**Advances in Education** 教育进展, 2022, 12(2), 469-475
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.122079

# HPM视角下数学史融入数学教学研究
## ——以阿波罗尼斯圆为例

**王超凡，王柏淋，盛果妮，黄聘博**

绍兴文理学院数理信息学院，浙江 绍兴

收稿日期：2022年1月20日；录用日期：2022年2月16日；发布日期：2022年2月22日

### 摘　要

随着对数学史在数学教育中的价值的研究逐渐深入，以及新课程标准改革的不断推进，越来越多的专家和教师开始尝试将数学史融入数学教学，本文主要从HPM视角、数学课程标准入手，分析数学史融入数学教学的背景及理论基础，论述以阿波罗尼斯圆为案例的数学史融入数学教学的策略，提出数学史与数学教育发展的反思与建议。

### 关键词

**HPM视角，数学史，数学教育，阿波罗尼斯圆**

# Research on Mathematics History in Mathematics Teaching in HPM
## —Taking Apollonis Case

**Chaofan Wang, Bolin Wang, Guoni Sheng, Pinbo Huang**

School of Mathematical Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Jan. 20th, 2022; accepted: Feb. 16th, 2022; published: Feb. 22nd, 2022

### Abstract

**With the gradual research on the value of mathematics in mathematics education, and the continuous advancement of the new curriculum standard reform, more and more experts and teachers have begun to integrate mathematics history into mathematics teaching, mainly from HPM perspectives and mathematics courses to analyze the background and theoretical basis of mathematical history into mathematics teaching, discuss the strategy of mathematics teaching in mathemat-**

文章引用: 王超凡, 王柏淋, 盛果妮, 黄聘博. HPM 视角下数学史融入数学教学研究[J]. 教育进展, 2022, 12(2): 469-475. DOI: 10.12677/ae.2022.122079

**ics history in Apollonis, and propose the development of mathematics history and mathematics education.**

## Keywords

**HPM Perspective, Mathematics History, Mathematics Education, Apollonis**



## 1. 引言

华东师范大学汪晓勤教授作专著《HPM：数学史与数学教育》，提供了理论基础[1]；张俊忠博士研究数学史融入初中数学教育并提出策略[2]；甘大旺老师借助对两个案例的阐述和分析，佐证借助数学史能够高屋建瓴地挖掘数学题根[3]。虽然前人对数学史融入数学教育进行了研究，但对数学史融入数学教育的研究还未做到理论与实践相结合。

本文旨在提高数学教育的有效性，以将相关数学史料融入阿波罗尼斯圆的教学为例，积极推进理论研究过程与教学实践过程相结合。

## 2. 研究背景

### 2.1. 研究基础及现状

1) 数学史融入数学教学的研究基础

将数学史纳入中小学数学是数学教育领域的一个重要课题。通过介绍数学概念和思想方法的历史发生发展过程，一方面让学生体会到数学的魅力，激发学生对数学的兴趣；另一方面，它可以帮助学生理解数学概念和思维方法[4]。数学史融入数学教学分两个阶段进行：一是“教学”过程中结合史料，二是在“教学”过程中结合试题。其中 HPM 是 History & Pedagogy of Mathematics 的简称，HPM 主要从事面向数学教育的数学史研究；以数学史为基础的教学；对历史基础的实证研究；将数学史融入数学教学的实验研究[5]。

2) 数学史融入数学教学的现状

在数学教学中，数学史料是学生理解数学过程中极为有效的催化剂。然而，数学史常常被传统的数学教学所忽略，教师将数学史料的知识融入到数学课堂教学中的比例不多。尤其是在课余时间较少的中学一级，教学任务越来越紧迫，导致认为每一个教学日，教师都会教授新的内容，带给学生繁重的学习压力，慢慢磨去了学生对数学学习的兴趣。这势必影响学生数学学习整体脉络的形成。

### 2.2. 理论基础

1) 历史相似性原理

学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性，历史上数学家所遭遇的困难正是学生所经历的障碍[6]。因此，数学教育可以参照历史来预测学生的认知障碍，从而有针对性地制订相关教学策略。

