

# The Beam-Width Spread and Directionality of Partially Coherent Hermite-Gaussian Beams Propagating through Non-Kolmogorov Atmospheric Turbulence\*

Yanyan Peng, Jinhong Li<sup>#</sup>, Jilin Wei, Weiwei Wang

School of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan  
Email: yan\_peng860401@163.com, <sup>#</sup>lijinhong@tyust.edu.cn

Received: Apr. 8<sup>th</sup>, 2013; revised: Apr. 19<sup>th</sup>, 2013; accepted: Apr. 27<sup>th</sup>, 2013

Copyright © 2013 Yanyan Peng et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Abstract:** Based on the extended Huygens-Fresnel principle and non-Kolmogorov spectrum, analytical expressions for the beam-width spread of partially coherent Hermite-Gaussian (H-G) beams propagating through non-Kolmogorov atmospheric turbulence are derived, and used to study the beam-width spreading and directionality of partially coherent H-G beams propagating through non-Kolmogorov atmospheric turbulence. The relative width is introduced to quantitatively describe the resistance of a beam to atmospheric turbulence. It is shown that the smaller the spatial correlation length  $\sigma_0$ , and the larger the beam order  $m$ ,  $n$ , and the less the beam-width spreading of partially coherent H-G beams is affected by non-Kolmogorov atmospheric turbulence. The influence of turbulence on beam-width spreading depends on the waist width  $\omega_0$  and propagation distance  $z$ , when the propagation distance is sufficiently long, the smaller the waist width  $\omega_0$ , the less the beam-width spreading of partially coherent H-G beams is affected by non-Kolmogorov atmospheric turbulence. The beam width of partially coherent H-G beams through non-Kolmogorov atmospheric turbulence increase with the increasing exponent parameter  $\alpha$ , then decrease with increasing  $\alpha$ . There exist equivalent partially coherent and fully coherent H-G beams, GSM beams, which have the same directionality as a fully coherent Gaussian laser beam in free space and in non-Kolmogorov atmospheric turbulence. The results are interpreted physically.

**Keywords:** Partially Coherent Hermite-Gaussian Beam; Non-Kolmogorov Atmospheric Turbulence; Beam-Width Spreading; Directionality

## 部分相干厄米 - 高斯光束通过非 Kolmogorov 大气湍流传输的束宽扩展和方向性\*

彭艳艳, 李晋红<sup>#</sup>, 魏计林, 王伟伟

太原科技大学应用科学学院, 太原  
Email: yan\_peng860401@163.com, <sup>#</sup>lijinhong@tyust.edu.cn

收稿日期: 2013 年 4 月 8 日; 修回日期: 2013 年 4 月 19 日; 录用日期: 2013 年 4 月 27 日

**摘要:** 基于广义惠更斯 - 菲涅耳原理和非 Kolmogorov 谱, 推导出了部分相干厄米 - 高斯(H-G)光束通过非 Kolmogorov 大气湍流传输中束宽扩展的解析表达式, 并用以研究了部分相干 H-G 光束通过大气湍流的束宽扩展和方向性。引入相对束宽来定量的描述光束抗拒大气湍流的能力。结果表明, 空间相干长度  $\sigma_0$  越小, 光束阶束  $m$ ,  $n$  越大, 部分相干 H-G 光束的束宽扩展受大气湍流影响越小; 而束腰宽度  $\omega_0$  受大气湍流影响与传输距离  $z$  有关, 当传输距离足够远时, 束腰宽度  $\omega_0$  越小, 部分相干 H-G 光束的束宽扩展受大气湍流影响越小。部分相

\*基金项目: 国家自然科学基金(61178067 和 11247278)、山西省青年科技研究基金(2012021016)资助课题。

<sup>#</sup>通讯作者。

干 H-G 光束相对束宽随 Kolmogorov 大气湍流广义指数参量  $\alpha$  增加先增加后减小。另外, 存在等价部分相干 H-G 光束、等价完全相干 H-G 光束、等价高斯 - 谢尔模型(GSM)光束与相应的完全相干高斯光束在非 Kolmogorov 大气湍流和自由空间中分别具有相同的方向性, 并对所得结果做了物理解释。

