Advances in Education 教育进展, 2023, 13(5), 2664-2669
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.135420

Hans汉斯

函数对称性与周期性在中学数学解题中的应用

周芳竹，林玉国

北华大学数学与统计学院，吉林 吉林

收稿日期：2023年4月17日；录用日期：2023年5月16日；发布日期：2023年5月25日

摘　要

在中学数学的学习中，函数的对称性与周期性是研究函数的重要工具，也是近几年的高考卷的考察热点，许多函数问题都需要两者结合应用才能解决。对此本文先给出函数关于对称性与周期性关系的基本结论并简单证明，然后举例说明其在具体解题中的应用。

关键词

对称性，周期性，解题应用

Application of Function Symmetry and Periodicity in Solving Problems in Middle School Mathematics

Fangzhu Zhou, Yuguo Lin

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: Apr. 17th, 2023; accepted: May 16th, 2023; published: May 25th, 2023

Abstract

In the study of middle school mathematics, the symmetry and periodicity of functions are important tools for the study of functions, and they are also the hot spots of the college entrance examination in recent years. Many function problems need to be solved by combining the two. In this paper, this paper first gives the basic conclusion of the function on the relationship between symmetry and periodicity and briefly proves it, and then gives an example to illustrate its application in solving specific problems.

Keywords

Symmetry, Periodicity, Problem-Solving Application

文章引用: 周芳竹, 林玉国. 函数对称性与周期性在中学数学解题中的应用[J]. 教育进展, 2023, 13(5): 2664-2669.
DOI: 10.12677/ae.2023.135420

1. 对称性与周期性综合结论及证明

设本文所有结论中的函数 $f(x)$ 的定义域均为 R。

结论 1：若函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=a,x=b$ （$a\neq b$）对称，则 $T=2|a-b|$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期(函数两条对称轴之间距离的 2 倍可以看作一个周期)。

结论 2：若函数 $f(x)$ 图像关于点 $(a,0),(b,0)$ （$a\neq b$）中心对称，则 $T=2|a-b|$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期(函数两个对称点纵坐标都是 0 的情况下，两个对称点之间距离的 2 倍可以看作一个周期)。

我们将结论 2 扩展至两个对称点纵坐标相同的情形，经过证明可以得出结论 3。

结论 3：若函数 $f(x)$ 图像关于点 $(a,c),(b,c)$ （$a\neq b$）中心对称，则 $T=2|a-b|$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期(函数两个对称点纵坐标相同的情况下，两个对称点之间距离的 2 倍可以看作一个周期)。

结论 4：若函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=a$ 对称，关于点 $(b,0)$ （$a\neq b$）中心对称，则 $T=4|a-b|$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期(函数一个对称点与一个对称轴之间距离的 4 倍可以看作一个周期)。

我们将结论 4 扩展至对称点纵坐标不为 0 的情况，经过证明可以得出结论 5。

结论 5：若函数 $f(x)$ 图像关于点 (a,b) 中心对称，关于直线 $x=c$ （$a\neq c$）对称，则 $T=4|a-b|$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期(函数一个对称点与一个对称轴之间距离的 4 倍可以看作一个周期)。

函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 也有对称性之间的转化。

结论 6：

1) 若函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，则其导函数 $f'(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称；

2) 若函数 $f(x)$ 关于点 (b,c) 对称，则其导函数 $f'(x)$ 关于直线 $x=b$ 对称。

结论 7：

1) 若导函数 $f'(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，则其原函数 $f(x)$ 关于点 (a,b) 对称；

2) 若导函数 $f'(x)$ 关于点 $(c,0)$ 对称，则其原函数 $f(x)$ 关于直线 $x=c$ 对称。

因为结论 1、2、3 之间的证明类似，结论 4、5 之间的证明近似但有一定区别，结论 6、7 之间的证明类似，所以笔者将给出结论 3、4、5、6 的简单证明。

结论 3 的证明：由已知易得 $f(x)+f(2a-x)=2c,f(x)+f(2b-x)=2c$，则 $f(2a-x)=f(2b-x)$，从而 $f(2a-(2a-x))=f(2b-(2a-x))$，即 $f(x)=f(x+2b-2a)$，所以 $T=2|a-b|$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期。

