

# Formation Principle and Influence Factors of the Force Required to Separate Two Sheets of Glass with a Thin Layer of Water between Them

Xinyang Su, Fang Lin\*

College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu Sichuan  
Email: [linfang@scu.edu.cn](mailto:linfang@scu.edu.cn)

Received: Apr. 6<sup>th</sup>, 2017; accepted: Apr. 18<sup>th</sup>, 2017; published: Apr. 24<sup>th</sup>, 2017

---

## Abstract

Put a thin layer of water between two sheets of glass and try to separate them, it could be found that the force required was much larger than the one when the water layer did not exist. Based on the effect of atmosphere and surface tension, the formula for the pulling force required was derived and obtained, which has come to a conclusion that the force would mainly depend on the surface tension coefficient between water and glass, the area of water layer, and the curvatures of the water layer's edge. Furthermore, experiments were executed to verify the correctness of theory and investigate the influence of the volume of water as well as the glass material.

## Keywords

Glasses with a Layer of Water, Separation, Surface Tension, Pressure Difference

---

# 分离夹层有水玻璃所需较大拉力的产生原理与影响因素

苏鑫杨, 林方\*

四川大学物理科学与技术学院, 四川 成都  
Email: [linfang@scu.edu.cn](mailto:linfang@scu.edu.cn)

收稿日期: 2017年4月6日; 录用日期: 2017年4月18日; 发布日期: 2017年4月24日

---

\*通讯作者。

## 摘要

两块玻璃之间夹有一层薄薄的水并紧贴在一起,则需要用较大的力才能将两者分离,此拉力远大于分离干燥玻璃所需拉力。本文分析了夹层有水玻璃的受力情况,从大气压与表面张力的角度推导出分离玻璃所需拉力的理论表达式,得出拉力主要取决于水与玻璃间表面张力系数、水层面积以及边缘液面曲率半径的结论,并进行了实验验证。最后,本文还对分离拉力与夹层水量、玻璃材质等影响因素的关系进行了实验探究。

## 关键词

夹层有水玻璃, 分离, 表面张力, 压强差

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

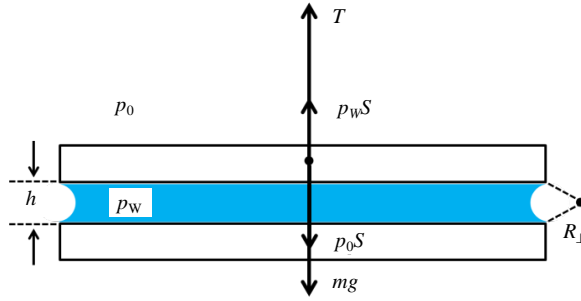
## 1. 引言

贴合在一起的两块干燥玻璃片很容易被分离;然而如果玻璃片之间夹有一层薄薄的水,拉开它们将变得十分困难。当固体片层之间存在液体,液体将对固体表面产生显著的粘附作用,该类问题从20世纪80年代开始被广泛研究。1985年,H. K. Christenson等人对分离浸泡于乙二醇中的两块光滑云母片所需拉力进行了测量,给出了该力学系统的分离函数[1]。1989年,R. G. Horn等人将两块二氧化硅片浸入氯化钠溶液,测量并研究了液膜的粘度及其表面力(surface force) [2]。1994年,H. Yoshizawa和J. Israelachvili采用正十四烷与光滑云母片进行实验,对光滑云母片间厚度为分子数量级的液膜进行了法向力(粘附力)与横向力(摩擦力、剪切力)的测量,发现其与云母表面分子振荡以及液膜分子排列有关[3]。2007年,M. P. de Boer对液体与弹性硬质粗糙固体表面间的粘附力进行建模,探究了其与其外界蒸汽压的关系,并选用多晶硅与水进行实验验证[4]。2008年,P. Lambert等人通过能量方法与静力学方法分别对液体在固体表面约束下形成的凹液面形状进行研究,并证明了两种方法的等效性[5]。2012年,A. Marchand等人分析了弹性耦合平均场模型中的分子相互作用,建立了软毛细管模型以描述柔软固体因浸润而发生的形变[6]。2014年,曾鹏和王伟民进行了玻璃片与水层的分离实验,证明了分子引力并非两者之间附着力的主要成分[7]。目前,液体对固体片层产生巨大粘附作用的现象已受到研究者的关注,然而针对玻璃片通过水的薄夹层相互粘附这一生活中极为常见的现象进行的研究仍然较少。该系统的物理机制对研究其他液体与固体的粘附效应具备参考价值,因此具有一定的研究意义。与该现象有关的问题亦出现在2017年第30届国际青年物理学家锦标赛(the 30<sup>th</sup> International Young Physicists' Tournament)上[8]。

