Advances in Education 教育进展, 2022, 12(11), 4423-4427
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.1211676

反例教学法与实数连续性

谷龙江，王　毅，陈停停，郭艳凤*

中国地质大学(武汉)数学与物理学院，湖北　武汉

收稿日期：2022年10月7日；录用日期：2022年11月4日；发布日期：2022年11月11日

摘　要

关于实数的连续性命题是数学分析的基本工具，这一部分内容的教学效果直接影响到学生后续的学习。本文针对实数连续性命题阐述了将反例教学法融入课堂教学的必要性，同时给出了有理数中相关命题的几个具体的反例并讨论了在教学中引入这些反例的积极作用和意义。

关键词

数学分析，实数连续性，反例

Counterexamples Teaching Method and Continuity of Real Numbers

Longjiang Gu, Yi Wang, Tingting Chen, Yanfeng Guo*

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei

Received: Oct. 7th, 2022; accepted: Nov. 4th, 2022; published: Nov. 11th, 2022

Abstract

The propositions about the continuity of real numbers are basic tools for mathematical analysis and the teaching effect of this part directly affects the students' subsequent learning. This paper expounds on the necessity of integrating counterexample teaching method into classroom teaching aiming at the propositions about the continuity of real numbers, then gives some counterexamples of related propositions in rational numbers and discusses the positive role and significance of using counterexample teaching method.

*通讯作者。

文章引用: 谷龙江, 王毅, 陈停停, 郭艳凤. 反例教学法与实数连续性[J]. 教育进展, 2022, 12(11): 4423-4427.
DOI: 10.12677/ae.2022.1211676

Keywords

Mathematical Analysis, Continuity of Real Number, Counterexamples

1. 引言

《数学分析》是数学类专业最重要的专业基础课之一，具有课时长、知识点繁多的特点，同时也是数学类专业进一步学习实变函数、复变函数、泛函分析等后续高年级分析学课程的基础。不同于工科专业高等数学的教学要求，数学分析授课内容包含一套基于定义、公理、命题的严密理论体系，其基础是几类刻画实数连续性的公理[1] [2]，具体包括确界存在定理，单调有界定理，闭区间套定理，致密性定理，Cauchy 收敛原理，有限覆盖定理等(还有其他一些实数连续性的等价命题，可参考[3] [4])。

然而在教学实践中我们发现实数连续性命题的学习与运用往往成为学生数学分析入门的一道坎。有不少同学表示学习过后似懂非懂，甚至有同学因为在这一阶段遇到困难而影响到了后续学习的积极性。从客观上讲，我们认为造成这一问题的客观原因是学生在进入大学学习的初期即接触到了一系列高度抽象的公理化命题，同时这一部分内容集中运用二分法、开覆盖的构造等分析技巧，使得学生疲于应对。从主观上讲，学生初学时往往难以深刻认识到实数连续性在分析学中的重要意义及将要发挥的作用。我们考虑到反例教学法的运用可以有效地激发学生的认知冲突从而更好地理解抽象的数学命题[5]，例如在[6] [7] [8] [9]中，作者就极限论、微分学、级数等内容讨论了反例教学法的作用，同时就我们所知，在实数连续性命题的教学中反例教学法的运用甚少，因此，本文将对常用的实数连续性命题在有理数中给出一些反例并讨论这些反例在数学分析教学中起到的积极作用。

2. 实数连续性命题的一些反例及其意义

本节中我们针对大多数教材中的六个关于实数连续性的等价命题给出一些反例。利用有理数集 Q 中相应的命题并不一定成立这一事实帮助学生从反面认识实数连续性。

反例 1 在有理数 Q 中，有上(下)界的集合不存在上(下)确界(参考[10])。

取集合 $A=\{r\in Q: r>0, r^2<2\}$，下证 A 在 Q 中无上确界。假设 $c=\sup A\in Q$，由于不存 $a\in Q$ 使得 $a^2=2$，那么必有两种情况：(i) $c^2<2$ 或 (ii) $c^2>2$。

