

# Study on the Application of Poincaré Section Algorithm to Chaotic Vibration Identification

Shuyong Liu, Shijian Zhu, Qingchao Yang, Aibo Yang

Ship Structure and Power College, Naval University of Engineering, Wuhan

Email: lsydh@sina.com

Received: Aug. 26th, 2011; revised: Sep. 24th, 2011; accepted: Sep. 26th, 2011.

**Abstract:** In the process of Poincaré section extraction for chaotic vibration identification, there are many problems such as selection of the Poincaré section location on the phase space attractor reconstructed from single variable time series, determination of these sections when the system under quasi-periodic excitations, should be solved effectively. The improved Poincaré section is presented in this paper. The main idea is to consider these points which are satisfied with the neighborhood condition as the same section points, and a bunch of experimental trajectories which are derived from the signals are normalized. The simulation and experiment results show that when the cluster orbits of experimental attractor occur and the system is excited with different frequencies, the improved method is applied to determine the Poincaré section correctly. The interested phenomenon including multi-periodic behavior, chaos, and quasi-periodic vibration section are observed.

**Keywords:** Poincaré Section; Orbits Cluster; Chaos

## Poincaré 截面法在混沌振动识别中的应用研究

刘树勇, 朱石坚, 杨庆超, 杨爱波

海军工程大学船舶与动力学院, 武汉

Email: lsydh@sina.com

收稿日期: 2011 年 8 月 26 日; 修回日期: 2011 年 9 月 24 日; 录用日期: 2011 年 9 月 26 日

**摘要:** 针对混沌识别过程中, 单变量时间序列相空间重构吸引子上 Poincaré 截面的位置难以选择以及当系统受到不可公约的准周期激励时 Poincaré 截面难以确定等问题, 对 Poincaré 截面法进行了修正, 即将不可约多频激励条件下满足近邻截面条件的点近似为同截面, 且对穿越轨线中同点束进行归一化处理。仿真和试验结果表明, 在不同激励频率以及当试验信号重构吸引子出现轨道簇时, 该方法能够有效地确定 Poincaré 截面, 观察到了包括多周期、混沌、拟周期振动在内的不同截面图, 为实测非线性时间序列分析提供有益参考。

**关键词:** Poincaré 截面; 轨道簇; 混沌

### 1. 引言

Poincaré 截面法是非线性动力学系统分析中一种非常有效的方法<sup>[1]</sup>, 其主要特点是能将连续系统转化为对应的离散系统进行分析, 并使系统的维数从  $n$  维减少低至  $(n - 1)$  维, 从而有效地简化了对高维系统的动力学特性进行分析<sup>[2]</sup>。在混沌识别中, Poincaré 截面图可用来对系统的解进行分类, 如轨线与截面只有一

个交点时, 表示系统为周期  $- 1$  解; Poincaré 截面图为一个封闭的圆时, 对应系统为拟周期解; Poincaré 截面图具有明显的层次结构——分形结构时, 系统为混沌解<sup>[3-7]</sup>。Poincaré 映射法是 Melnikov 方法的重要基础<sup>[8]</sup>。当截面上同宿点或异宿点的稳定流型和不稳定流型相交时, 系统具有 Smale 马蹄意义下的混沌行为。但传统 Poincaré 映射进行混沌识别的过程中, 存在如

下不足：在相空间重构吸引子<sup>[9,10]</sup>上，Poincaré 截面的位置选择缺乏有效方法；当系统受到不可公约的准周期激励时，难以保证不同频率的运动在 Poincaré 截面上都有截点；在实验信号处理过程中容易出现虚假 Poincaré 截点，导致混沌识别过程中的误判。本文对 Poincaré 截面法进行了改进，解决了不同激励频率条件下以及在试验信号重构吸引子出现轨道簇时，Poincaré 截面难以确定的问题，为混沌识别提供有益参考。

## 2. 改进 Poincaré 截面法

对于动力学系统<sup>[11]</sup>：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}, x \in R^n, \theta \in T^l \quad (1)$$

其中， $T^l = \prod_{i=1}^l S^1$  表示  $l$ -维环面。 $S^1$  表示周长为  $2\pi/\omega$  的圆。因此，系统的轨迹在  $l$ -维环面上运动。Poincaré 截面定义为<sup>[12]</sup>：

$$\Sigma = \{(x, \theta) \in R^n \times T^l \mid \theta_i = \theta_{i0}\}, I = 1 \dots l \quad (2)$$

