骤 7：结合实际，修正模型。在步骤 6 分析基础之上，在课内重新分析场景，实现对已构模型的修正与改进。

步骤 8：实际结论与现实的思考。最后一步是对已完成工作的总结与提高，分为课内与课外两个部分。课内老师可以引导学生拓展问题场景，提出新的构想；课外学生可以根据兴趣进行延展性研究，同时总结已完成工作。

一般而言, 要完成上述的 8 个步骤, 教师需要至少进行两次课程教学。步骤 3 和 4 可以在一次教学中完成; 步骤 6、7、8 和 1 可以通过一次课程教学完成。这里步骤 1 放在步骤 8 后, 表示新问题场景的引入是接着上一问题的完成开始的。步骤 2 和 5 需要学生在课外完成。

通过问题背景引入、建模、算法设计和计算机验证等环节的具体设计, 可以将上述方法应用于交通运筹学教学的如下课程中: 交叉口信号控制信号配时、交通流网络分配、公交线网布设、公交车辆调度、乘务调度等。在将上述方法与现有课程结合时, 需要改变以往“问题直接引入, 缺乏背景陈述; 模型与算法直接给出, 缺乏思辨分析”的传统教学方式, 依据上面给出的步骤逐步推进, 引导学生自主探索、自主学习, 从而在解决问题的同时鼓励学生独立思考, 提升学生的数学建模能力。

4. 案例

网络交通流静态分配是交通运筹学的重要一课。通过该课的学习, 学生应当理解 Wardrop 第一原则, 掌握用户均衡交通流分配模型, 并学会求解上述模型的 Frank-Wolfe 算法。在以往的教学中, 老师会直接引入 Wardrop 第一原则对出行者的行为加以分析, 然后给出用户均衡交通流分配模型, 并对模型加以解释, 最后介绍求解模型的 Frank-Wolfe 算法, 并通过简单算例演示算法求解过程。上述教学方式以“教”为主, 没有充分发挥学生的学习主动性, 因此教学的效果较差, 学生对相关问题理解不深。为解决上述问题, 下面引入数学建模思想, 重新设计相关教学过程与内容。具体设计过程将遵循第 3 节给出的步骤。

在问题引入部分, 教师可以通过如下的一个简单例子引入场景与问题。如图 2 所示, 在一个具有 4 个节点的网络中, 存在 4 辆车需要从 A 点出发, 去往 D 点。经过各个路段的费用如下: 经过路段 AC 和 BD 的费用为定值 6; 经过路段 BC 的费用为 1; 而经过路段 AB 和 CD 的费用与经过对应路段的车辆数相关。 x 表示如果利用对应路段的车辆数为 x , 则产生的费用值也是 x 。问题是为 4 辆车选择合适的路线, 从而使各辆车的出行费用最小。

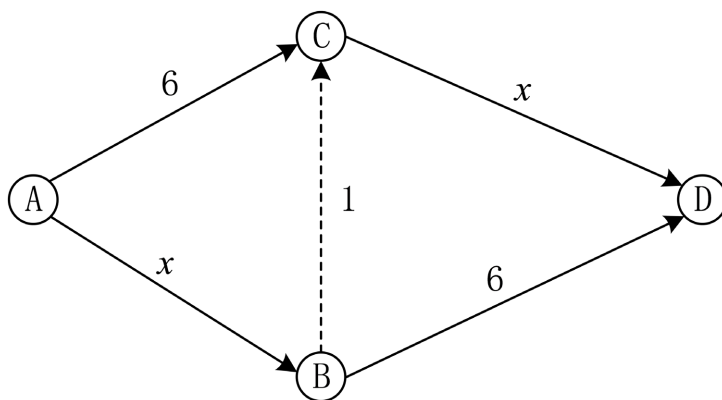


Figure 2. The network with four nodes
图 2. 具有 4 个节点的网络

以上述例子作为课后作业, 要求学生课后分组尝试给出答案。并提示如果假设路段 BC 由于某种原因封闭后, 考虑在新的网络中车辆的路线如何选择。

在构建模型部分, 首先对学生的作业完成情况和发现加以讨论。合理的结果应该以 BC 路段是否可用分两种情况。当 BC 可用时, 车辆逐渐加载上网, 会出现 4 辆车均选择 AB-BC-CD 路线出行, 每辆车的出行费用均为 9, 该值小于其他两条未使用的路线 AC-CD 和 AB-BD 的出行费用 10。而当路段 BC 不可用时, 车辆会非为两组, 各包含 2 辆车, 分别选择上下两条线路出行。在这种情景下, 每辆车的出行

费用均为 8。通过分析得到结果发现, 路网减少出行线路, 反而降低了出行费用。上述悖论的出现是由于个体的非合作式出行选择行为引起的。

在课内的构建数学模型部分, 首先需要分析出行者的选择行为, 得到交通分配中的 Wardrop 第一原则, 即同一出行起讫点对间的实际出行线路的出行费用应当相等, 且小于等于未被采用的出行线路的费用。可依此构建如下模型:

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} c_a(w) dw \quad (1)$$

$$\sum_p f_p^{rs} = q^{rs}, \forall rs \in W \quad (2)$$

$$f_p^{rs} \geq 0, \forall p \in P^{rs}, rs \in W \quad (3)$$

$$x_a = \sum_{rs} \sum_p f_p^{rs} \delta_{a,p}^{rs}, \forall a \in A \quad (4)$$

$$C_p^{rs}(x) = \sum_{a \in A} c_a(x_a) \delta_{a,p}^{rs}, \forall p \in P^{rs}, rs \in W \quad (5)$$

上述模型中, q^{rs} 表示起讫点对 $rs \in W$ 的交通出行需求; f_p^{rs} 表示起讫点对 $rs \in W$ 间一条可行路线上的流量; P^{rs} 是连接起讫点对 $rs \in W$ 的所有可行路线的集合; x_a 和 $c_a(x_a)$ 分别表示路段 $a \in A$ 上的流量和出行费用函数; $C_p^{rs}(x)$ 表示路径 $p \in P^{rs}$ 上的出行费用; $\delta_{a,p}^{rs}$ 为路径与路段的关联系数, 其值为 1 表示路径 $p \in P^{rs}$ 经过路段 $a \in A$, 否则, $\delta_{a,p}^{rs} = 0$ 表示不经过。建立上述模型时, 教师需从出行路线的选择原则出发, 通过分析得出上述模型满足对应的 Wardrop 第一原则。

在求解方法的选择上, 老师应鼓励多种方法的并行尝试。例如可以通过流量的逐渐加载形成网络流量的平衡态, 从而得到诸如全由全无加载法和增量加载法。而根据模型的线性约束特征可以利用 Frank-Wolfe 算法加以求解。在具体实现时, 可以引导学生利用现有优化软件, 如 Lingo, 对模型直接求解; 也可在学生时间充足条件下, 鼓励其通过编写具体的算法实现对模型的求解。上述具体求解工作需学生课外完成。

在学生完成模型的求解后, 可在课堂上进一步讨论求解结果异同, 比较不同求解方法的优劣。而通过设定不同的路段费用函数, 如线性与非线性, 给定不同数量的起讫点对间交通出行量, 观察求解结果的变化。这样的拓展讨论可以为后续模型拓展埋下伏笔, 如后续建立整合出行方式选择与路线选择的组合交通流分配模型。后续也可引导学生思考, 上述模型与现实场景的切合度, 从而引出随机与动态的交通流分配问题。

上述过程基本遵循了第 3 节给出的步骤, 在教学中不仅体现了数学建模的思想, 也加深了学生对相关知识的认识和理解。与传统的方法相比, 学生对相关知识有了更加深入的理解和思考, 学习的积极性更高。

5. 结论

本文针对如何将数据建模思想引入交通运筹学的教学实践, 比较分析数学建模与交通运筹学课程的异同和关联关系, 给出了解决上述问题的具体实施步骤, 并通过一个具体例子进一步验证方法的可行性和有效性。总结全文, 可得到如下主要结论: a) 交通运筹学的教学内容提供了丰富的数学建模实践场景问题, 而数学建模思想也为分析交通运筹学涉及的大量数学模型提供了一个自然而有效的思路; b) 利用数学建模思想改进现有交通运筹学教学中的问题引入、问题求解方法选择和结果分析, 可以使以往的教学变得更加贴合实际场景, 使学生更深入地了解相关知识本身的局限性和知识之间的关联性。本文提出的应用方法也适用于其他一些管理应用型课程的教学, 例如物流管理课程。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(71801153, 71871144); 上海市自然科学基金项目(18ZR1426200)。

参考文献

- [1] 鲁小莉, 朱雁. 数学建模的教育研究: 主要方法与研究案例[J]. 数学建模及其应用, 2018, 7(2): 43-54.
- [2] 汪晓银, 吴雄华. 从科学研究的视角重构数学建模教学[J]. 数学建模及其应用, 2018, 7(4): 25-29.
- [3] 王范, 李波, 徐章韬. 数学建模视角下的教育量化研究[J]. 数学建模及其应用, 2020, 9(1): 72-78.
- [4] 李宏, 韩邦合, 杨有龙. 智能教育背景下工科院校数学建模教育教学的改革与实践[J]. 数学建模及其应用, 2020, 9(3): 47-52.
- [5] 陆立强. 对高中开展数学建模活动的若干思考和建议[J]. 数学建模及其应用, 2019, 8(3): 75-78.
- [6] 邓廷勇, 张姮妤. 运筹学教学与数学建模思想的融合[J]. 宜春学院学报, 2014, 36(9): 129-131.
- [7] 邓胜岳, 周立前, 方四林, 等. 数学建模和数学实验在《运筹学》课程教学中的应用研究[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2015, 28(1): 91-94.
- [8] 于晋臣, 邢育红, 孟艳双, 等. 数学建模思想有效融入运筹学教学的研究[J]. 教育现代化, 2019, 51(6): 42-43.