**关键词:** 部分相干厄米 - 高斯光束; 非 Kolmogorov 大气湍流; 束宽扩展; 方向性

## 1. 引言

激光大气传输因与激光通信、激光武器、卫星遥感、光学雷达、远距测量等方面的应用有关而引起学者长期的研究兴趣<sup>[1,2]</sup>。因广义惠更斯 - 菲涅耳原理的应用, Rytov 位相结构函数平方近似和折射率起伏空间谱密度函数等的引入, 用解析或半解析方法对大气湍流中光传输的研究取得不少进展。Wolf 研究组对这一问题做了进一步研究与分析<sup>[3-5]</sup>。近年来, 激光束通过大气湍流的束宽扩展和角扩展成为研究热点<sup>[6-11]</sup>, 李晋红及其合作者比较研究了部分相干厄米双曲正弦高斯光束通过大气湍流光束扩展的问题, 分析了一般部分相干光在大气湍流中的角扩展和方向性<sup>[7,8]</sup>, Wang 和 Pu 对涡旋光束在大气湍流中的束宽扩展进行了研究<sup>[9]</sup>, Dou 及其合作者报道了部分相干环状光束在大气湍流中远场和近场扩展<sup>[10]</sup>, 郑宇龙和季小玲研究了大气湍流对多色高斯 - 谢尔模型光束扩展的影响, 指出源光谱带宽越大、光束截断参数和光束相干参数越小, 大气湍流对受光阑限制的多色 GSM 光束扩展的影响就越小<sup>[11]</sup>。在前述研究中, 广泛采用 Kolmogorov 功率谱模型描述大气湍流, 然而, 最近的实验研究表明: 在实际大气中, 并不是所有的大气湍流都能采用上述模型描述, 而且, 当光束沿着垂直方向传输时, 湍流展现出很强的非 Kolmogorov 特征<sup>[12,13]</sup>。Toselli 等利用广义指数和广义幅度因子, 引入了非 Kolmogorov 功率谱来描述大气湍流模型, 当指数  $\alpha = 11/3$  时, 该功率谱与 Kolmogorov 功率谱等价<sup>[13]</sup>。基于非 Kolmogorov 功率谱模型的光束传输研究表明, 光束在非 Kolmogorov 湍流中传输的特性不同于 Kolmogorov 湍流中的传输特性<sup>[14,15]</sup>。本文, 基于广义惠更斯 - 菲涅耳原理, 推导了部分相干厄米 - 高斯光束在非 Kolmogonov 湍流传输中束宽扩展的解析表达式。通过数值模拟, 研究了空间相干长度  $\sigma_0$ 、束腰宽度  $\omega_0$ 、光束阶数  $m, n$  和非 Kolmogonov 湍流广义指数参量  $\alpha$  对束宽扩展和方向性的影响, 并给出合

理的物理解释。

## 2. 理论模型

H-G 光束在入射面  $z = 0$  处的场分布为<sup>[8]</sup>

$$U(\mathbf{s}, z = 0) = H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}s_x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}s_y\right)\exp\left(-\frac{s_x^2 + s_y^2}{\omega_0^2}\right), \quad (1)$$

式中  $\omega_0$  为高斯部分的束腰宽度,  $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$  为  $z = 0$  面的二维位置矢量,  $H_m(\cdot)$ ,  $H_n(\cdot)$  分别为  $m$  和  $n$  阶厄米多项式。

引入谢尔相关项<sup>[16]</sup>, 由(1)式得到部分相干 H-G 光束在  $z = 0$  平面内的交叉谱密度函数为

$$W(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, z = 0) = H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}s_{1x}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}s_{1y}\right)\exp\left(-\frac{s_{1x}^2 + s_{1y}^2}{\omega_0^2}\right) \times H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}s_{2x}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}s_{2y}\right)\exp\left(-\frac{s_{2x}^2 + s_{2y}^2}{\omega_0^2}\right) \times \exp\left[-\frac{(s_{1x} - s_{2x})^2}{2\sigma_0^2}\right]\exp\left[-\frac{(s_{1y} - s_{2y})^2}{2\sigma_0^2}\right], \quad (2)$$

其中  $\sigma_0$  为部分相干 H-G 光束在  $z = 0$  平面的空间相关长度,  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  分别是  $z = 0$  平面两点坐标矢量。

根据广义的惠更斯 - 菲涅耳原理<sup>[2]</sup>, 部分相干 H-G 光束通过非 Kolmogorov 大气湍流传输的交叉谱密度函数为

$$W(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2\boldsymbol{\rho} \iint d^2\boldsymbol{\rho}' W(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, z = 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}\left[(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{s}_1)^2 - (\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{s}_2)^2\right]\right\} \times \left\langle \exp\left[\Psi(\mathbf{s}_1, \boldsymbol{\rho}) + \Psi^*(\mathbf{s}_2, \boldsymbol{\rho}')\right] \right\rangle, \quad (3)$$