因此可以在  $(l-1)$  维环面上研究系统的运动情况。每隔周期  $T$  的时间，系统的轨线就将和  $\Sigma$  截面相交。映射  $P: \Sigma \rightarrow \Sigma (R^n \rightarrow R^n)$  定义为：

$$P = \varphi_{t_0+T}(x, t_0) \quad (3)$$

讨论：当  $l=1$  时，式(1)表示一个低维系统。它的轨线在圆周上运动，每隔一个周期和  $\Sigma$  截面相交一次。如果映射满足  $x^* = P(x^*)$ ， $x^*$  是一个不动点，它对应于系统有周期  $-1$  解。如果  $x_{k+1}^* = P(x_k^*) (k=1, \dots, K-1)$  且  $x_1^* = P(x_K^*)$ ，集合  $\{x_1^*, \dots, x_K^*\}$  是一个周期  $K$  闭轨，它对应于系统有  $K$  次谐波解。当  $l=2$  时，式(1)表示一个双周期激励的系统，它的轨线在二维环面  $S^1 \times S^1$  上运动。假设激励周期分别为  $T_1$  和  $T_2$ ，系统的行为具有两种频率成分  $1/T_1$ 、 $1/T_2$ 。当  $T_1$  和  $T_2$  可以相约时，总存在  $kT_1 = pT_2 (k \neq p \neq 0)$ 。此时轨线可以出现首尾相连接的现象。当  $T_1$  和  $T_2$  不能相约(准周期激励)时， $kT_1 + pT_2 = 0$  的条件是  $k=p=0$ 。这时轨线永远不会出现首尾连结，而是布满整个环面<sup>[13]</sup>。

考虑环面上的坐标  $(\theta_1, \theta_2)$ ， $\theta_1$  对应于周期  $T_1$  的分量， $\theta_2$  对应于周期  $T_2$  的分量。如果固定一个变量  $\theta_1$ ，

那么截面上的点为  $J_1 = \{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1 = \theta_{10}\}$ 。同理，如果固定  $\theta_2$ ，那么截面上的点为  $J_2 = \{(\theta_1, \theta_2) : \theta_2 = \theta_{20}\}$ 。假设轨线的形式表示为：

$$x(t) = F(\theta_1(t), \theta_2(t)) \quad (4)$$

其中， $F: S^1 \times S^1 \rightarrow R^n$ ，且：

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi f_1 t \bmod 2\pi \\ 2\pi f_2 t \bmod 2\pi \end{bmatrix} \quad (5)$$

映射  $P$  的作用是每隔  $T_2$  的时间在  $x(t)$  上采样，得到：

$$\begin{bmatrix} \theta_1(kT_2) \\ \theta_2(kT_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi k f_1 / f_2 \bmod 2\pi \\ 2\pi k \bmod 2\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi k f_1 / f_2 \bmod 2\pi \\ 0 \end{bmatrix} (k = 0, 1, \dots) \quad (6)$$

当  $T_1$  和  $T_2$  不能相约时， $\{\theta_1(kT_2)\} (k = 0, 1, \dots)$  不是一个周期重复的点，而是在  $[0, 2\pi)$  内任意接近的点。因此，在这种情况下 Poincaré 映射点为一个圆。

在具体应用中，Poincaré 截面映射点受到多种情况的影响，如仿真的步长、激励频率特征等等。如果不能采取有效的方法得到合适的 Poincaré 截面，将严重影响该方法对系统动力学特性的描述。对激励频率而言，当激励频率可约时，可以根据  $kT_1 = pT_2 = T$  来确定截面的位置<sup>[14]</sup>。当两个激励频率不相等时， $kT_1 \neq pT_2$ ，因此，确定截面位置时遇到的问题：当以  $T = kT_1$  来确定截面时，而另一种频率的运动可能在截面上没有交点。同理，如果采用  $T = pT_2$  来确定截面时，会出现同样的问题。由于上述原因，在截面选择的过程中，需要采取特殊处理方法。

选择一个小的  $\delta$ ，如果使得  $pT_2$  处于  $(kT_1 + \delta)$  内，那么 Poincaré 映射的点由  $x_k = \varphi_{kT_1}(x_0, t_0)$  组成，其中， $k$  满足：

$$\text{mod}((kT_1 + \delta), T_2) < 2\delta \quad (7)$$

由于存在  $\delta$ ，Poincaré 映射可能不是单一的点  $\bar{x}$ ，而是包含  $\bar{x}$  的一个小的区间段  $J$ ，且满足