如果 $c^2<2$，对任意的 $0<d\le 1$ 有 $d<c^2+1$，$d^2<dc^2+d$，即，

$$(c+d)^2=c^2+2cd+d^2<c^2+2cd+dc^2+d=c^2+d(c+1)^2,$$

只需取正数 $d=\min\left\{\frac{2-c^2}{(c+1)^2},1\right\}$，那么结合上式有

$$(c+d)^2<c^2+d(c+1)^2=2,$$

显然 $c+d$ 为有理数，这与 $c\in Q$ 为 A 的上确界矛盾。

如果 $c^2>2$，对任意的 $d>0$ 有 $d>-c^2-1$，$d^2>-dc^2-d$，即，

$$\left(c-d\right)^2=c^2-2cd+d^2>c^2-2cd-dc^2-d=c^2-d\left(c+1\right)^2,$$

只需取正数 $d=\dfrac{c^2-2}{\left(c+1\right)^2}$，那么结合上式有

$$\left(c-d\right)^2>c^2-d\left(c+1\right)^2=2,$$

显然 $c-d$ 为有理数，同样与 $c\in Q$ 为 A 的上确界矛盾。

在很多教材中，确界存在定理是证明实数连续性等价命题的起始点，常常被作为公理提出。这个反例意在通过“有理数 Q 中的有界集合不一定存在确界于 Q 中”这一事实让学生更好地理解确界存在定理是实数连续性的重要方面。

反例 2 有理数 Q 中单调递增(递减)有上(下)界的数列不收敛于 Q 中。

选取数列 $a_1=1+\frac{1}{1!}$，$a_2=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$，$\cdots$，$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，$\cdots$ 显然数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的有理数序列。另一方面，对任意的正整数 n 有

$$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le1+1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\le2+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}<3,$$

即 $\{a_n\}$ 是有界的。

下面假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在且为有理数，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\frac{p}{q}$，$\frac{p}{q}$ 为既约分数，把 a_n 写成

$$a_n=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)+\left(\frac{1}{(q+1)!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\tilde{a}+b_n,n>q,$$

其中，$\tilde{a}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}$，$b_n=\frac{1}{(q+1)!}+\cdots+\frac{1}{n!},n>q$。上式两边乘以 $q!$ 并取极限得

$$q!a=\frac{pq!}{q}=q!\tilde{a}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots$$

显然 $\frac{pq!}{q}$ 和 $q!\tilde{a}$ 均为整数，而

$$\begin{aligned}q!b_n&=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots+\frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots n}\\&<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(q+1)^{n-q}}<\frac{1}{q}\le1\end{aligned}$$

必为分数，矛盾。

以上两个例子可以让学生认识到，单调有界的有理数序列的极限以及有界有理数集的上(下)确界可能不是有理数。

反例 3 有理数中的闭区间套定理不成立。

取

$$a_0=\left[\sqrt{2}\right],b_0=\left[\sqrt{2}\right]+1,a_1=\frac{\left[10\sqrt{2}\right]}{10},b_1=\frac{\left[10\sqrt{2}\right]+1}{10},\cdots,a_n=\frac{\left[10^n\sqrt{2}\right]}{10^n},b_n=\frac{\left[10^n\sqrt{2}\right]+1}{10^n},\cdots$$

其中$[\cdot]$为取整函数。那么$I_n=\{x\in Q: a_n\le x\le b_n\}, n=0,1,2,\cdots$构成了一个有理数中的闭区间套，其区间长度$b_n-a_n\to 0$，并且满足$a_n^2<2, b_n^2>2$。

假设存在$c\in Q$为I_n的唯一公共点，那么必有$c^2<2$或者$c^2>2$。利用类似于反例 1 中的讨论，若$c^2<2$，那么$\left[c+\min\left\{\frac{2-c^2}{(c+1)^2},1\right\},2\right]$中的全体有理数均为$I_n$的公共点，同时与$I_n$的区间长度趋于 0 矛盾；若$c^2>2$，那么$\left[2,c-\frac{c^2-2}{(c+1)^2}\right]$中的全体有理数均为$I_n$的公共点，同时亦与$I_n$的区间长度趋于 0 矛盾。

上述例子表明在有理数Q中，闭区间套可能不存在公共点。从这个反例的构造过程中可以看到产生这一现象的原因是有理数集存在一些天然的“孔隙”，即无理数，这个例子可以使学生认识到闭区间套定理也反映了实数的连续性。

反例 4 有理数中的有界数列不存在收敛子列。

依然选取**反例 2** 中的数列$\{a_n\}$，显然$\{a_n\}$是有界的有理数列，但是其任意子列均不在有理数中收敛。

反例 5 有理数中一个不收敛的 Cauchy 列。

依然选取**反例 2** 中的数列$\{a_n\}$，那么

$$|a_m-a_n|=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{m!}\le\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}\le\frac{1}{n}-\frac{1}{m}, m>n.$$