式中  $\rho_1, \rho_2$  分别为传输中两点坐标矢量, \* 表示复共轭,  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $\lambda$  为波长;  $z$  为传播距离;  $\langle \exp[\Psi(s_1, \rho_1) + \Psi^*(s_2, \rho_2)] \rangle$  是湍流介质扰动而引起的相位起伏, 其表达式为

$$\begin{aligned} & \langle \exp[\Psi(s_1, \rho_1) + \Psi^*(s_2, \rho_2)] \rangle \\ &= \exp\left\{-4\pi^2 k^2 z \int_0^1 \int_0^\infty d\kappa d\xi \kappa \Phi_n(\kappa, \alpha)\right. \\ & \times \left[1 - J_0\left(k\left[(1-\xi)(\rho_1 - \rho_2) + \xi(s_1 - s_2)\right]\right)\right]\left.\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{\pi^2 k^2 z}{3} \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa, \alpha) d\kappa\right. \\ & \times \left[(\rho_1 - \rho_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)(s_1 - s_2) + (s_1 - s_2)^2\right]\left.\right\} \\ &= \exp\left\{-T(\alpha, z)\left[(\rho_1 - \rho_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)(s_1 - s_2)\right.\right. \\ & \quad \left.\left.+ (s_1 - s_2)^2\right]\right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$T(\alpha, z) = \frac{\pi^2 k^2 z}{3} \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa, \alpha) d\kappa, \quad (5)$$

式中  $J_0$  是零阶贝塞尔函数,  $\Phi_n(\kappa)$  为大气湍流的折射率起伏谱密度函数, 对非 Kolmogorov 谱来说,  $\Phi_n(\kappa)$ <sup>[17]</sup> 可表示为

$$\begin{aligned} \Phi_n(k, \alpha) &= A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\alpha/2}}, \\ & (0 \leq \kappa < \infty, 3 < \alpha < 4), \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $\kappa_0 = \frac{2\pi}{L_0}$ ,  $L_0$  为湍流的外尺度,  $\kappa_m = \frac{c(\alpha)}{l_0}$ ,  $l_0$  为湍流的内尺度,

$$c(\alpha) = \left[ \Gamma\left(\frac{5-\alpha}{2}\right) A(\alpha) \frac{2\pi}{3} \right]^{1/(\alpha-5)},$$

$\Gamma(\cdot)$  为伽马函数,

$$A(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \Gamma(\alpha-1) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$\alpha$  为广义指数参量,  $\tilde{C}_n^2$  是广义湍流折射率起伏结构参量, 单位是  $m^{3-\alpha}$ , 当  $\alpha = 11/3$  时,  $A(11/3) = 0.033$ ,  $\tilde{C}_n^2 = C_n^2$ , 即为常规的 Kolmogorov 谱。把(6)式代入(5)式可以得

$$\begin{aligned} T(\alpha, z) &= \frac{\pi^2 k^2 z}{6(\alpha-2)} A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \left\{ -2\kappa_0^{4-\alpha} + \exp\left(\frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) \kappa_m^{(2-\alpha)} \right. \\ & \times \left. \left[ (\alpha-2)\kappa_m^2 + 2\kappa_0^2 \right] \Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)表明大气湍流量  $T(\alpha, l_0, L_0)$  与内尺度  $l_0$ 、外尺度  $L_0$ 、指数  $\alpha$  有关,  $T(\alpha, l_0, L_0)$  值越大表明湍流越强。为了方便计算, 作坐标变换

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2}{2}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1, \end{aligned} \quad (8)$$

令(3)式中的  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , 将(2)式和(4)式代入到(3)式, 得到  $z$  处部分相干 H-G 光束通过非 Kolmogorov 大气湍流的平均光强表达式为

$$\begin{aligned} I(\rho, z) &= W(\rho, \rho, z) \\ &= \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2 u \iint d^2 v H_m \left[ \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \left( u_x + \frac{v_x}{2} \right) \right] \\ & \times H_n \left[ \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \left( u_y + \frac{v_y}{2} \right) \right] \\ & \times H_m \left[ \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \left( u_x - \frac{v_x}{2} \right) \right] H_n \left[ \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \left( u_y - \frac{v_y}{2} \right) \right] \exp\left(-\frac{2u^2}{\omega_0^2}\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{v^2}{\varepsilon^2}\right) \exp\left(-\frac{ik}{z} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right) \exp\left(\frac{ik}{z} \rho \cdot \mathbf{v}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2} + T(\alpha, z). \quad (10)$$

光束的均方根束宽定义为<sup>[3]</sup>

$$w(z) = \sqrt{\frac{\int \rho^2 I(\rho, z) d^2 \rho}{\int I(\rho, z) d^2 \rho}} = \sqrt{\frac{F}{F_0}}, \quad (11)$$