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(x_k) = \bar{x} \quad (8)$$

在自治系统中，需要通过空间截取的方式来得到截面上的点。理论上，截面  $\Sigma$  在某个位置和轨线相截

后,可以得到 Poincaré 映射点  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ , 但是实际应用中  $x_k$  不会准确地处于截面上, 而是在截面的  $\delta$  邻域面内。此外, 对于实测信号重构吸引子, 受测试环境、误差等多种因素影响, 其轨线具有不完全重合性, 会产生轨道簇, 其 Poincaré 截面与仿真信号的不同之处在于在截面上几乎不会出现单个截点, 而是点束。因此需要根据点束的多少来确定周期解的性质。此外, 每根轨道在相同的周期内不一定返回到起始点的邻域中, 采用以激励周期为单位提取 Poincaré 截面时, 可能存在多个截点, 因而直接通过空间截取的方式进行分析是比较合理的。再次, 轨线实际上是由一些离散的点组成, 它们和截面的交点并不总是一定存在, 因此将距离截面小于某个值的点统计在同一截面上。

### 3. 仿真研究

实际振动系统可能受到多种频率的激励, 将多频率激励振动微分方程无量纲化后得到系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta_d \cdot y + \sum_{i=1}^2 \gamma_i \cos(\omega_i t) \end{cases} \quad (9)$$

其中  $\delta_d$  为阻尼,  $\gamma_i$  为激励力幅值,  $\omega_i$  为激励频率。当上述参数处于不同的范围时, 系统具有不同的响应。本节对前面研究的 Poincaré 截面法进行仿真, 探讨不同响应的 Poincaré 截面特征。

a) 当系统参数分别  $\delta_d = 0.22$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.15$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.15\omega_1 = \omega_2 = 1$ , 初始条件为(0.5, 0)时, 系统响应如图 1(a)所示。从图中可以观察到时间历程图具有明显的周期特征。对响应进行功率谱分析, 得到功

率谱图如图 1(b)所示, 从图中可以观察到响应具有线谱特征。系统响应的相平面图如图 1(c)所示, 从图中可以观察到相轨线结构比较简单。Poincaré 截面图如图 1(d)所示, 从图中可以观察到 3 个离散的点, 因此系统在上述参数条件下产生了周期 3 响应。

b) 当系统的参数为  $\delta_d = 0.25$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ , 初始条件为(0.5, 0)时, 系统响应的时间历程图如图 2(a)所示, 从图中可以观察到响应曲线没有明显的规律。对其进行功率谱分析, 如图 2(b)所示, 从图中可以观察到宽谱特征。系统响应的相平面图如图 2(c)所示, 从相图中可以观察到吸引子具有不同于点、极限环以及环面的特征, 是奇怪吸引子。系统响应的 Poincaré 截面图如图 2(d)所示, 截面图上的点具有分形结构。利用时间序列最大 Lyapunov 指数的计算方法可得最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{max}$  为 0.3714, 因此系统产生了混沌响应。

c) 当系统的参数为  $\delta_d = 0.25$ ,  $\gamma_1 = 0.15$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{2}$ , 初始条件为(0.5, 0)时, 系统响应的时间历程图如图 3(a)所示, 从图中可以观察到响应曲线没有明显的规律。对其进行功率谱分析, 如图 3(b)所示, 从图中可以观察到明显的线谱成分。系统响应的相平面图如图 3(c)所示, 相图具有一种网状结构, 这主要是由于响应中运动频率不可公约, 相轨线在环面上运动时相互靠近但不重合导致的。所得到的 Poincaré 截面图如图 3(d)所示, 截面图上的点形成了一个圆, 因此系统产生了拟周期响应。