2) 发生认识论和建构主义

数学史的发展史，从学生认知的角度，可以同化或适应融入教学课堂；建构主义作为一门新兴的教育学，要求学生在学习数学的同时，能够依靠前人的成就，自主地进行改造，形成自己的数学知识。

## 3. 研究意义

### 数学史在数学教育中的价值

1) 对学生数学思维的锤炼

数学历史源远流长，在经过数学家们不断地艰难探索和总结之下，积累了许多历久弥新的数学思想。而这些数学家的数学思想以及他们求解数学难题的思维都将对学生数学思维的形成与锤炼有深刻影响。因此，数学史对学生的数学思维的锤炼以及数学思想的传承有着深远影响，能让学生的数学思维不再混乱与浅薄。

2) 让学生接受数学文化的熏陶

通过数学史的学习，学生可以结识伟大的数学家们，让学生明白，数学家们取得成功，也需要付出了许多努力。课堂上介绍这些数学史料，可以让学生领悟到勇于面对困难、坚韧不拔的精神。

此外，总体而言，学生对数学在自然科学中的应用有一定的理解，但对数学在人文社会科学中的作用认识相对不足。数学史可以在这方面提供大量的例子，来帮助学生感受数学在人文社科领域的价值。例如，数学语言学、数学策略和数学经济学的制度都体现了数学的人文社科价值。通过在课堂中对这部分数学史的介绍，让学生了解数学在推动人类文明发展中的作用，感受数学的应用价值和人文社科价值。

3) 数学史有助于活化数学课堂

在传统的数学课堂上，教师往往通过严谨的推理和反复的习题训练来帮助学生巩固数学知识。然而，这种教学方法过于抽象，脱离现实生活，降低了学生的学习兴趣。学生享受不到数学课堂学习的快乐，因此他们厌倦数学，失去了学习数学的兴趣，最终放弃学习数学。学生对于新鲜事物通常具有好奇心，数学史料的引入可以吸引学生的注意力，激发学生的求知欲，调动学生的学习积极性，有效地改善数学课堂的教学氛围。数学课堂不再只有冷冰冰的数字和符号，富有生气的数学故事加入课堂，学生们就会慢慢地喜欢上数学课。

## 4. 数学史融入数学教学的策略

下面以阿波罗尼斯圆为例介绍数学史融入数学教学的策略：

### 4.1. 引入史料创设情境

在正式讲授新课之前，教师可以先介绍发现阿波罗尼斯圆的数学家阿波罗尼斯的故事，引入史料。

阿波罗尼斯在前人的研究基础上，依照欧几里德《原本》公理演绎的方式，对内容进行了粗略而系统的组织，编写了《圆锥曲线论》。《圆锥曲线论》包含了许多开创性的材料，近乎囊括了圆锥曲线的性质．阿波罗尼斯将欧几里得的论证几何水平发展到极致，使《圆锥曲线论》成为数学史上的伟大纪念碑，他本人也被称为古希腊“伟大的几何学家”[7]。

除了研究圆锥曲线之外，阿波罗尼斯圆也是阿波罗尼斯的研究成果之一。那么什么是阿波罗尼斯圆呢？教师设置悬念，激发学生的学习兴趣。并且在这一环节，通过介绍有关数学家的故事，可以培养学生刻苦专研、严谨求实的科学态度以及积极进取的创新精神。

### 4.2. 呈现例题聚焦主题

在第一环节中，教师通过引入史料，创设学习阿波罗尼斯圆的悬念。这一环节主要通过例题的呈现

来聚焦阿波罗尼斯圆这一概念，并引出相应的定理。

例题：在同一平面内，已知两定点 $A(-2,0)$，$B(4,0)$，若动点P满足 $\frac{PA}{PB}=\frac{1}{2}$，则点P的轨迹方程是？其轨迹为？

教师引导学生解得 P 点的轨迹是一个半径为 4，中心为(−3, 0)的圆。与此同时，教师希望学生能够举一反三，掌握求轨迹的一般方法，将 $\frac{PA}{PB}=\frac{1}{2}$ 改为 $\frac{PA}{PB}=1$ 时，点 P 的轨迹又是什么？此时，学生能够运用已学知识得出点 P 的轨迹为直线。

