

Distributed Capacitance of Spiral Coils and Its Magneto-Capacitance Effect

Yingying Wang¹, Jiansen Gao², Xiaobin Luo¹, Ying Zhang¹, Ning Zhang^{1*}

¹Jiangsu Key Laboratory on Opto-Electronic Technology, Magnetic Electronics Laboratory, Nanjing Normal University, Nanjing

²Basic Teaching Department, Suqian College of Jiangsu Province, Suqian

Email: *zhangning@njnu.edu.cn

Received: Feb. 20th, 2013; revised: Mar. 1st, 2013; accepted: Mar. 14th, 2013

Abstract: The characteristics of distributed capacitance and impedance of hollow coils are studied theoretically and experimentally. The frequency characteristic, the number of turns and winding mode dependent capacitor of the coil, and the impedance versus number of turns of hollow coils have been measured, respectively. The distributed capacitance has been observed almost irrelevant to the number of turns and the winding ways of the coils when the number of turns is greater than 10. By measuring the magneto-capacitance effect of spiral coil, it was found that the distributed capacitance of coil relates to the coil material, suggesting the influence of skin effect. From the coil equivalent circuit, combining with the skin effect, an approximate formula of distributed capacitance and impedance have been worked out. Analysis showed that the distributed capacitance of coil mainly originates from line capacitance and the capacitance between turns.

Keywords: Spiral Coil; Distributed Capacitance; Magnetocapacitance

螺旋线圈的分布电容及其磁电容效应

王莹莹¹, 高建森², 罗小彬¹, 张颖¹, 张宁^{1*}

¹南京师范大学磁电子学实验室, 江苏省光电技术重点实验室, 南京

²江苏省宿迁学院基础教学部, 宿迁

Email: *zhangning@njnu.edu.cn

收稿日期: 2013年2月20日; 修回日期: 2013年3月1日; 录用日期: 2013年3月14日

摘要: 本文对空心螺旋线圈的分布电容及阻抗特性进行了理论和实验研究, 测量了螺旋线圈分布电容的频率特性及其与线圈匝数和绕线方式的依赖关系, 以及螺旋线圈阻抗随匝数的变化规律。观察到当线圈匝数大于 10 时, 分布电容的数值与匝数和绕线方式几近无关。通过测量线圈的(器件型)磁电容效应发现, 线圈的分布电容与线圈材质有关, 其机理可从趋肤效应得到解释。从线圈的等效电路出发, 结合趋肤效应推出分布电容及阻抗的表达式。分析显示, 线圈的分布电容主要来源于匝间电容。

关键词: 空心线圈; 分布电容; 磁电容

1. 引言

螺旋线圈作为电感原件和传感器的研究可以追溯到大约一个世纪之前^[1-4]。由于螺旋线圈可以广泛用于制造现代仪器设备, 从而相关研究至今不衰^[5-9]。但

近年来螺旋线圈的研究始终较多地关注于磁芯线圈^[10-12]。由于磁性材料的磁性能极易受外界干扰, 因此磁芯线圈可展现更加丰富多彩的行为。但是, 研究磁芯线圈并不能彻底阐明线圈的本征行为。在高频电磁场环境下, 线圈的本征行为将变得突出, 因此有必要对空心线圈给予仔细研究。

*通讯作者。

螺旋线圈不仅是个电感元件,同时还具有一定的直流电阻和分布电容,这三者形成的等效电路如图 1 所示^[7]。其中,分布电容对线圈整体阻抗的贡献至关重要。线圈分布电容的研究已见有诸多报道^[13-17],但对其成因迄今未有定论。实验发现,分布电容的数值不仅与频率有关,还与线圈匝数和线圈的绕线方式密切相关。文献[15]根据一定的电荷面密度求得两环间的电压差,进而算出两环间的分布电容,再在此基础上用螺旋线方程对每一小段圆弧的分布电容积分从而求得螺旋线的分布电容。文献[16]研究了由已知两圆环间电压,用矩量法解出环面电荷分布继而求出两环间分布电容。两种分布电容的计算方法都较繁琐,且均未给出分布电容随频率的变化。郭华等人曾对磁芯罗氏线圈间绕法和线圈匝数对分布电容影响进行过理论研究^[17],结果发现,在 100 kHz~1000 kHz 频率范围内,绕线方式和匝数会导致差别较大的分布电容,频率低于 100 kHz 时,分布电容很小,似可忽略。然而这一结果能否真正体现线圈的本征性质亦无法给予定论。