### 4. 试验结果

设计了一个带有反馈控制增益的基于空气弹簧的

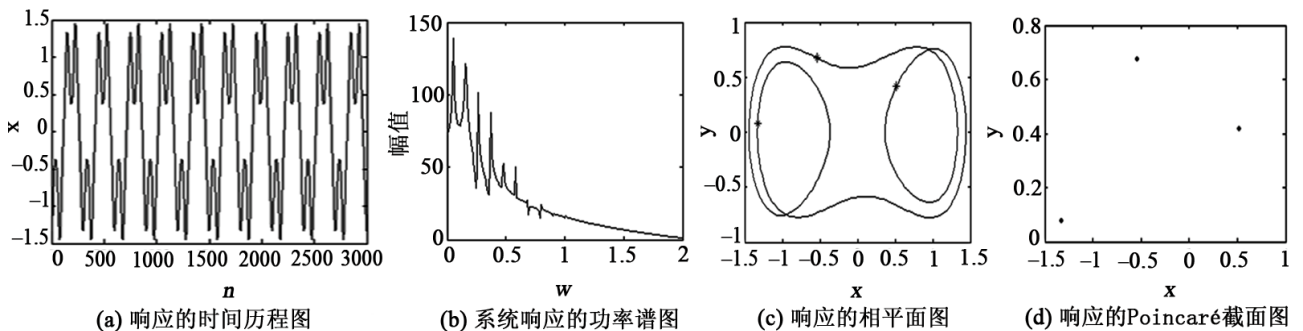


Figure 1. Period-3 response of system  
图 1. 系统的周期 3 响应

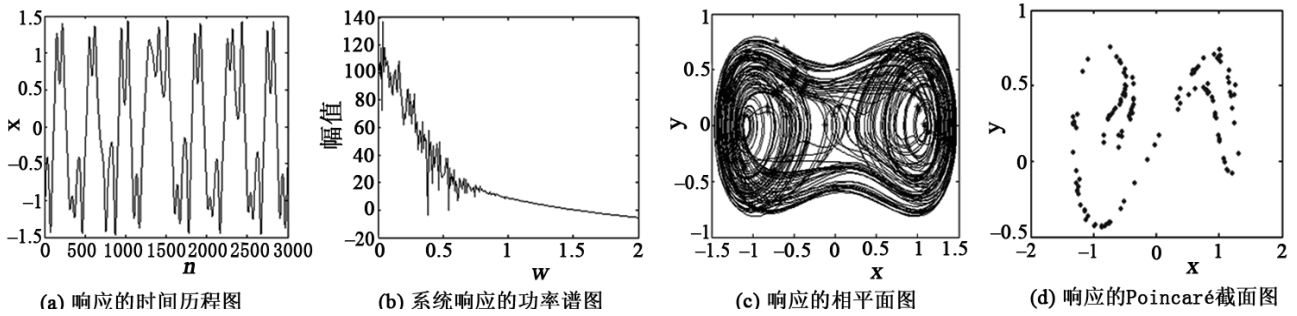


Figure 2. Chaotic response of system  
图 2. 系统的混沌响应

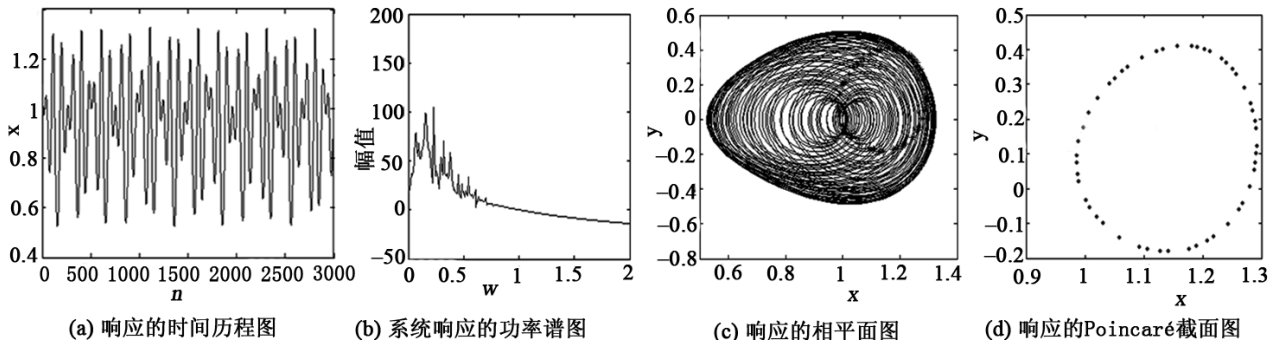


Figure 3. Quasi-periodic response of system  
图 3. 系统的拟周期响应

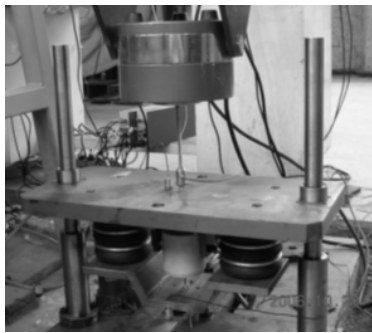


Figure 4. The designed nonlinear vibration system  
图 4. 设计的非线性振动系统

振动系统，如图 4 所示。振动系统由激振器产生具有一定频率的简谐激励力，由于空气弹簧的非线性特性，通过调整该系统的参数，可以得到不同的响应。

#### 4.1. 对频谱为线谱的信号进行分析

当空气弹簧的压力为 0.08 Mpa，激励力大小为 30 N，激励频率为 10 Hz，反馈增益为 5 时，隔振系统上层振动加速度响应如图 5(a)所示，对其进行频谱分析，功率谱图如图 5(b)所示，可以观察到该组信号具有明显的线谱特征，因此可以初步断定系统产生了周期响

应。为了进行相空间重构，利用优化重构参数法计算得到嵌入维数为 5，延迟时间为 3。重构相平面图如图 6(a)所示。从图中可以观察到吸引子具有环状结构，它不同于不动点和单个的极限环，而是多个环绕叠。