易知$\{a_n\}$是有理数中的 Cauchy 列，但是其任意子列均不在有理数中收敛。

在后续的分析学课程中，“Cauchy 列必为收敛列”这一性质也被称为“完备性”，以上两个例子说明有理数集不满足致密性和完备性，即有理数中的有界序列或基本列不一定(即使是在取子列的意义上)收敛于有理数，有理数存在“孔隙”。**反例 2** 和**反例 4-5** 可以使学生认识到实数连续性还意味着实数关于取极限运算的封闭性。

反例 6 有理数中有界闭区间的某个开覆盖不存在有限子覆盖。

设区间$I=[1,2]\cap Q$，令$H=\{(x_i-r_i,x_i+r_i): x_i\in I,\sqrt{2}\notin(x_i-r_i,x_i+r_i)\}$。由于$x_i$取遍$I$，那么开区间集$H$构成了$I$的一个开覆盖。下证$H$不存在$I$的有限子覆盖。假设$H'\subset H$为$I$的子覆盖且$H'$中只有$n$个开区间，令$a$为其$2n$个端点中距离$\sqrt{2}$最近的一个，那么$a$到$\sqrt{2}$之间的所有有理数都没有被$H'$覆盖，矛盾。

满足有限覆盖性质的集合通常称为具有紧性，在后续的分析学课程中该性质往往用于实现从局部性质到整体性质的过渡以及从有限维空间到无限维空间的过渡。以上例子通过“对于有理数中的有界闭区间，其任意开覆盖不一定存在有限子覆盖”这一事实向学生展示了紧性也是实数连续性的一个重要刻画。

3. 总结

在实数连续性命题的教学中同时展示上述的一些反例可以使学生认识到即使有理数集这样的稠密数集亦存在“孔隙”，连续性是实数特有的基本性质。在传统的教学中，教师往往更注重向学生展示证明实数连续性命题的等价性以及所用到的“二分法”、“开覆盖的构造”等分析技巧，我们认为教师还应通过反例教学法使学生明白不同的命题只是从不同角度刻画实数的连续性，其在公理系统中的作用是作为基本工具在后续课程内容中发挥作用，从而帮助学生从总体上把控所学知识，消除初学时的恐惧心理。

此外，教师还可以积极诱导启发学生在无理数集中构造相关的反例。数学研究很多时候是一个从“提出猜测”到“尝试证明”或“通过反例证伪”再到“提出新的猜测”的循环。培养学生构造反例的能力

不但有助于学生更加直观地理解抽象的数学命题，同时也将对培养学生的科学探索精神产生积极而深远的影响。

基金项目

本论文为 2022 年度中国地质大学(武汉)教学改革研究项目(项目编号 2022161；2022086)资助；2022 年度高等学校大学数学教学研究与发展中心项目(项目编号 CMC202202 预 02)资助成果。

参考文献

[1] 刘玉琏，傅沛仁，刘伟，林玎. 数学分析讲义(上册) [M]. 北京：高等教育出版社, 2019.
[2] 欧阳光中，朱学炎，金福临，陈传璋. 数学分析(上册) [M]. 北京：高等教育出版社, 2018.
[3] 罗敬，段汕. 实数连续性九个等价命题的证明[J]. 武汉纺织大学学报, 2012, 25(3): 89-93.
[4] 王敏生. 实数连续性的 16 个等价命题[J]. 安徽师范大学学报, 2012, 35(3): 205-210.
[5] 欧伯群，刘小松. 反例对数学分析教学的促进作用[J]. 当代教育理论与实践, 2017, 9(7): 69-71.
[6] 陈瑞鹏. 反例在数学分析实验课教学中的作用[J]. 甘肃科技, 2017, 33(24): 62-63.
[7] 方金辉，王智勇. 反例思想在数学分析教学中的作用[J]. 河南教育学院学报, 2012, 21(2): 57-58.
[8] 沈春芳. 浅谈《数学分析》教学中的反例[J]. 合肥师范学院学报, 2010, 28(3): 21-22.
[9] 王宏仁，陈鲲. 反例在数学分析教学中的应用[J]. 廊坊师范学院学报, 2011, 11(1): 115-116.
[10] Gelbaum, B.R. and Olmsted, J.M.H. (2003) Counterexamples in Analysis. Dover Publications, New York.