

数学建模思想在数学基础课程中的渗透

——以常微分方程课程为例

王诗云, 鞠 哲, 吕振华

沈阳航空航天大学理学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2023年11月2日; 录用日期: 2023年12月1日; 发布日期: 2023年12月8日

摘 要

培养学生的数学建模思想可以提高学生解决实际问题的手段和能力。在各门数学基础课程的日常教学过程中, 逐渐渗透数学建模思想是培养学生建模能力的重要环节。常微分方程作为一门重要的数学学科基础课程, 有较好的实际应用背景, 在该课程中渗透数学建模思想, 学生能够更好地理解和解释某些自然现象和实际问题, 从而更好地理解周围的世界。

关键词

数学建模思想, 数学基础课, 常微分方程

The Infiltration of Mathematical Modeling Ideas in Basic Mathematics Courses

—Taking the Course of Ordinary Differential Equations as an Example

Shiyun Wang, Zhe Ju, Zhenhua Lyu

School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: Nov. 2nd, 2023; accepted: Dec. 1st, 2023; published: Dec. 8th, 2023

Abstract

Cultivating students' mathematical modeling ideas can improve their abilities to solve practical problems. In the daily teaching process of various basic mathematics courses, gradually infiltrating mathematical modeling ideas is important in cultivating students' modeling ability. As an important fundamental course, the course of Ordinary Differential Equations has a good practical application background. By incorporating mathematical modeling ideas into this course, students

can better understand and explain certain natural phenomena and practical problems, thereby gaining a better understanding of the world.

Keywords

Mathematical Modeling Idea, Basic Mathematics Courses, Ordinary Differential Equations

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

党的二十大报告[1]对于教育的战略地位进行了充分的肯定和强调。报告对发展不同阶段不同类型的教育提出了各自的重点内容。职业教育、高等教育、继续教育的重点是协同创新，推进职普融通、产教融合、科教融汇，优化职业教育类型定位。这里关于职普融通和优化职业教育类型定位，都是第一次出现在党代会的文件中。提出要加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设，加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科。

数学建模思想的培养[2] [3]，就是从本质上培养学生灵活运用数学知识解决实际问题的能力，是理论学习与实际问题的重要桥梁。如何开展数学建模思想的培养，是值得思考和研究的课题。数学建模思想的培养不是一朝一夕间就能完成的，也不是单独某一门课程就能完全实现的，需要长期的多门课程配合才能实现。数学基础课程教育主要是为了提高全民的数学素养和思维能力，最终服务于社会，为祖国和人民贡献智慧贡献生产力。因此，在各部门数学基础课程的授课过程中向学生渗透数学建模思想是非常重要的。多年来，沈阳航空航天大学“数学模型”教学团队以及基础课程教学团队以饱满的热情锐意进取，不断以新时代教育理念为引领，在教学方法，教学理念以及教学内容等方面，不断改革创新，与时俱进，以适应时代和学校发展的需要，结合学校“培养较强工程实践能力和一定创新意识的高级应用型人才”的培养目标和成为“高水平研究应用型大学”的目标，积极配合学校的发展方向，建立起数学与其他学科以及实践应用之间的桥梁，开阔学生视野、提升数学的应用能力，从而更好地发挥大学数学教育服务国家战略的功能。

本文以数学建模思想在常微分方程课程中的渗透为例，探讨数学基础课程与数学建模思想培养之间的重要关联。所用教材为单锋等主编的《数学建模》[2]与王高雄，周之铭等主编《常微分方程》[4]。

2. 具有数学建模思想需要的前提

数学建模思想，本质是要培养学生灵活运用数学知识解决实际中的问题的能力。在这一过程中，我们需要培养学生的抽象思维、简化思维、批判性思维等数学能力。首先，数学建模需要抽象思维，而抽象思维的培养离不开数学基础课程，通过教师对基本概念的透彻分析，学生应用数学语言去抽象的表达具有一定意义的问题。比如曲边梯形的面积，就可以转化为某函数的定积分；变速运动的及时速度，可以转化为导数，这些都是建立数学模型的过程。其次，数学建模需要简化思维，也就是在建立数学模型过程中的“假设”部分或理想状态。例如，定积分的定义中的“以直代曲”，常微分方程中用欧拉折线求微分方程的近似解等，都用到了简化思维。最后，数学建模需要批判性思维，也就是检验模型的合理性。在数学模型建立、求解完成后，我们需要对所得的结果进行分析，还需要对所建立的数学模型进

行评价,并及时对模型进行改进,以取得最佳结果。同时,我们还要指出所建模型的实际意义,并努力加以推广。这些环节,都需要良好的批判性思维。在高等数学的基础课程的教学过程中,我们需要培养学生的批判性思维。在提出了某一个命题之后,反复推敲以及举例,来说明命题是否正确。在每道题解完后,我们都要进行这种解后反思的训练,检查结果的合理性,反思求解的过程是否达到最优,求解的方法是否唯一等等。通过这些训练,逐步的培养学生的批判性思维。