利用 Poincaré 截面方法对其进行详细分析。为了获得 Poincaré 截面图，选取某个截面与吸引子横截相交。对于实验信号而言，由于多种因素的影响，轨道不完全重合，因此吸引子上的轨线比较粗，而且在相同的时间内，某一点邻域内出发的点，在一个激励周期内不一定能够返回到邻域中。由于这两个原因的存在，使得 Poincaré 截面图和仿真数据的所得到的截面图有所不同：在截面上几乎不会出现单个截点，而是点束。因此需要根据点束的多少来确定周期解的性质。同时，由于重构轨线的不完全重合性，它们在相同的周期内不一定返回到起始点的邻域中，因此采用以激励周期为单位提取 Poincaré 截面图时，可能存在多个截点。当这种情况发生时，无法判断点束的个数。采取图 6(b)所示的截面进行分析是比较合理的选择。然而由于轨线实际上是一些离散点组成，和截面的交点并不总是存在，因此需要将距离截面小于  $\delta_1$  的点仍

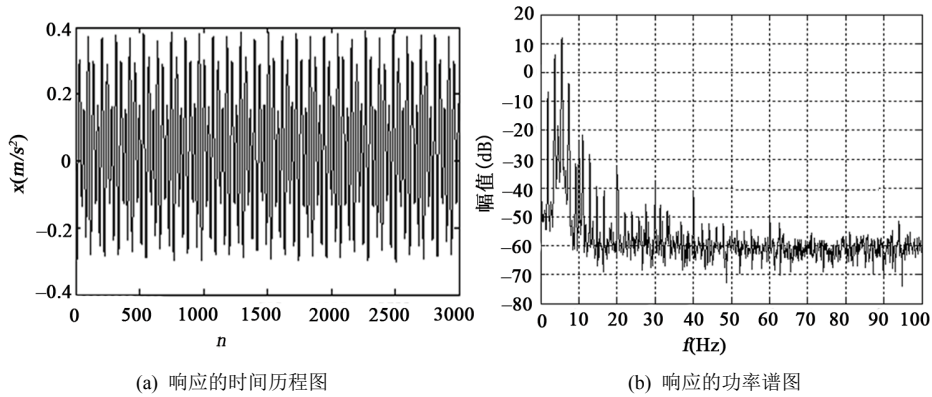


Figure 5. Vibration acceleration response of experimental system  
图 5. 实验系统振动加速度响应

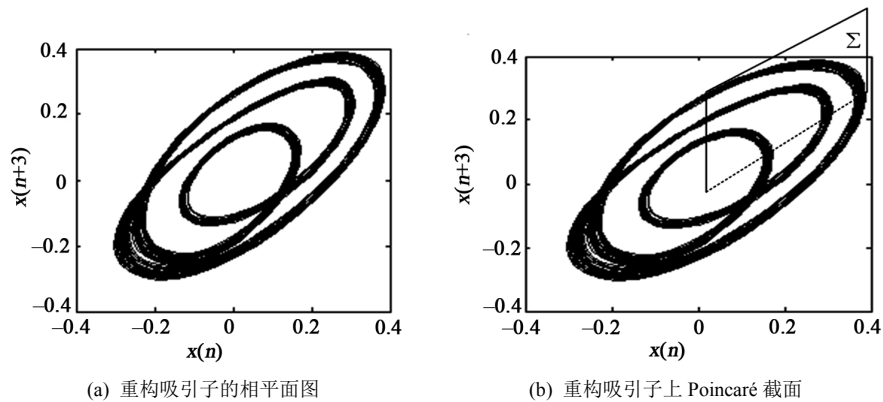


Figure 6. Phase plane of reconstructed attractor  
图 6. 重构吸引子的相平面图

然在同一截面上。图 7(a)是  $\delta_1 = 0.02$  时 Poincaré 截面和相轨线相截的交点，图 7(b)是其对应的截面图。从图中可以观察到，采用 Poincaré 截面图时，出现了 3 个点束，如图 A、B、C 位置，因此系统的响应为周期 3 行为。然而，由于点束中包含了多个点，可能导致误判。因此将 Poincaré 截面图上距离小于  $\delta_2$  的点认为是同一点。图 8 是当  $\delta_2 = 0.022$  时的结果。

#### 4.2. 对频谱为宽谱的信号进行分析

当空气弹簧气压为 0.12 Mpa，激励力为 20 N，激励频率为 15 Hz 时，采集到振动系统的响应后，为了揭示单变量的时间序列中所蕴涵的信息，对其进行相空间重构分析。应用局部流形变形最小法和无阈值方法得到的延迟时间为 4，嵌入维数为 6。根据重构参数得到与原系统等价的吸引子，其相平面图如图 9(a)所示，它和点、极限环以及环面具有明显的差异，是奇