将(9)式代入(11)式, 利用积分公式<sup>[18]</sup>

$$\int \exp\left[-(x-y)^2\right] H_m(x) H_n(x) dx = 2^n \sqrt{\pi} m! y^{n-m} L_n^{n-m}(-2y^2), \quad (12)$$

$$\int \exp(-x^2) H_m(x+y) H_n(x+z) dx = 2^n \sqrt{\pi} m! z^{n-m} y^{n-m} L_n^{n-m}(-2yz), \quad (13)$$

和  $\delta$  函数的基本性质, 经积分得到  $F$  和  $F_0$  的表达式为

$$F_0 = \int I(\rho, z) d^2 \rho = 2^{m+n+1} m! n! \omega_0^2 \pi, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F &= \int \rho^2 I(\rho, z) d^2 \rho \\ &= -\frac{z^2}{k^2} 2^{m+n+1} m! n! \omega_0^2 \pi \left[ -\frac{\omega_0^2 k^2}{2z^2} (m+n+1) \right. \\ &\quad \left. -\frac{2}{\omega_0^2} (m+n+1) - \frac{2}{\sigma_0^2} - 4T(a, z) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

将(14)和(15)式代入(11)式, 得到部分相干 H-G 光束在非 Kolmogorov 大气湍流中的均方根束宽为

$$w(z)_{\text{turb}} = \left[ P_1 + P_2 z^2 + 4T(\alpha, z) \frac{z^2}{k^2} \right]^{1/2}, \quad (16)$$

其中

$$P_1 = \frac{\omega_0^2}{2} (m+n+1), \quad (17)$$

$$P_2 = \left[ \frac{2}{\sigma_0^2} + \frac{2}{\omega_0^2} (m+n+1) \right] k^{-2}. \quad (18)$$

(16)式右边的  $P_1$  和  $P_2 z^2$  项表示光束在自由空间衍射引起的束宽扩宽, 而第三项是由非 Kolmogorov 大气湍流引起的光束扩展, 第一项不随传播距离  $z$  变化, 第二项与传播距离  $z^2$  成正比, 第三项与传播距离  $z^3$  成正比。

当  $T(\alpha, z) = 0$  时, 由(16)式得到部分相干 H-G 光束在自由空间的束宽公式

$$w(z)_{\text{free}} = \left[ P_1 + P_2 z^2 \right]^{1/2}. \quad (19)$$

当  $z = 0$  时, 由(16)式得到部分相干 H-G 光束在光源平面处的束宽

$$w(0) = \sqrt{P_1}. \quad (20)$$

### 3. 厄米 - 高斯(H-G)光束在非 Kolmogorov 大气湍流中的束宽扩展

为了便于直观和定量描述光束抗拒非 Kolmogorov 大气湍流的能力, 我们引入相对束宽<sup>[19]</sup>, 相对束宽是指同一部分相干 H-G 光束在非 Kolmogorov 大气湍流中传输的束宽与在自由空间中传输的束宽之比, 即

$$\frac{w(z)_{\text{turb}}}{w(z)_{\text{free}}} = \sqrt{1 + \frac{4T(\alpha, z) k^{-2} z^2}{P_1 + P_2 z^2}}, \quad (21)$$

显然, 相对束宽  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}}$  越小, 光束扩展受非 Kolmogorov 大气湍流影响越小。

图 1 是在  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$  处部分相干 H-G 光束的相对束宽随空间相干长度  $\sigma_0$  的变化。其中  $\omega_0 = 0.03 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $\alpha = 3.5$ ,  $l_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $L_0 = 20 \text{ m}$ ,  $\tilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-3-\alpha}$ 。从图中我们可以看出, 随着空间相干长度  $\sigma_0$  的增大, 相对束宽增大, 也就是说, 空间相干长度  $\sigma_0$  越大, 部分相干 H-G 光束受非 Kolmogorov 大气湍流影响越大。

图 2 是在  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$  处部分

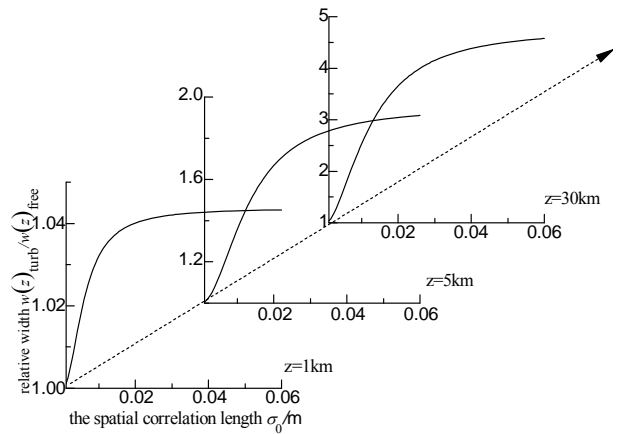


Figure 1. Relative width  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}}$  of partially coherent H-G beams versus spatial correlation length  $\sigma_0$ :  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$