结论 4 的证明：由已知易得 $f(x)=f(2a-x),f(x)+f(2b-x)=0$，则 $f(2a-x)=-f(2b-x)$，于是有 $f(2a-(2a-x))=-f(2b-(2a-x))$，即 $f(x)=-f(x+2b-2a)$，从而 $f(x+2b-2a)=-f((x+2b-2a)+2b-2a)$，整理可得 $f(x+2b-2a)=-f(x+4b-4a)$，综上 $f(x)=-f(x+2b-2a)=-(-f(x+4b-4a))$，这说明 $T=4|a-b|$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期。

结论 5 的证明：由已知易得 $f(x)+f(2a-x)=2b,f(x)=f(2c-x)$，则 $f(2c-x)+f(2a-x)=2b$。由 $f(x)+f(2a-x)=2b$，可得到 $f(2c-x)+f(2a-2c+x)=2b$，即 $f(2c-x)=2b-f(2a-2c+x)$。与之前所求结合可以得到，$2b-f(2a-2c+x)+f(2a-x)=2b$，即 $f(2a-x)=f(2a-2c+x)$。由对称性的结论可知，函数 $f(x)$ 图像关于点 $(2a-c,0)$ 对称。又函数 $f(x)$ 关于直线 $x=c$ 对称，根据结论 4 知，$T=4|a-c|$ 可以看作函数 $f(x)$ 的一个周期。

结论 6 的证明：1) 由已知易得 $f(a+x)=f(a-x)$，对两侧求导则 $f'(a+x)=-f'(a-x)$，可得导函数 $f'(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称。

2) 由已知易得 $f(b+x)+f(b-x)=2c$，对两侧求导得 $f'(b+x)-f'(b-x)=0$，则导函数 $f'(x)$ 关于直线 $x=b$ 对称。

其实从上述结论的证明中不难看出，如果函数可以找到两条对称轴或者两个对称点，那么函数将具有周期性。但需要注意的是，如果找到了函数的周期性，函数也不一定会存在对称性。对此，读者要注意区分。

我们在中学数学中常用的三角函数可以很好的表现出以上的结论，以正弦函数 $f(x)=\sin x$ 举例，其图像大致如下(图 1)。

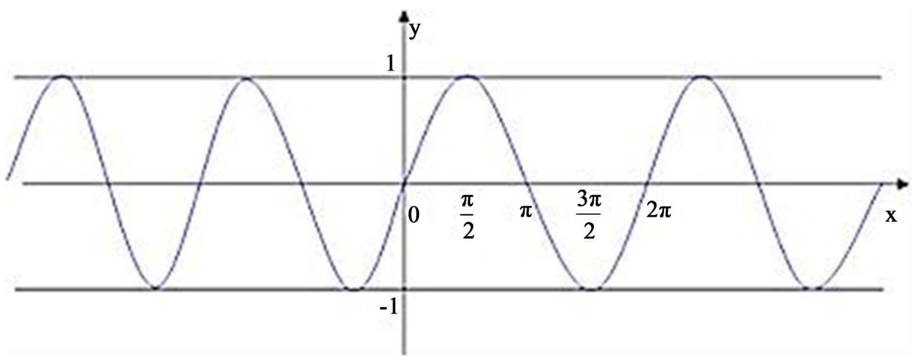

Figure 1. Partial image of the sine function
图 1. 正弦函数部分图像

不难看出点 $(0,0),(\pi,0)$ 是正弦函数的两个对称点，根据结论 2 可知，$T=2\pi$ 是正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的一个周期。直线 $x=\frac{\pi}{2},x=\frac{3\pi}{2}$ 是正弦函数的两条对称轴。根据结论 1 可知，$T=2\pi$ 是正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的一个周期。点 $(0,0)$ 是正弦函数的一个对称点，直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 是正弦函数的一条对称轴。根据结论 4 可知，$T=2\pi$ 是正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的一个周期。我们可以继续在图像上寻找这样的对称点与对称轴，两者之间的关系就是结论所包含的内容。

2. 对称性与周期性两者在具体问题中的应用

2.1. 求函数值的问题

例 1：已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(x+2)$，且当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=x^2-1$，则 $f\left(-\frac{2023}{5}\right)=(\ )$