怪吸引子。其结构和 Rossler 吸引子的结构相似，对应的 Poincaré 截面图如图 9(b)所示。

为了对信号进行定量刻画，应用改进的稳健算法计算其最大 Lyapunov 指数，得到指数曲线结果如图 10(a)所示，从直线段的斜率可知最大 Lyapunov 指数为 0.075。计算得到特征指数谱为(0.0774, -0.0120, -0.1559, -0.2150, -0.3377)，如图 10(b)所示。

#### 4.3. 对拟周期振动信号进行分析

当空气弹簧的气压为 0.1 Mpa，激励力为 50 N，激励频率为 7 Hz，反馈增益系数为 5 时，对单变量时间序列进行相空间重构后，得到重构吸引子的相平面图，如图 11(a)所示，从图中可以观察到吸引子具有纺锤形状，而且相轨线之间呈现网状结构，反映了其中含有运动频率不可公约的轨道。其 Poincaré 截面图如图 11(b)所示，从图中可以观察到双圆结构，表明该响应具有拟周期性性质。



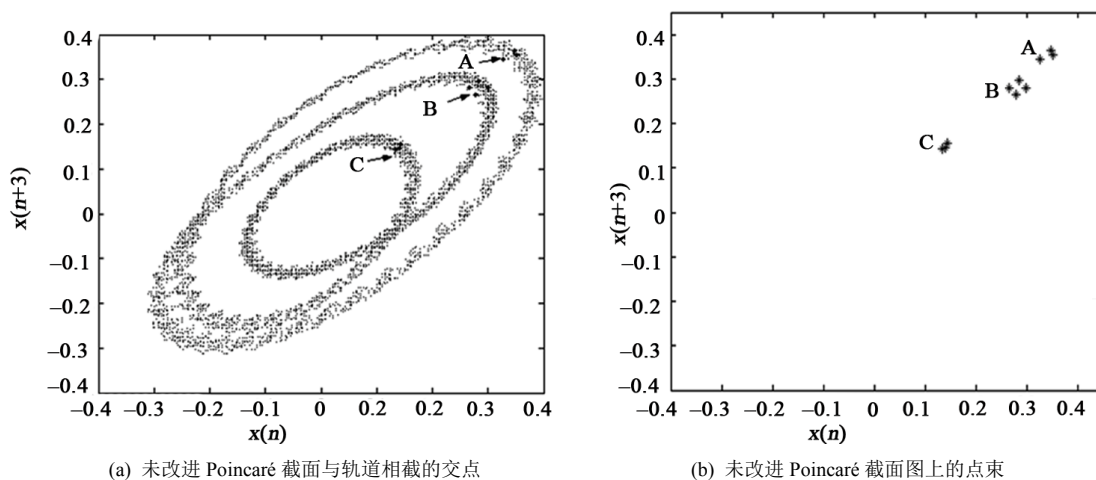


Figure 7. Poincaré map of experimental signal  
图 7. 未改进的 Poincaré 截面图

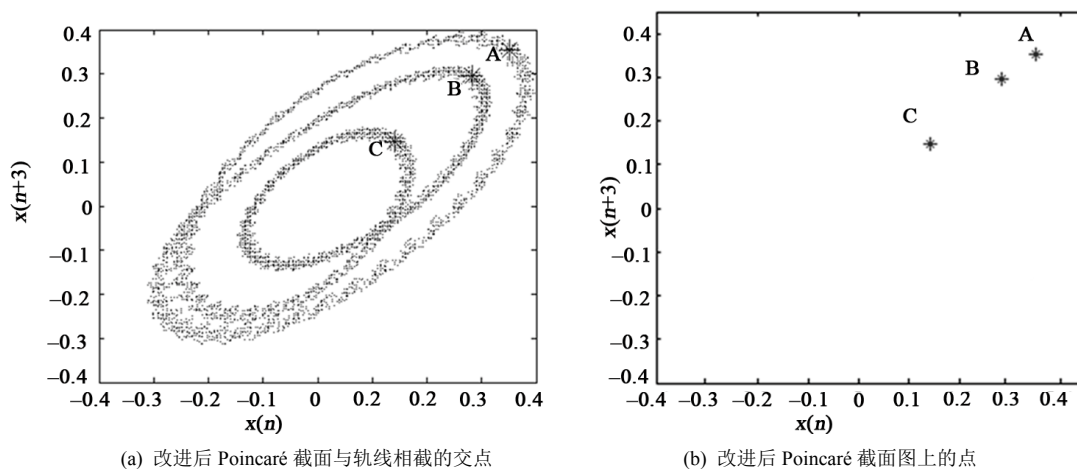


Figure 8. Modified Poincaré map of experimental signal  
图 8. 试验信号 Poincaré 截面图的改进