3. 常微分课程的特点

常微分方程课程在各个方面都有着重要的作用。首先,常微分方程是数学专业的一门重要课程,它探讨了描述自然界和社会现象中的变化规律的数学方法。通过学习这门课程,学生们能够理解和掌握微分方程的基本概念和性质并运用这些知识去解决各种实际问题。其次,学习常微分方程可以培养学生的数学思维能力。这种思维能力包括抽象化、逻辑化和严谨化的思考方式,这对于数学学习和实际工作都非常有帮助。尤其是对于那些需要解决涉及变化和动态的问题的情况。通过学习常微分方程,学生能够更好地理解和运用数学工具以更精确和有效的方式解决问题。最后,常微分方程课程对于理解自然与社会中的变化也有着重要的意义。自然界和社会现象中许多重要的变化规律都可以通过微分方程来描述。例如,在生物学中,生长曲线、流行病的传播、人口的动态变化等都可以用微分方程。在社会学中,经济周期市场动态,政策变化等也都可以通过微分方程来理解。因此通过学习常微分方程,学生能够更好地理解和解释这些现象,从而更好地理解我们周围的世界。综上所述,常微分方程课程在培养学生的数学思维能力、理解自然与社会中的变化等方面都有着重要的作用。

4. 数学建模思想在常微分方程课程中的渗透

在常微分课程的授课内容讲完一阶微分方程的求解之后,即初等积分法讲完之后,可以安排利用1~2个学时,来介绍一阶微分方程以及解法在实际问题中的应用。在这里,我们一般会介绍三种类型的例子:物理学中的有关一阶常微分方程的问题;经济学中的有关一阶常微分方程的问题;通过自己建模解决的实际问题。前两种类型一般是在机理明确,概念明确的情况下,根据已有的定理、公式等建立微分方程。第三种类型属于发散型思维的问题,需要学生通过自己分析、假设等手段构建数学模型。下面我们就以人体体重的变化规律的模型为例,探讨数学建模思想在常微分方程课程中的渗透。

首先,授课教师提出问题:“我们的体重是怎样随时间而变化的呢”。接下来,引导学生进一步思考得出:体重 w 是时间 t 的函数, $w(t)$ 无法直接给出;但是 w 的变化是由于我们摄入和消耗能量引起的,即

$$W(t + \Delta t) - W(t) = (\text{单位时间(每天)摄入的能量} - \text{单位时间(每天)消耗的能量})\Delta t.$$

进一步的,

$$(W(t + \Delta t) - W(t))/\Delta t = \text{单位时间(每天)摄入的能量} - \text{单位时间(每天)消耗的能量}.$$

即利用抽象思维,我们将体重的变化问题抽象为一个差分方程,若我们假设体重是时间的连续可微函数,则上述模型就变成了

$$dw/dt = \text{单位时间(每天)摄入的能量} - \text{单位时间(每天)消耗的能量}.$$

接下来,教师引导学生思考:我们每天通过什么行为摄入能量和消耗能量呢?通过分析可知,进食是我们最重要的摄入能量的方式,同时我们可以简化模型,假设进食量为常量(A)。另一方面,我们消耗能量的方式大致有两种:维持生命的正常代谢所消耗的能量,以及通过运动消耗的能量,同时,简化的认为正常代谢所消耗的能量和运动消耗的能量均与体重成正比,比例系数分别设为 a , b 。因此,模型可具体刻画为

$$dw/dt = (A - (a + b)W)D$$

其中, D 为脂肪与能量的转换系数。这是一个一阶线性方程, 可通过初等积分法求出满足

$$W(t_0) = w_0$$

的特解

$$w(t) = \frac{A}{a+b} + \left(w_0 - \frac{A}{a+b} \right) e^{-(a+b)Dt}$$

并且,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \frac{A}{a+b}$$

该极限说明, 进食量越大, 体重越大, 如果想减肥, 可以节食、运动或调节内分泌。这与我们已知的生活常识是一致的。

这样一个例子综合锻炼了学生的抽象思维、简化思维、批判性思维等数学能力。最后教师也还可以提出, 该体重模型并不是完美的, 比如, 当人不再进食的时候, 体重为 0, 这是不合理的地方, 可以激励学生继续思考, 也让同学们意识到我们对这个世界的认识还很有限, 希望同学们勇往直前, 创造出更加优秀的成果。这样既增加同学们对常微分方程的理解也加强了学生对建模思想的感悟。

类似的例子还有很多, 比如人口增长的 Logistics 模型和马尔萨斯模型, 传染病模型, 生物种群模型, 等等。这些模型均和常微分方程或方程组或稳定性理论联系密切。因此, 常微分方程课程对学生的数学建模思想的培养有较好的促进作用。

5. 小结

本文以常微分方程为例, 探讨了在数学基础课上渗透数学建模思想, 增加有实际背景的问题为例题, 配合知识点的讲授, 可以培养学生的抽象思维、简化思维、批判性思维等能力, 为学生走上工作岗位打下基础, 因此在数学基础课上渗透数学建模思想是有意义的和必要的。

参考文献

- [1] 党的十八大报告[EB/OL]. <https://jjjian.muc.edu.cn/info/1012/1307.htm>, 2018-10-10.
- [2] 单锋, 朱丽梅, 等. 数学模型[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.
- [3] 司守奎, 孙兆亮. 数学建模算法与应用[M]. 第 2 版. 北京: 国防工业出版社, 2021.
- [4] 王高雄, 周之铭, 等. 常微分方程[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.