A. $-\frac{9}{25}$ B. $-\frac{16}{25}$ C. $\frac{9}{25}$ D. $\frac{16}{25}$

解析：本题的一个重要“点”是已知中的函数等式,往这个“点”联想到函数的周期性[1]。易得 $T=4$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期，且函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，那么函数 $f(x)$ 图像关于点 $(0,0)$ 对称。结合对称性与周期性，我们有

$$f\left(-\frac{2023}{5}\right)=f\left(-4\times101-\frac{3}{5}\right)=f\left(-\frac{3}{5}\right)=-f\left(\frac{3}{5}\right)=-\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2-1\right]=\frac{16}{25}$$，选择 D。

例 2：若奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若 $f(x+1)$ 是偶函数，且 $f(-1)=-1$，则 $f(2022)+f(2019)=(\ )$

解析：由于函数 $f(x)$ 是奇函数，$f(x+1)$ 是偶函数，从而函数 $f(x)$ 关于点 $(0,0)$ 中心对称，对称轴是 $x=1$。根据周期性可得 $f(2022)+f(2019)=f(4\times505+2)+f(4\times505-1)=f(2)+f(-1)=f(2)-1$。又由函数的对称性知，$f(2)=f(0)$。因为函数 $f(x)$ 定义在 R 上的奇函数，所以 $f(0)=0$。故 $f(2022)+f(2019)=0-1=-1$。

注：根据奇函数的定义，当自变量 x 在定义域内时，$f(x)=-f(-x)$。令 $x=0$，则有 $f(0)=-f(0)$，即 $f(0)=0$。我们需要注意的是，在应用上证结论时，只有在 $x=0$ 处有定义的奇函数才有 $f(0)=0$。对于在 $x=0$ 处没有定义的奇函数不存在 $f(0)$，所以不能得出 $f(0)=0$ 这样的结论。如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 虽然是奇函数，但不存在 $f(0)$，故不能得出 $f(0)=0$。

小结：对于利用函数对称性与周期性求解函数值的问题，通常要先求出函数的周期，并将不在已知区间内的自变量通过周期的变化，使得变化后的自变量限制在已知区间，这样函数值的问题就变得简单；如果通过周期的变化，无法使得自变量值规定在已知区间，那尽量靠近已知区间，再通过函数的对称性，这样也可以求出函数值。

2.2. 求函数解的问题

例 3：设 $f(x)$ 是定义域为 R 的以 3 为周期的奇函数，且 $f(2)=0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-6,6)$ 内解的个数的最小值为( )

A. 15　　B. 13　　C. 11　　D. 9

解析：根据题中已知条件易得 $f(0)=0$。由函数的周期性，立得 $f(0)=f(3)=f(-3)=0$。再次运用周期性，由条件 $f(2)=0$ 可得 $f(2)=f(5)=f(-1)=0$。结合函数的奇偶性，则 $f(-2)=f(-5)=f(-1)=0$。已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，故 $f(x+3)=-f(-x)$。于是函数 $f(x)$ 关于点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 对称，从而 $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$。再次利用函数的周期性易得 $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{-9}{2}\right)=0$。综上函数 $f(x)=0$ 在区间 $(-6,6)$ 上的解为 $-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{-9}{2}$，共有 15 个。故选择 A。

小结：本题如果单独运用周期性，那么会遗漏潜在的函数对称点。只有将对称性与周期性综合运用才能找全此函数相应的对称点。我们再来讨论奇偶性在本题的作用，奇偶性的定义反映到几何上，奇函数就是关于点 $(0,0)$ 对称的函数，偶函数就是关于直线 $x=0$ 对称的函数，所以奇偶性也是特殊的对称关系。既然如此，当我们在题目中看到奇偶性的时候，可以先将其对称关系表达出来，避免在做题过程中遗漏。

2.3. 比较大小

定义域为 R 的函数 $f(x)$ 为偶函数，$f(x+1)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，则下列选项正确的是( )

A. $f(2022)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)$

B. $f(2022)<f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)$

C. $f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f(2022)$

D. $f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)<f(2022)$

解析：根据已知条件，易得函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=0$ 对称，也关于点 $(1,0)$ 中心对称。运用结论 4 可得函数 $f(x)$ 的周期为 4，从而 $f(2022)=f(2)$。再结合函数的对称性，可知 $f(2)=-f(0)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$。利用对数的运算性质，有

$$f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)=f(-\log_2 3)=-f\left(\log_2\frac{4}{3}\right),\quad 0=\log_2 1<\log_2\frac{4}{3}<\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}。$$