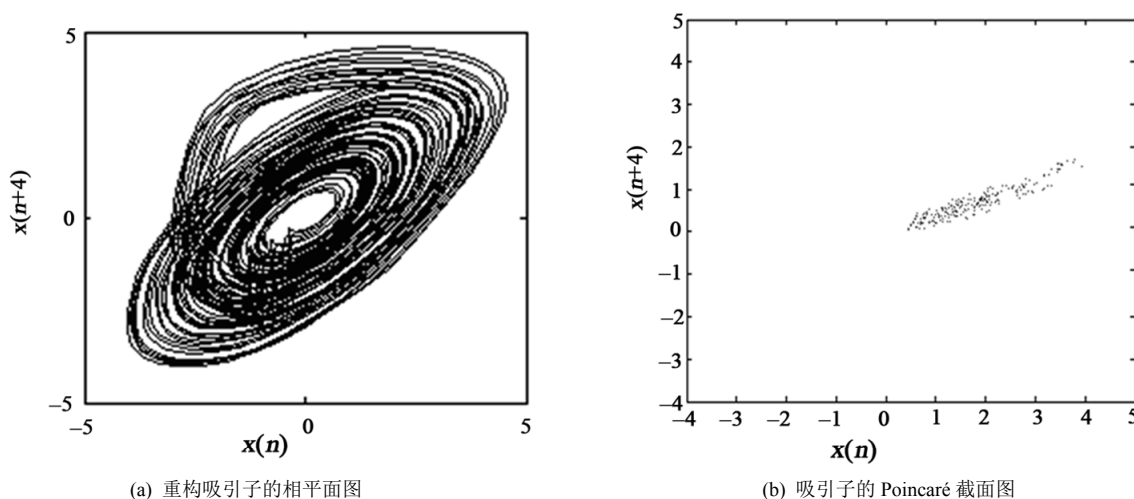


Figure 9. Reconstructed attractor phase plane and Poincaré map  
图 9. 重构吸引子相平面图和 Poincaré 截面图

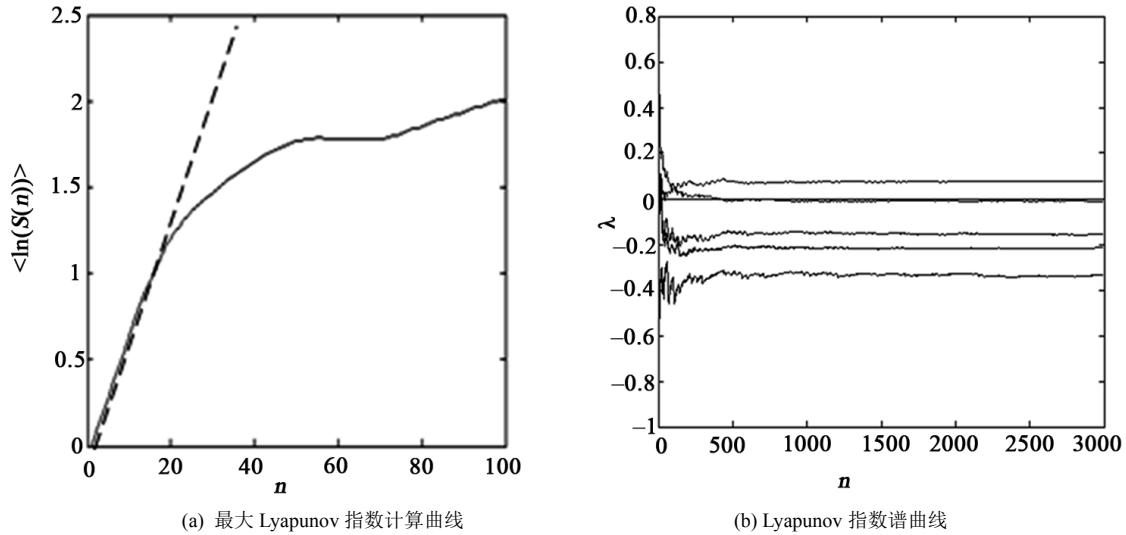


Figure 10. Lyapunov exponent curves of experimental signal  
图 10. 实验时间序列 Lyapunov 指数曲线图