图 1. 部分相干 H-G 光束在  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$  处相对束宽随空间相干长度  $\sigma_0$  的变化

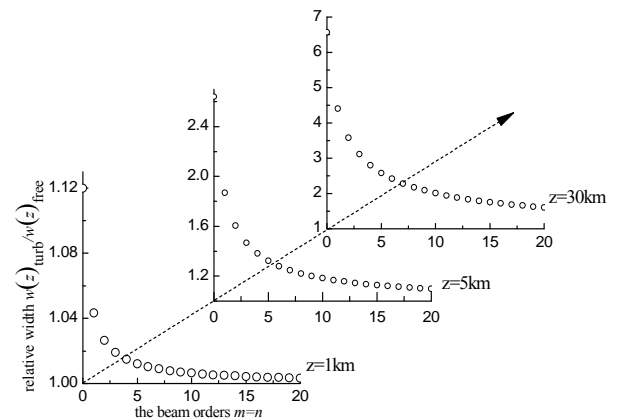


Figure 2. Relative width  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}}$  of partially coherent H-G beams versus the beam orders  $m, n$ :  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$

图 2. 部分相干 H-G 光束在  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$  处相对束宽随光束阶数  $m, n$  的变化

相干 H-G 光束的相对束宽随光束阶数  $m, n$  的变化。其中  $\omega_0 = 0.03 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $\alpha = 3.5$ ,  $l_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $L_0 = 20 \text{ m}$ ,  $\sigma_0 = 0.04 \text{ cm}$ ,  $\tilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^3\text{-}\alpha$ 。从图中我们可以看到, 相对束宽是随着  $m, n$  的增加而减小, 也就是说, 部分相干 H-G 光束受非 Kolmogorov 大气湍流的影响随光束阶数  $m, n$  的增加而减小。

图 3 是在  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$  处部分相干 H-G 光束的相对束宽随束腰宽度  $\omega_0$  的变化。其中  $\sigma_0 = 0.04 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $m = 1, n = 1, \alpha = 3.5$ ,  $l_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $L_0 = 20 \text{ m}$ ,  $\tilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^3\text{-}\alpha$ 。从图中我们可以看到, 当传播距离较小时(如  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ), 相对束宽随  $\omega_0$  的增加不是单调变化, 而是先增加后减小。物理原因是: 由于  $P_1$  是随  $\omega_0$  的增加而增大的,  $P_2z^2$  随  $\omega_0$  的增大而单调减小的, 相对束宽

$\sqrt{1 + \frac{4T(\alpha, z)k^{-2}z^2}{P_1 + P_2z^2}}$  由  $P_1$  和  $P_2z^2$  共同决定, 即, 相对束宽随  $\omega_0$  的增大先增加后减小。相对束宽受大气湍流影响最大时的  $\omega_0$  值是由

$$\frac{\partial}{\partial \omega_0} \left( \sqrt{1 + \frac{4T(\alpha, z)k^{-2}z^2}{P_1 + P_2z^2}} \right) = 0 \text{ 决定的。从图 3 可以看出, 在 } 1 \text{ km 和 } 5 \text{ km 处, 当束腰宽度 } \omega_0 \text{ 为 } 1.84 \text{ cm 和 } 4.1 \text{ cm 时相对束宽分别取得最大值 } 1.064, 1.972 \text{。当传播距离足够大时(如 } z \geq 30 \text{ km), 相对束宽随 } \omega_0 \text{ 的增加而增加, 原因是传播距离足够大时(如 } z \geq 30 \text{ km), } P_2z^2 \text{ 相对于 } P_1 \text{ 来说起主要作用, 相对束宽}$$