我们采用实验测量和理论分析的方法对空心螺旋线圈分布电容以及阻抗进行了仔细地研究。得到了空心线圈分布电容的频率特性及随线圈匝数及绕线方法的变化关系,获得和实验结果一致的理论模型,并通过测量线圈的磁电容及阻抗加以佐证。

2. 实验结果及讨论

根据线圈的等效电路(图 1)。先不考虑分布电容。由于电阻与感抗形成串联,于是根据串联电路法则,电路中的阻抗为

$$Z_N = R_N + j\omega L_N, \quad (1)$$

而电路品质因数值 Q_N 满足关系 $R_N = \omega L_N / Q_N$, 于是根据 L_N 和 Q_N 的测量值得

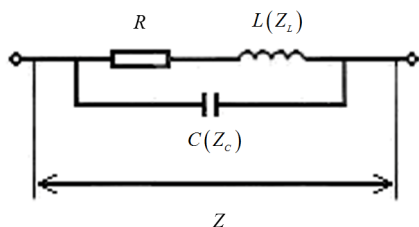


Figure 1. The effective circuit of air coil
图 1. 线圈等效电路图

$$|Z_N| = \sqrt{\left(\frac{\omega L_N}{Q_N}\right)^2 + (\omega L_N)^2} = \omega L_N \sqrt{\left(\frac{1}{Q_N}\right)^2 + 1} \quad (2)$$

同理,再测出单匝时的电感值 L_1 和品质因数 Q_1 , 并得到单匝线圈的阻抗

$$|Z_1| = \sqrt{\left(\frac{\omega L_1}{Q_1}\right)^2 + (\omega L_1)^2} = \omega L_1 \sqrt{\left(\frac{1}{Q_1}\right)^2 + 1} \quad (3)$$

由于单匝和 N 匝时的品质因数近似相等,而电感可表达为 $L = \mu_0 \mu_r N^2 V / l^2$, 则由(2)及(3)式可得

$$|Z_N| = N^2 |Z_1| \quad (4)$$

再考虑到分布电容所形成的容抗。由于线圈中的电感与分布电容形成并联(图 1),于是由并联电路法则可得

$$C_p = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{Q_1}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left(\frac{1}{Q_N}\right)^2 + 1}}{\omega^2 N^2 L_1 \sqrt{\left(\frac{1}{Q_1}\right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{1}{Q_N}\right)^2 + 1}}, \quad (5)$$

由(5)式即可得出分布电容的测算值。

本实验采用的空心线圈由线径为 0.50 mm 的铜线绕制,线圈圈径 4.3 mm,长度取决于匝数。该空心线圈的分布电容的频率特性如图 2 所示。分布电容的测定采用交流电桥(HG2810LCR)进行。电桥的测试频率即加载于线圈的信号频率。由图 2 可见,当频率较低时,线圈分布电容随频率增加而迅速下降,且当匝数较低时对匝数比较敏感;当频率接近于 10 kHz 时,分布电容的频率特性曲线上出现一下降的台阶。

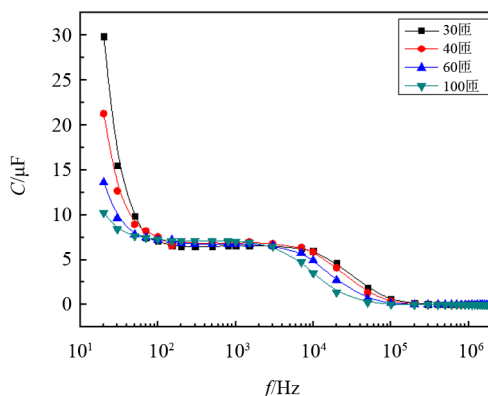


Figure 2. Signal frequency dependent distributed capacity of air coil wound with copper wire
图 2. 分布电容频率特性曲线

线圈做为一金属体，在给定电流及电势 $u = u_0 \sin \omega t$ 的电路中，其线电容可依电容的基本定义得

$$C = \frac{dq}{du} = \frac{dq}{dt} / \frac{du}{dt} = \frac{I}{\omega u_0 \cos \omega t}, \quad (6)$$