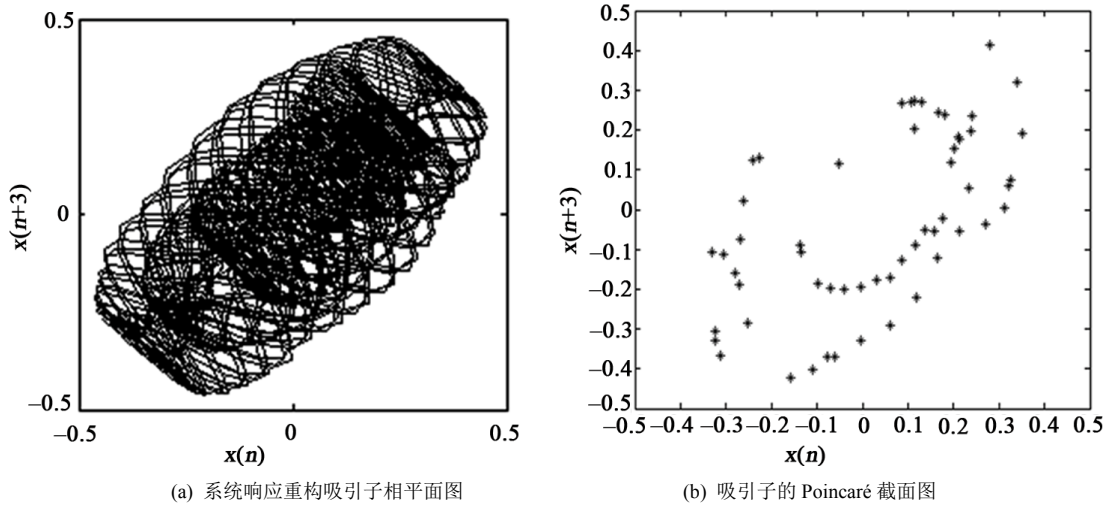


Figure 11. Vibration acceleration response of experimental system  
图 11. 试验系统的振动加速度响应

### 5. 结论

对 Poincaré 截面法进行了改进。当激励频率可约时，可以根据  $kT_1 = pT_2 = T$  来确定截面的位置。当两个激励频率不相等时， $kT_1 \neq pT_2$ ，因此，确定截面位置时存在的问题是：当以  $T = kT_1$  来确定截面时，而另一种频率的运动可能在截面上没有交点。为此，引入截面邻域，使得  $\lim_{\delta \rightarrow 0} J(x_k) = \bar{x}$ ，从而尽量保证了截面点的存在。实测信号重构吸引子，由于轨线具有不完全重合性，会产生轨道簇，其 Poincaré 截面与仿真信号的不同之处在于在截面上几乎不会出现单个截点，

而是点束。因此可根据点束的多少来确定周期解的性质。设计了非线性振动实验装置，对研究结果进行了验证。

### 6. 致谢

感谢国家自然科学基金(51179197)，海洋工程国家重点实验室(上海交通大学)开放课题(1009)资助。

### 参考文献 (References)

[1] C. N. D. Buckjohn, M. S. Siewe, C. Tchawoua and T. C. Kofane. Transition to chaos in plasma density with asymmetry double-well potential for parametric and external harmonic oscillation.

- tions. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2011, 21(7): 1879-1893.
- [2] C. Murakami, W. Murakami and K.-I. Hirose. Global periodic structure of integrable Duffing's maps. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 16(2): 233-244.
- [3] Z.-M. Ge, P.-C. Tsen. Nonlinear dynamic analysis and control of chaos for a two-degree-of-freedom rigid body with vibrating support. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 240(2): 323-349.
- [4] Q. Feng, H. He. Modeling of the mean Poincaré map on a class of random impact oscillators. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2003, 22(2): 267-283.
- [5] Z. J. Jing, Z. Y. Yang and T. Jiang. Complex dynamics in Duffing-Van der pol equation. *Chaos Solitons and Fractals*, 2006, 27(3): 722-747.
- [6] J. H. Xie, W. C. Ding. Hopf-Hopf bifurcation and invariant torus  $T^2$  of a vibro-impact system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, 40(4): 531-543.
- [7] H. Situngkir, Y. Surya. Neural network revisited: Perception on modified Poincaré map of financial time-series data. *Physica A*, 2004, 344(1-2): 100-103.
- [8] J. Garcia-Margallo, J. D. Bejarano. Melnikov's method for nonlinear oscillators with non-linear excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 212(2): 311-319.
- [9] J.-R. Chazottes. Poincaré recurrences and entropy of suspended flows. *Dynamical Systems*, 2001, 332(8): 739-744.
- [10] W. Tucker. Computing accurate Poincaré maps. *Physica D*, 2002, 171(3): 127-137.
- [11] J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [12] N. Buric, A. Rampioni and G. Turchetti. Statistics of Poincaré recurrences for a class of smooth circle maps. *Chaos Solitons and Fractals*, 2005, 23(5): 1829-1840.
- [13] Y.-C. Hsiao, P.-C. Tung. Detecting the unstable periodic orbits of chaotic nonautonomous system with an approximate global Poincaré maps. *Physics Letters A*, 2001, 290: 59-64.
- [14] M. Hénon. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica D*, 1982, 5(2-3): 412-414.