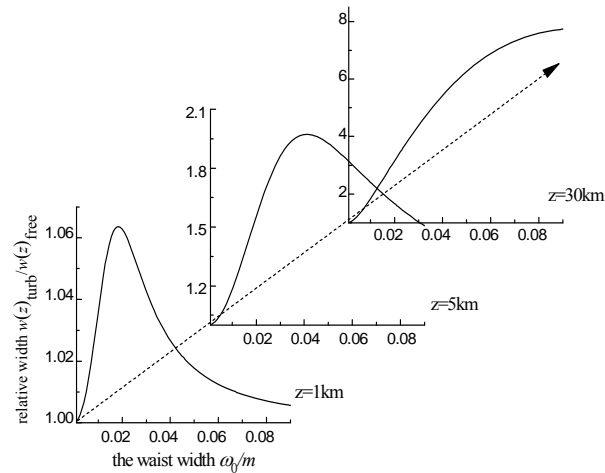


Figure 3. Relative width  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}}$  of partially coherent H-G beams versus the waist width  $\omega_0$ :  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$   
图 3. 部分相干 H-G 光束在  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$  处相对束宽随束腰宽度  $\omega_0$  的变化

$\sqrt{1 + \frac{4T(\alpha, z)k^{-2}z^2}{P_1 + P_2z^2}}$  主要由  $P_2z^2$  决定, 即, 相对束宽随  $\omega_0$  的增大而增大。传播距离足够远时, 束腰宽度  $\omega_0$  越小, 部分相干 H-G 光束受非 Kolmogorov 大气湍流影响越小。

图 4 是在  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$  处部分相干 H-G 光束的相对束宽随广义指数参量  $\alpha$  的变化。其中  $\sigma_0 = 0.04 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $m = 1, n = 1, \omega_0 = 0.03 \text{ cm}$ ,  $l_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $L_0 = 20 \text{ m}$ ,  $\tilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^3\text{-}\alpha$ 。我们从图中可以看出, 在  $3 < \alpha < 4$  范围, 在  $\alpha = 3.112$  处相对束宽达到最大值, 且与传输距离无关。其物理原因: 由式(21)和(7)可知, 随  $\alpha$  的增大相对束宽  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}}$  变化趋势与  $T(\alpha, z)$  变化趋势一致,  $T(\alpha, z)$  随  $\alpha$  增加先增大后减小, 由  $\frac{\partial T(\alpha, z)}{\partial \alpha} = 0$  得, 在  $\alpha = 3.112$  处  $T(\alpha, z)$  值最大。由此可见, 在传输过程中光束受大气湍流影响随广义指数参量  $\alpha$  增加先增大后减小。

#### 4. 部分相干 H-G 光束传播的方向性

依据[5,8]文献, 一个部分相干光束和完全相干高斯光束具有相同的角扩展, 这个光束被称为等效光束, 部分相干等效光束满足条件为

$$P = P_G, \quad (22)$$

$$P_G = \frac{2}{\omega_0^2 k^2} \text{ 为完全相干高斯光束的角扩展。}$$

由(16)式和角扩展<sup>[19]</sup>的定义得到部分相干 H-G 光

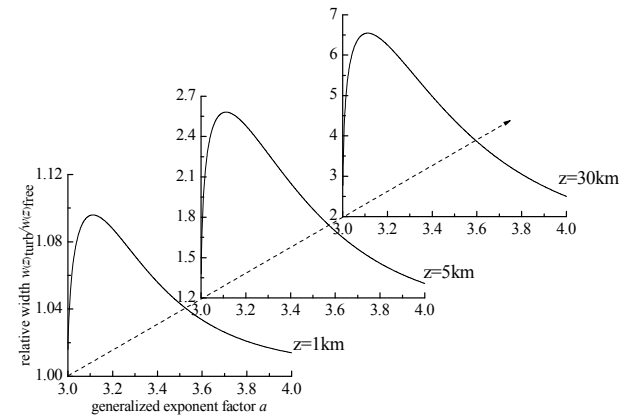


Figure 4. Relative width  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}}$  of partially coherent H-G beams versus generalized exponent factor  $\alpha$ :  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$   
图 4. 部分相干 H-G 光束在  $z = 1 \text{ km}$ ,  $z = 5 \text{ km}$ ,  $z = 30 \text{ km}$  处相对束宽随广义指数  $\alpha$  的变化

束在非 Kolmogorov 大气湍流中的角扩展公式

$$\theta_{sp} = \frac{w(z)}{z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = \sqrt{P_2 + 4T(\alpha, z)k^{-2}}, \quad (23)$$

(23)式说明部分相干 H-G 光束的角扩展不仅与光束参数  $m, n, \omega_0, \sigma_0$  决定, 而且还与大气湍流量  $T(\alpha, l_0, L_0)$  有关。

当  $m = n = 0$  时, 由(23)式得到 GSM 光束在非 Kolmogorov 大气湍流中的角扩展公式

$$\theta_{sp}(z) = \sqrt{P_3 + 4T(\alpha, z)k^{-2}}, \quad (24)$$

其中

$$P_3 = \left( \frac{2}{\omega_0^2} + \frac{2}{\sigma_0^2} \right) k^{-2}. \quad (25)$$