而这又会引发深思，当比值不同时点 P 的轨迹发生变化，用数学的思想来看待，比值为二分之一和一均为特殊情况，若假设 $\frac{PA}{PB}=\lambda$ （$\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1$），从特殊到一般猜想一般情况点 P 的轨迹是一个圆。在此基础上，教师引出阿波罗尼斯圆的概念。

在此环节，教师呈现教材例题，在概念的教学中融入数学史，运用特殊到一般的数学思想，可知概念产生的过程并且可以深化对概念的理解，从而聚焦本节课的核心概念——阿波罗尼斯圆。

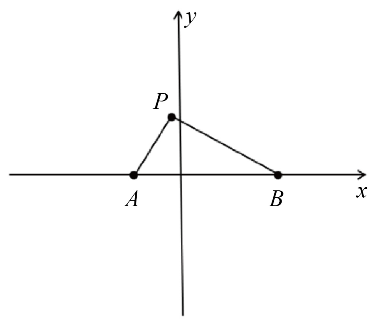
## 4.3. 求证定理深度学习

在聚焦主题环节，学生已经了解到阿波罗尼斯圆的概念并得出猜想当比值 $\frac{PA}{PB}=\lambda$ （$\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1$）时，点 P 的轨迹为一个圆，实际上这就是阿波罗尼斯圆定理。

在 HPM 视角下的数学课堂中，数学教师不应直接使用原始的数学史料，应用学生喜闻乐见和易于理解的形式呈现出来。在本教学案例中：“根据数学史料记载，15 世纪初法国数学家韦达提出应用了两个圆相似中心的欧几里得解法，通过对多个特例的逐一讨论，严格清楚地陈述此类问题的解。后来牛顿、高斯等著名数学家重新研究了这个问题，也得到多种解决方法。其中以法国数学家热尔岗约于 17 世纪初给出的解法更具代表性。上述方法都是常规的标尺作图法。如果没有作图条件的限制，则能有更多简便的解法。”数学史料的引入可以让学生了解，在阿波罗尼斯圆定理证明中，从阿波罗尼奥斯，到牛顿，推导过程是循序渐进，逐级深入，每一位数学家都能有惊人的发现。学生听了故事，便会渴望尝试，学习热情和兴趣高涨，此时，教师再引导学生动手来论证，在真正的实践和思考中，学习数学知识，实现数学核心素养的落地[8]。

现在我们要引入数学史上的一些证明方法来证明该定理。

【证法一】




**(解析法)**如图所示建立直角坐标系，已知 $A(-2,0)$ $B(4,0)$，$\frac{PA}{PB}=\lambda$ （$\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1$）。假设 P 点坐

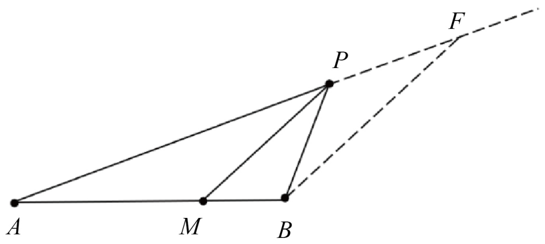
标为$(x,y)$，则 PA = $\sqrt{(x+2)^2+y^2}$，PB = $\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，整理得$(1-\lambda)(x^2+y^2)+(4+8\lambda)x+4-16\lambda=0$，