由于函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 单调递减，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\log_2\frac{4}{3}\right)<f(0)$，即 $-f(0)<-f\left(\log_2\frac{4}{3}\right)<-f\left(\frac{1}{2}\right)$。故 $f(2022)<f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)$，选择 B。

小结：对于函数值之间的大小比较来说，主要是通过周期性与对称性的转化，使自变量取值可以落在给定单调区间内，从而方便比较，再结合单调性得出结论。

2.4. 综合应用

例 4：若函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+1)$ 是偶函数，$f(x-1)$ 关于点 $(3,3)$ 中心对称，则下列说法正确的个数是( )

① $f(x)$ 的一个周期为 2；② $f(22)=3$；

③ $f(x)$ 的一条对称轴为 $x=5$；④ $\sum_{i=1}^{19}f(i)=54$。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析：根据函数的对称性，易得 $f(x+1)=f(-x+1)$，则函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称。因为函数 $f(x)$ 的图像是由函数 $f(x-1)$ 向左平移一个单位得到的，所以函数 $f(x)$ 关于点 $(2,3)$ 成中心对称。由结论 5 可得 $T=4$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期，说法①错误。

利用函数周期性，可知 $f(22)=f(4\times5+2)=f(2)=3$，说法②正确。

由已知可得，函数 $f(x)$ 的一个周期是 $T=4$，且图像关于直线 $x=1$ 对称，那么 $x=1+4=5$ 也是函数 $f(x)$ 的一个对称轴，说法③正确。

运用函数 $f(x)$ 的周期性，有 $\sum_{i=1}^{19}f(i)=4\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3)$；因为函数 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)=f(2-x)$。令 $x=0$，则 $f(0)=f(2)=3$，依据函数的周期性，得 $f(4)=f(0)=3$。由于函数 $f(x)$ 是关于点 $(2,3)$ 中心对称的，所以 $f(2+x)+f(2-x)=6$，令 $x=1$，有 $f(1)+f(3)=6$。于是 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=12$，$f(1)+f(2)+f(3)=9$，故 $\sum_{i=1}^{19}f(i)=57$，说法④错误。综上，选择 B。

2.5. 考题呈现

(2022 年新高考 I 卷第 12 题)已知 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R，记 $g(x)=f'(x)$，若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right),g(2+x)$ 均为偶函数，则( )

A. $f(0)=0$　　B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

解析：由题中所给条件易得 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称，$g(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称。$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$ 是偶函数，则 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$，即 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$。$f(x)$ 关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称，$g(x)$ 的对称性可同样讨论。易知选项 C 是对的，选项 D 是错的。依据 $g(x)=f'(x)$，利用结论 6 与结论 7，可得 $f(x)$ 关于点 $(2,t)$ 对称，$g(x)$ 关于点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 对称，于是 $g\left(\frac{3}{2}\right)=0$。结合 $g(x)$ 的对称性，有 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$，选项 B 正确。再利用 $f(x)$ 的对称性与结论 5 可知 $f(x)$ 的周期为 2，有 $f(0)=f(2)=t$，t 不一定为 0，选项 A 错误。

小结：这道考题将函数对称性的应用与原函数和导函数的关系联系在一起，这就需要注意原函数与导函数之间对称关系的转化，也就是对本文结论 6、结论 7 的把握。

3. 总结

函数的对称性和周期性是函数的重要性质,是研究函数的重要工具,也是近两年全国卷反复考查的热点[2]。在解题过程中，函数对称性与周期性问题的综合运用是难点。在许多考题中也会出现奇偶性，只需要把奇偶性看作对称性。在实际运用当中，通过抽象函数解析式或对称点、对称轴之间的距离找到函数的对称和周期这样的数量特征，许多问题就迎刃而解了。近几年的高考题目也向我们传递出了数学学习要回归本源，要抓住知识的本质，加强各个知识点之间的联系，注意培养学生的逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养。在实际教学中要教会学生学会自己归纳与总结,这样才算掌握了数学学习的基本方法,数学素养自然也能得到提高[3]。

参考文献

[1] 杨婷. 利用函数对称性与周期性的关系解题[J]. 高中数学教与学, 2022(19): 14-16.

[2] 周顺钿, 苏昕. 函数的对称性和周期性的深层次研究[J]. 高中数学教与学, 2023(3): 8-10.

[3] 王贤. 函数周期性的充分条件及应用[J], 数理天地(高中版), 2022(9): 2-3.