当  $\sigma_0 \rightarrow \infty$  时, 由(23)式得到完全相干的 H-G 光束在非 Kolmogorov 大气湍流中角扩展公式

$$\theta_{sp}(z) = \sqrt{P_4 + 4T(\alpha, z)k^{-2}}, \quad (26)$$

其中

$$P_4 = \frac{2(m+n+1)}{\omega_0^2 k^2}. \quad (27)$$

当  $m = n = 0, \sigma_0 \rightarrow \infty$  时, 由(23)式得到完全高斯光束在非 Kolmogorov 大气湍流中的角扩展公式

$$\theta_{sp}(z) = \sqrt{P_5 + 4T(\alpha, z)k^{-2}}, \quad (28)$$

其中

$$P_5 = \frac{2}{\omega_0^2 k^2}. \quad (29)$$

当  $P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_G$  时, 在自由空间和自由 Kolmogorov 大气湍流中部分相干 H-G 光束、完全相干 H-G 光束、GSM 光束与完全相干高斯光束有相同的角扩展, 因此, 这些光束被称作等效部分相干 H-G 光束、等效完全相干 H-G 光束、等效 GSM 光束。图 5 是等效光束在非 Kolmogorov 大气湍流和自由空间中均方根束宽随传播距离的变化规律。其中, a 代表等效的完全相干的高斯光束, b 代表等效的 GSM 光束, c 代表等效完全相干 H-G 光束, d 代表等效的部分相干的 H-G 光束,  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}, \alpha = 3.5, l_0 = 0.01 \text{ m}, L_0 = 20 \text{ m}, \tilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-3-\alpha}$ , 表 1 给出了其它计算参

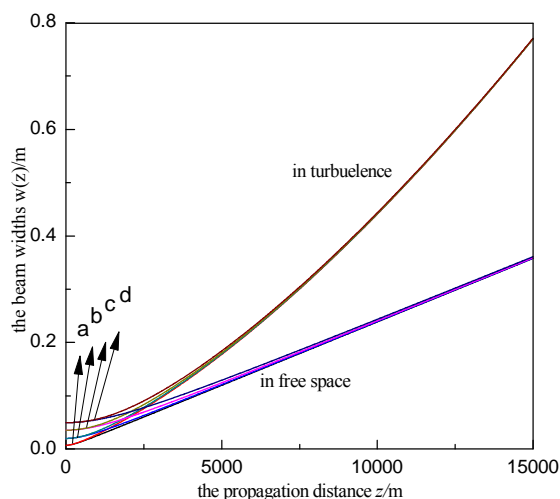


Figure 5. Beam width  $w(z)$  of equivalent fully coherent and partially coherent H-G, GSM beams and the corresponding fully coherent Gaussian laser beam as a function of the propagation distance

图 5. 等效的部分相干 H-G 光束, 等效 GSM 光束, 等效完全相干 H-G 光束与完全相干高斯光束束宽随传播距离  $z$  的变化

Table 1. Parameters relating to Figure 4

表 1. 图 4 中相关的参数

光束	$m$	$n$	$\omega_0/\text{cm}$	$\sigma_0/\text{cm}$
a 完全相干高斯光束	0	0	1	$\infty$
b 高斯谢尔模型光束	0	0	2.8	1.07
c 完全相干 H-G 光束	2	2	2.24	$\infty$
d 部分相干 H-G 光束	2	1	3.5	1.22

数值。在非 Kolmogorov 大气湍流和自由空间中, 选择适当的光束参数  $m, n, \omega_0, \sigma_0$ , 等效部分相干 H-G 光束、等效完全相干 H-G 光束、等效 GSM 光束与完全相干高斯光束具有相同的方向性。

## 5. 结论

本文以 H-G 光束为例, 对非 Kolmogorov 大气湍流中光束束宽扩展和方向性做了详细的研究, 与文献 [3,4,19] 不同, 本文中用相对束宽, 比较研究光束抗拒大气湍流影响的能力, 其主要优点是从相对束宽变化的曲线可直观和定量地比较, 光束参数变化时束宽受湍流影响的灵敏程度, 特别是相对束宽随光束参数非单调变化时, 使用相对束宽来研究问题更显示出其优点。数值计算和分析表明: 部分相干 H-G 光束较小的空间相干长度  $\sigma_0$ , 较大光束阶数  $m, n$ , 受非 Kolmogorov 大气湍流影响较小。在传播距离足够远时, 部分相干