如果不考虑相位因素，则有 $C = I/\omega u = 1/\omega R$ 。当频率较低(例如 $f < 10$ kHz)时，电阻 R 为一常数，但频率较高时，须考虑趋肤效应的影响。根据电磁学，趋肤效应影响下导线中的电流密度可表示为

$$J_r = J_f \exp\left(-\frac{r_0 - r}{\delta}\right), \quad (7)$$

其中 r 和 r_0 分别表示为离开轴线的距离及线半径， J_f 为导线表面的电流密度， δ 为趋肤深度

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}, \quad (8)$$

其中 σ 和 μ 分别为导线的电导率和磁导率， ω 为圆频率。可见趋肤深度取决于频率。如果导线的线径远大于趋肤深度，可近似有^[18]

$$J_r = I \exp\left(-\frac{r_0 - r}{\delta}\right) / \left[2\pi \left[r_0 \delta - \delta^2 + \delta^2 \exp\left(-\frac{r_0}{\delta}\right) \right] \right], \quad (9)$$

若线径并非足够大，则需要更严谨的计算。当频率增大时，趋肤深度减小，电阻增加，致使电容减小。一般认为，频率高于 10 kHz 时趋肤效应才较为明显。因此图 2 中，10 kHz 左右出现的下降台阶应该正是趋肤效应的作用。

为进一步验证趋肤效应对分布电容的影响，我们绕制了不同材质的空心线圈，并测量了其磁电容效应。图 3 给出了零磁场，和 400 mT 的磁场条件下铁丝(排绕的)空心螺旋线圈的频率特性曲线。铁丝线圈的线径为 0.50 mm，匝数为 30，圈径为 8 mm。图 3 显示，有磁场时的分布电容高于零磁场条件下。考虑到退磁效应，即外磁场通常使铁磁质磁导率 μ 降低。由趋肤效应(讨论见后)知，这将导致分布电容增大，从而说明线圈的分布电容受到材料电磁特性。图 3 亦显示分布电容的磁电容效应似与频率无关，即所有频率下均存在磁电容效应。而对于铜线圈并未观察到有任何磁电容效应，概因铜为非磁性材料，不具有退磁效应。

匝间电容的大小取决于匝间距 d 。故不同的绕制方法将导致平均匝间距不同，所以匝间电容与绕线方式有关。为排除趋肤效应的影响，选择低频段测量了不同绕线方式对分布电容的影响。图 4 给出了三种不同绕制方法的线圈的分布电容随匝数的变化曲线。三种绕制方法分别为盘绕、排绕及无序叠绕。三种线圈的线径一致。由图 4 可见，1) 在线圈匝数小于 10 匝时，由于绕线方式的不同导致分布电容的大小不同。这是由于匝数较少时，绕线方式的不同会导致匝间距的较大差异，从而导致电容的不同；2) 线圈匝数大于 10 匝时，绕线方式对分布电容大小几乎没有影响，无论是盘绕、排绕还是无序叠绕，分布电容随线圈匝数的变化规律基本相同；3) 随匝数的增加分布电容的值是减小的，这一结果与文献[6]的结论相同。

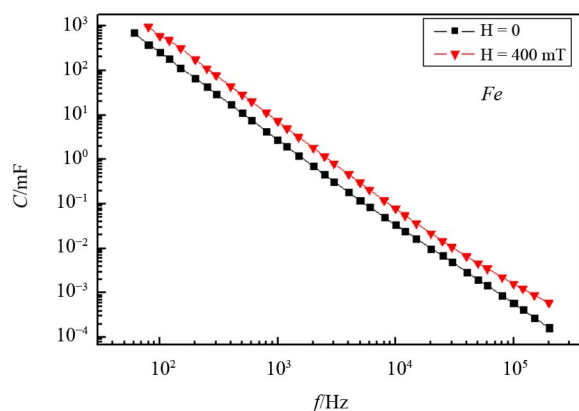


Figure 3. Signal frequency dependent distributed capacity of air coil wound with iron wire
图 3. 铁丝线圈分布电容随频率的变化

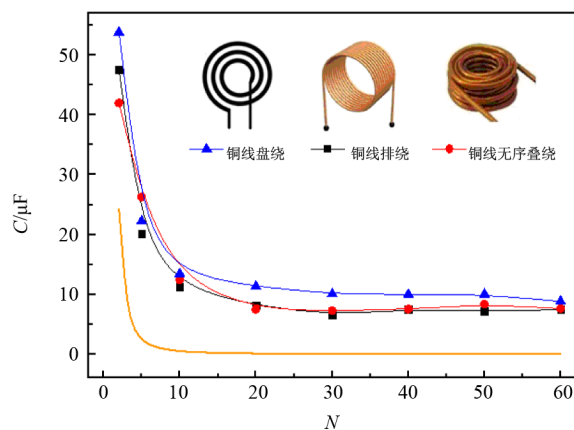


Figure 4. Turns dependent distributed capacity of air coil (the contrast of experimental and theoretical)
图 4. 分布电容随线圈匝数的变化规律(实验与理论的对比)