当$\lambda>0$且$\lambda\neq1$时，点 P 的轨迹是一个圆；

当$\lambda\neq1$时，点 P 的轨迹是 A 与 B 两点间形成的中垂线。

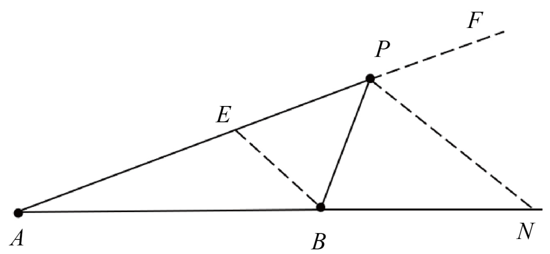
【证法二】

(几何法)在证明之前我们先介绍两个相关的引理。




引理 1：在如图所示的三角形中，若 PA:PB=AM:MB，则 PM 为∠APB 的角平分线。

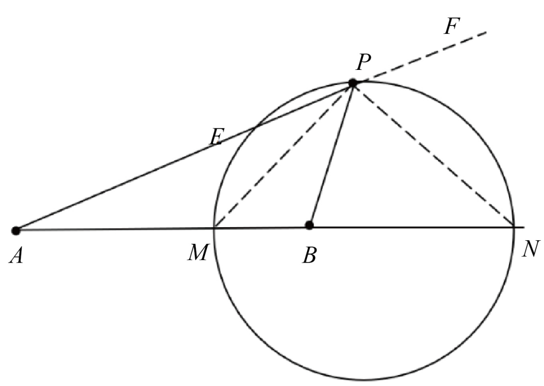
证明：过点 B 作 BF∥MP 交 AP 的延长线于 F，则 AP:PF = AM:MB。因为 PA:PB = AM:MB，所以 AP:PF = PA:PB，故 PB = PF，∠PFB = ∠PBF.又因为 BF∥MP，所以∠PFB = ∠APM，∠MPB = ∠PBF，故∠APM = ∠MPB，即 PM 为∠APB 的角平分线。




引理 2：在如图所示的三角形中，若 PA:PB = AN:NB，则 PN 为∠BPF 的角平分线。

证明：过点 B 作 BE∥PN 交 AP 于 E，则 AP:PE = AN:NB。因为 PA:PB = AN:NB，所以 AP:PE = PA:PB，故 PB = PE，∠PEB = ∠PBE.又因为 BF∥MP，所以∠PEB = ∠FPN，∠NPB = ∠PBE，故∠FPN = ∠NPB，即 PN 为∠BPF 的角平分线。

下面介绍阿波尼斯定理的几何证明法。



取 AB 上一点 M 与 AB 延长线上点 N，使得 PA:PB = AM:MB = AN:BN，连结 PM、PN。由引理 1 和引理 2 可知 PM、PN 分别为∠APB、∠BPF 的角平分线，所以∠MPN = 90°。因此点 P 的轨迹是以 MN 为直径的圆。

本环节用不同的数学思想来求证定理，深化学习。学生通过自主探究、合作学习理解到定理产生的过程并且可以深化对定理的理解，感悟数学思想和方法，提高自己的数学素养。

### 4.4. 拓展应用领悟思想

通过引入数学史料、课堂主题聚焦以及深度学习阿波罗尼斯圆定理，同学们已经初步掌握了阿氏圆的概念以及简单性质。尽管学生对阿波罗尼斯圆的相关数学史料以及基本概念已经十分清晰，但仅仅处于理解阶段是不够的。因此，我们在学生对阿氏圆有了内化的理解这一基础上，引入一些适量的习题，使得学生能够灵活运用阿氏圆这一数学模型来解决不同方向的数学问题。

【求几何图形面积最大值】

***例 1*** 若 $BC = 2$，$AC = \sqrt{2}BC$，则 $S_{\Delta}ABC$ 的最大值是____。

解决本题的常规方法是结合余弦定理及同角三角函数的平方关系或利用海伦公式求解，但这两个方法运算量较大，因此可以利用阿波罗尼斯圆的概念加之数形结合的方法高效地解决本问题。

【传统解析几何】

***例 2*** 圆 C 与$x$轴相切于点 T(1, 0)与 y 轴正半轴交于点 A，B (B 在 A 的上方)，且 $|AB| = 2$。1) 求圆 C 的标准方程；2) 过 A 作一条直线与圆 O：$x^2 + y^2 = 1$ 相交于 M，N 两点，下列三个结论：① $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$；② $\frac{|NB|}{|NA|} - \frac{|MA|}{|MB|} = 2$；③ $\frac{|NB|}{|NA|} + \frac{|MA|}{|MB|} = 2\sqrt{2}$。其中正确的序号为_______。

本题可运用最通用的解析法求解，但计算起来较为繁琐。本题本质是阿氏圆的相关性质，仔细观察条件可以发现圆 O 是定点 A，B 所对应的阿氏圆，运用这一条件即可求解得出最终答案。