H-G 光束较小的  $\omega_0$  受非 Kolmogorov 大气湍流的影响小。在  $3 < \alpha < 4$  范围内, 部分相干 H-G 光束受大气湍流广义指数参量  $\alpha$  增加先增大后减小, 在  $\alpha = 3.112$  处影响达到最大值, 且与传输距离无关。通过对等效光束的研究, 选择适当的光束参数  $m, n, \omega_0, \sigma_0$ , 等效部分相干 H-G 光束、等效完全相干的 H-G 光束, 等效 GSM 光束与完全相干的高斯光束具有相同的方向性。本文所得到的结论对存在非 Kolmogorov 结构大气湍流的自由空间光通信有潜在的应用价值。

## 6. 致谢

本论文感谢国家自然科学基金(61178067 和 11247278)项目的支持、感谢山西省青年科技研究基金(2012021016)的支持。

## 参考文献 (References)

- [1] V. I. Tatarskii. Wave propagation in a turbulent medium. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [2] L. C. Andrews, R. L. Phillips. Laser beam propagation through random media. Bellingham: SPIE Press, 1998.
- [3] G. Gbur, E. Wolf. Spreading of partially coherent beams in random media. Journal of the Optical Society of America A-Optics Image Science and Vision, 2002, 19(8): 1592-1598.
- [4] T. Shirai, A. Dogariu and E. Wolf. Mode analysis of spreading of partially coherent beams propagating through atmospheric turbulence. Journal of the Optical Society of America A-Optics Image Science and Vision, 2003, 20(6): 1094-1102.
- [5] T. Shirai, A. Dogariu and E. Wolf. Directionality of Gaussian Schell-model beams propagating in atmospheric turbulence. Optics Letters, 2003, 28(8): 610-612.
- [6] Y. J. Cai, S. L. He. Average intensity and spreading of an elliptical Gaussian beam propagating in a turbulent atmosphere. Optics Letters, 2006, 31(5): 568-570.
- [7] J. Li, A. Yang and B. Lü. Comparative study of the beam-width spreading of partially coherent Hermite-sinh-Gaussian beams in atmospheric turbulence. Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision, 2008, 25(1): 2670-2679.
- [8] J. Li, A. Yang and B. Lü. The angular spread and directionality of general partially coherent beams in atmospheric turbulence. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, 2008, 10(9): Article ID: 095003.
- [9] T. Wang, J. Pu and Z. Chen. Beam-spreading and topological charge of vortex beams propagating in a turbulent atmosphere. Optics Communications, 2009, 282(7): 1255-1259.
- [10] L. Dou, X. Ji and W. Zhu. Near-field and far-field spreading of partially coherent annular beams propagating through atmospheric turbulence. Applied Physics B: Lasers and Optics, 2012, 108(1): 217-229.
- [11] 郑宇龙, 季小玲. 大气湍流对多色高斯 - 谢尔模型光束扩展的影响[J]. 强激光与粒子束, 2012, 24: 276-280.
- [12] A. Zilberman, E. Golbraikh, N. S. Kopeika, A. Virtser, I. Kupersmidt and Y. Shtemler. Lidar study of aerosol turbulence characteristics in the troposphere: Kolmogorov and non-Kolmogorov turbulence. Atmospheric Research, 2008, 88: 66-77.
- [13] I. Toselli, L. C. Andrews, R. L. Phillips and V. Ferrero. Free space optical system performance for laser beam propagation through non Kolmogorov turbulence for uplink and downlink paths. Proceedings of the SPIE, 2007, 6708: Article ID: 670803.
- [14] O. Korotkova, E. Shchepakina. Color changes in stochastic light fields propagating in non-Kolmogorov turbulence. Optics Letters, 2010, 35(22): 3772-3774.
- [15] H. Xu, Z. Cui and J. Qu. Propagation of elegant Laguerre-Gaussian beam in non-Kolmogorov turbulence. Optics Express, 2011, 19(22): 21163-21173.
- [16] M. Zahid, M. S. Zubairy. Directionality of partially coherent Bessel-Gauss beams. Optics Communications, 1989, 70(5): 361-364.
- [17] P. Zhou, X. Wang, Y. Ma, R. Tao and Z. Liu. Average spreading and directionality of broadband partially coherent beam in non-Kolmogorov turbulence. Applied Physics B: Lasers and Optics, 2011, 104(4): 1013-1017.
- [18] I. S. Gradyteyn, I. M. Ryzhik. Table of integrals, series, and products. New York: Academic Press, 2007: 803-804.
- [19] M. Salem, T. Shirai, A. Dogariu and E. Wolf. Long-distance propagation of partially coherent beams through atmospheric turbulence. Optics Communications, 2003, 216(4-6): 261-265.