3. 分布电容与阻抗的理论估计

根据上一节的讨论, 一段长度为 Δl , 有效截面积为 s 的导线的电容可表示为

$$C_i = l/\omega u = s/\omega \rho \Delta l. \quad (10)$$

如果认为线圈的分布电容主要为匝与匝之间的电容, 则可先考虑任意相邻两匝的匝间电容, 根据(10)式

$$C_i = \frac{s}{\omega \rho \Delta l} = \frac{s}{(2\pi D + d)\omega \rho}, \quad (11)$$

其中 D 为线圈的圈径, d 为相邻匝的匝间距。对于有 N 匝的线圈, 如果只考虑邻近匝间电容, 则一共有 $N-1$ 个匝间电容, 若视两两匝间电容近似相等, 并形成串联($\frac{1}{C_T} = \sum_j \frac{1}{C_{ij}}$), 则 N 匝线圈的总电容为

$$C_T = \frac{C_i}{N-1} = \frac{s}{(N-1)(2\pi D + d)\omega \rho}. \quad (12)$$

其中 \bar{d} 为平均匝间距。平均匝间距可通过关系 $\bar{d} = l/N$ 估计, l 为线圈长度。若考虑所有的两两匝间电容, 则有

$$C_T = \frac{2C_i}{N(N-1)} = \frac{2s}{N(N-1)(2\pi D + \bar{d})\omega \rho}. \quad (13)$$

当频率较低(例如 $f < 10$ kHz)时, 可取 $s = \pi r_0^2$, 考虑到趋肤效应时, 近似有 $s = \pi(2r_0\delta - \delta^2)$, 从而(13)式变为

$$C_T = \frac{2C_i}{N(N-1)} = \frac{2\pi r_0^2}{N(N-1)(2\pi D + \bar{d})\omega \rho}, \quad (\text{低频下})(14)$$

$$C_T = \frac{2C_i}{N(N-1)} = \frac{2\pi(2r_0\delta - \delta^2)}{N(N-1)(2\pi D + \bar{d})\omega \rho}. \quad (\text{高频下})(15)$$

由于 $s = \pi(2r_0\delta - \delta^2)$ 同时与频率及线径有关, 而这里电容取负值无意义, 因此对于给定线径的铜线, 表达式 $s = \pi(2r_0\delta - \delta^2)$ 存在着适用频率下限, 否则 s 有可能为负数。对于 0.50 mm的铜线, 频率下限约为 17.73 kHz。但由于 $s = \pi(2r_0\delta - \delta^2)$ 只是一近似表达式, 因此实际频率下限要略低于该式所给出的值。为获得更直观的表达式, 可做如下近似计算。考虑到趋肤深度大于铜线半径无意义, 故可设 $\lim_{\omega \rightarrow 0} \delta = r_0$, 于是

低频下有

$$\rho = \frac{s\omega\mu}{2\pi}. \quad (16)$$

由此得低频下匝间电容表达式

$$C_{TL} = \frac{2C_i}{N(N-1)} = \frac{4\pi}{N(N-1)(2\pi D + \bar{d})\omega^2\mu}. \quad (\omega \leq \frac{1}{2\sigma\mu r_0^2}) \quad (17)$$

(17)式显示, 即使在低频下, 电容也与绕线的磁导率相关。这意味着低频下同样可以存在磁电容效应, 前提是绕线具有退磁效应。将趋肤深度表达式代入(15)式得高频下匝间电容

$$C_{TH} = \frac{2C_i}{N(N-1)} = \frac{4\pi(r_0\sqrt{2\omega\sigma\mu} - 1)}{N(N-1)(2\pi D + \bar{d})\omega^2\mu}. \quad (\omega > \frac{1}{2\sigma\mu r_0^2}) \quad (18)$$