***例 3*** 已知在平面直角坐标系 xOy 中，圆 O：$x^2 + y^2 = 1$，点 $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$，M 为圆 O 上的动点，则 $2|MA| - |MB|$ 的最大值为________。

根据题给条件，可以构造出以 A、C 为定点的阿波罗尼斯圆 O，再根据阿氏圆的定义以及数形结合的方法即可求得 $2|MA| - |MB|$ 的最大值。

【立体几何】

***例 4*** 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是正方体的表面 $ADD_1A_1$ (包括边界)上的动点，若动点 P 满足 PA = 2PD，则点 P 所形成的圆的半径为________；若点 E 是 CD 的中点，且正方体的表面 $ADD_1A_1$ (包括边界)上的动点 F 满足条件 $\angle AFB = \angle EFD$，则三棱锥 $F - ACD$ 体积的最大值是_________。

这是一道结合了阿氏圆的立体几何题。要想运用阿氏圆的性质解题，首先需要建立空间直角坐标系，再利用 PA = 2PD 求出点 P 形成的阿氏圆的轨迹方程，最后结合已知条件求出体积最大值。

【平面向量】

***例 5***：已知向量 ***a***，***b*** 满足 $|\boldsymbol{a}| = 1$，$|\boldsymbol{b}| = |2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$，则 $|\boldsymbol{b}|$ 的最大值为_________，***a*** 与 ***b*** 夹角的取值范围是_________。

本题的关键在于运用向量知识，结合阿波罗尼斯圆这一概念研究点 B 的轨迹。

思考完以上五个例题，我们发现掌握好阿波罗尼斯圆这一数学模型对于解决求几何图形面积最大值、传统解析几何、立体几何以及平面向量等常见的数学问题都具有很大帮助。相信学生在一步步调用阿氏

圆这一数学模型来解决现有的数学问题的同时，也会对阿氏圆所蕴含的数学思想以及应用价值有更深刻的理解。

## 5. 反思与建议

### 5.1. 前提——史学形态转化为教育形态

数学史融入数学教育的前提条件是将数学史由历史学的形态转换成教育的形态，让学生能够容易接受和喜欢，也是最重要的一步。教材中一般不选择直接使用最原始的数学史料，要让学生容易接受和喜欢，则必须要改变数学史料枯燥乏味、晦涩难懂的状态，用学生喜闻乐见和易于理解的形式呈现出来。

### 5.2. 提升教师的数学史素养

数学史融入数学教育的过程是数学史从史学的形态走向教育的形态的过程，也是教师诠释、设计、加工、实施和再创造数学的过程，因此教师是数学史融入数学教育的执行者[9]。为了有效地将数学史融入数学教育，一定要提升教师的数学史素养。教师必须了解数学的基本发展史，要全面地、充分地认识数学史的教育作用，科学地选择适合学生学习需要的数学史料和教学方式。

### 5.3. 重视数学史教育资源库的建设

除编写教材外，还要加强数学史教育资源数据库的建设，数学史教育资源主要包括数学史相关文献，视频资源，数学史料网站链接和参考书目等。数学史教育资源数据库的建立使教师更容易收集和查找资源，有利于教师教学过程的设计和处理，为数学史融入数学教育提供了保障。

## 参考文献

[1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 1-20.

[2] 张俊忠. 数学史融入初中数学教育的研究[D]: [博士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2015.

[3] 甘大旺. 用两个案例佐证研读数学史的重要性[J]. 中国数学教育, 2015(22): 24-26.

[4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 1-10.

[5] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006(15): 13-16.

[6] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012(2): 1-5.

[7] 王海青, 李晓波. 从阿波罗尼斯到柯西: “圆锥曲线”研究方法的变迁[J]. 数学通报, 2018, 57(10): 26-31.

[8] 沈利芳, 吴凯. HPM 视角下数学史料在高中数学概念教学中的运用——以阿波罗尼斯圆为例[J]. 新课程评论, 2021(4): 76-84.

[9] 敏学礼. 初中数学课堂有效融入数学史的教学策略[J]. 新课程教学(电子版), 2020(19): 29-30.