对比(17)和(18)两式可见, 趋肤效应使得电容多出一因子 $(r_0\sqrt{2\omega\sigma\mu} - 1)$ 。对于线径较细的圆柱状铜线, 欲得趋肤效应影响下铜线的有效电阻率应做更严谨的计算, 即从电磁学基本方程出发结合柱坐标方程的计算, 其结果涉及到贝塞尔函数^[19,20], 较繁琐。由于本文并不主要讨论趋肤效应, 故此从略。须提到的是, 该计算所得结果可以将分布电容随频率的变化统一为一个表达式不无需将高低频分开表达, 但计算结果未必比(18)式有更高的精度。

由(17)及(18)两式可以预言分布电容随频率及匝数的变化如下: 1) 分布电容在低频下与频率的平方成反比, 当频率介于 $1/2\sigma\mu r_0^2 \leq \omega \leq 2/\sigma\mu r_0^2$ 之间时, (18)显示的电容将在与 ω^2 成反比的基础经历一次急剧下降, $\omega > 2/\sigma\mu r_0^2$ 时, 约与 $\omega^{3/2}$ 成反比, 上述结论这与实验结果(图 2)所描述的情况相符; 2) 分布电容大致与匝数的平方 N^2 成反比, 这与图 4 所描述的实验结果一致; 3) 当 N 较小时, 例如小于 10 , 匝间距 \bar{d} 的影响不可忽略, 而不同绕制方法导致不同的匝间距, 因此, 当匝数较少时绕制方法对电容的数值有较大影响; 盘绕时匝间距最小, 排绕时次之; 另一方面, 但由于 \bar{d} 很小, 故当 N 较大时匝间距可不予考虑, 即匝数较多时绕制方法对电容的数值基本无影响, 该结论亦与实验结果(图 4)相符; 4) 如果绕线具有退磁效应,

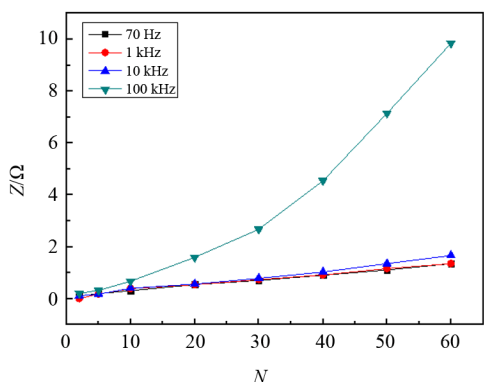


Figure 5. Measured impedance as a function of turns of air coil
图 5. 阻抗随匝数的变化实验曲线

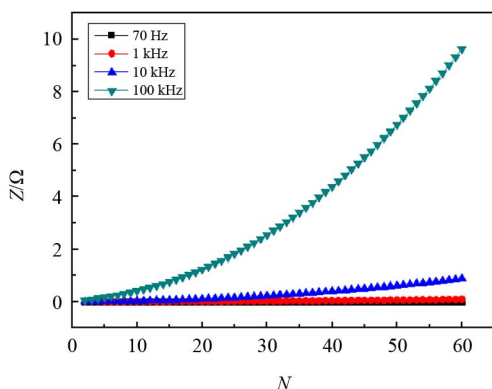


Figure 6. Calculated impedance as a function of the turns of air coil
图 6. 阻抗随匝数的变化理论曲线

则其线圈的分布电容将具有磁电容效应，并且该磁电容的数值基本与频率无关(图 3)，由此也说明假设 $\lim_{\omega \rightarrow 0} \delta = r_0$ 及推论(16)式是合理的。综上所述，说明了(17)，(18)两式是合理的，同时亦说明线圈的分布电容主要为匝间电容。如果还存在其它形式的电容，则将从理论上偏离(17)或(18)式的形式，从而偏离实验结果。以(18)为基础作图，得图 4 中的黄色实线。可见理论估计与实验结果基本一致。另外，由(17)及(18)式亦可见，线圈的分布电容与圈径呈反比，低频下由于不须考虑趋肤效应，故分布电容与线径无关，而在高频下分布电容与线径呈正比。

研究空心线圈的阻抗可进一步验证(18)式的合理性。考虑到趋肤效应的影响，螺旋线圈的电阻可近似表示为

$$R = \frac{\pi DN \rho}{\pi(2r_0 \delta - \delta^2)} = \frac{DN \omega \mu}{2(r_0 \sqrt{2\omega \mu \sigma} - 1)}, \quad (19)$$

对于空心线圈，电感可表达为 $L = \pi \mu_0 N^2 D^2 / 4l$ ， μ_0 为真空磁导率。根据线圈的等效电路(图 1)可得线圈的阻抗

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \quad (20)$$

或

$$|Z| = \frac{\sqrt{\omega^2 (L - CR^2 - \omega^2 L^2 C)^2 + R^2}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2} \quad (21)$$

将式(19)及(20)代入(21)式可得到关于阻抗的表达式。而实验测得的阻抗随匝数的变化规律如图 5 所示。用 Matlab 对阻抗表达式进行仿真，可得图 6。对比图 5 和图 6，可见两者规律基本，理论与实验符合的很好。

4. 结论

空心线圈的分布电容主要由匝间电容构成。低频下总电容与频率成反比，高频下由于受趋肤效应的影响而与频率的 3/2 次方成反比。随匝数的增加，电容与匝数的平方成反比。当匝数少于 10 时，线圈的绕制方法对电容的数值有较大影响，匝数超过 10 时绕制方法对电容的数值基本无影响。

5. 致谢

本文工作受到国家自然科学基金项目(51277098)的支持。

参考文献 (References)

- [1] A. P. Chattock. On a magnetic potentiometer. *Philosophical Magazine*, 1887, 24(146): 94-96.
- [2] W. Rogowski, W. Steinhaus. Die messung der magnetischen spannung (the measurements of magnetic potential). *Archiv für Elektrotechnik*, 1912, 1(4): 141-150.
- [3] G. Dehmel. Magnetic field sensors: Induction coil (search-coil) sensors—A comprehensive survey. New York: VCH, 1989: 205-254.
- [4] C. Cavoit. Closed loop applied to magnetic measurements in the range of 0.1 - 50 MHz. *Review of Scientific Instruments*, 2006, 77(6): Article ID: 064703.
- [5] S. Tumanski. Induction coil sensors—A review. *Measurement Science and Technology*, 2007, 18(3): R31-R46.
- [6] P. Murgatroyd. *Progress with Rogowski coils*. Chicago: EM-CWA Conference, 1996: 369-374.
- [7] G. H. Shirkoohi, A. S. Kontopoulos. Computation of magnetic field in Rogowski-Chattock potentiometer compensated magnetic tester. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1994, 133(1-3): 587-590.
- [8] 彭春燕, 周有庆, 龚伟, 曹志辉. 新型螺旋管空心线圈电流互

- 感器[J]. 电力系统及其自动化学报, 2009, 21(4): 53-57.
- [9] I. Nishi, K. Yanagisawa and T. Toshima. Spiral resonator for PCM-400 M system. Review of the Electrical Communication Laboratory, 1976, 24(9-10): 776-786.
- [10] 黄子平, 秦玲, 张良, 荆晓兵. 含磁芯线圈动态电感计算[J]. 强激光与粒子束, 2007, 19(1): 125-128.
- [11] 冯书谊, 周勇, 周志敏, 向毅. 平面磁芯螺旋结构微电感的性能研究[J]. 电子元件与材料, 2009, 28(2): 48-50.
- [12] 毛明, 黄念磁. 铁氧体磁芯电感的设计[J]. 电工技术杂志, 2000, 19(12): 30-33.
- [13] Z. F. Jiang, P. S. Excell and Z. M. Hejazi. Calculation of distributed capacitances of spiral resonators. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1997, 45(1): 139-142.
- [14] J. S. Wei. Distributed capacitance of planar electrodes in optic and acoustic surface wave devices. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1977, 13(4): 152-158.
- [15] 王昕, 王宗欣, 袁晓军. 圆形螺旋线圈自感和分布电容的计算[J]. 固体电子学研究与进展, 2000, 20(4): 425-431.
- [16] Z. Jiang, P. S. Excell and Z. M. Hejazi. Calculation of distributed capacitances of spiral resonators. IEEE Transactions on Microwave Theory and Technology, 1997, 45(1): 139-142.
- [17] 郭华, 电感磁芯线圈间分布电容的研究与测试方法[J]. 微电机, 2010, 43(9):109-112.
- [18] 李建兵, 牛忠霞, 周东方, 师宇杰. 电流趋肤效应的二维数值分析[J]. 微电子学与计算机, 2007, 24(1): 9-14.
- [19] 鲁百佐, 刘志存. 趋肤效应的实验研究[J]. 物理测试, 2004, 4: 16-17.
- [20] N. Xi, C. R. Sullivan. An equivalent complex permeability model for litz-wire windings. Industry Applications Conference, 2005, 3: 2229-2235.