本文主要包括以下内容: 1) 从拉普拉斯公式出发推导水层压强与外界压强的关系,并通过受力平衡方程探究玻璃片与水层的力学状态,得到了当水铺满玻璃夹层时的最小分离拉力; 2) 设计实验,对最小分离拉力的理论表达式进行定量验证; 3) 实验探究分离拉力与夹层水量、玻璃材质等影响因素的关系。

## 2. 理论分析

两块玻璃片之间夹有一层薄薄的水,由于水与玻璃浸润,充分施压后可认为水层与玻璃紧密接触(之间没有空气层),如图1所示。记水层内部压强为 $p_w$ ,大气压强为 $p_0$ ,玻璃片面积为 $S$ ,水层厚度为 $h$ 。



**Figure 1.** Schematic diagram of the system studied and force analysis of the upper glass

**图 1.** 系统示意图及上层玻璃片的受力分析

未施加拉力的初始状态下, 水层边缘与空气之间的开放接触面(下称“边缘液面”)与竖直线交线的曲率半径为  $R_{\perp}$ , 与水平面交线的曲率半径为  $R_{\parallel}$ 。使用吸盘挂钩附着于上层玻璃片对其施加拉力并试图将两玻璃片分离, 不考虑玻璃片受力之后发生的微小形变, 上层玻璃片的受力分析如图 1 所示。

对于任意弯曲液面, 表面张力将导致液面内外产生压强差, 其满足拉普拉斯公式[9]:

$$\Delta p_{\sigma} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

$R_1$ 、 $R_2$  为液面上相互正交于考察点的任意两条曲线的曲率半径。对于边缘液面, 压强差为:

$$\Delta p_{\sigma} = \sigma \left( \frac{1}{R_{\parallel}} + \frac{1}{R_{\perp}} \right). \quad (2)$$

边缘液面在水层内部压强、大气压强与表面张力产生的附加压强下受力平衡, 即满足等式:

$$\Delta p_{\sigma} = \sigma \left( \frac{1}{R_{\parallel}} + \frac{1}{R_{\perp}} \right) = p_0 - p_w. \quad (3)$$

由伯努利原理可知, 薄水层处于静态时内部压强处处相等[10], 因此, 上层玻璃片的受力平衡方程为:

$$T + p_w S = mg + p_0 S, \quad (4)$$

式中,  $T$  为通过挂钩施加于上层玻璃片的拉力,  $mg$  为上层玻璃片及挂钩所受重力之和。联立式(3), (4) 得到平衡时拉力为:

$$T = \sigma S \left( \frac{1}{R_{\parallel}} + \frac{1}{R_{\perp}} \right) + mg. \quad (5)$$

首先讨论水层面积等于玻璃面积的情况, 由于实验选取的玻璃片形状为矩形, 此时水层边缘呈直线, 即水平曲率半径  $R_{\parallel}$  为无穷大, 此时拉力为:

$$T = \frac{\sigma S}{R_{\perp}} + mg. \quad (6)$$

假设初始时玻璃片与水层相互贴紧, 此时水层边缘液面外凸呈半圆形且刚好不会溢出, 曲率半径  $R_{\perp} = -\frac{h}{2}$ ; 逐渐施加拉力, 由平衡方程(6)可知竖直曲率半径  $R_{\perp}$  逐渐减小, 即边缘液面从外凸逐渐内凹, 曲率半径  $R_{\perp}$  将从  $-\frac{h}{2}$  减小为负无穷(此时  $T = mg$ , 边缘液面呈竖直平面), 再从正无穷减小为  $\frac{h}{2}$  (此时边

缘液面呈内凹半圆形)。假设玻璃片为正方形且边长为  $L$ ，可以估算得边缘液面内凹经过的空间体积为  $4L \cdot \pi R_{\perp}^2$ ；而水层的总体积为  $2R_{\perp} \cdot L^2$ ，故液面内凹经过的空间范围占总水量的  $2\pi R_{\perp}/L$ 。由于实验选用的玻璃片边缘都大于 40 mm，而水层厚度不足 0.2 mm，即体积占比不超过 2%，故可认为水层厚度在边缘液面内凹过程中保持不变。当水层表面曲率半径减小到水层厚度的一半，即  $\frac{h}{2}$  时将达到最小值，此时若继续增大拉力，玻璃片将彼此分离。

如果水层面积小于玻璃面积，由于水层形状不确定，导致其边缘液面在水平方向的曲率半径处处不同，此时公式(5)无解析式；同时，当水没有铺满玻璃片时，逐渐增大拉力  $T$  的同时可以观察到水层面积有一定程度缩小，公式(5)中的面积不再是常数，情况较为复杂。相比之下，如果水层面积等于玻璃面积且玻璃形状较为规整，拉开玻璃的过程中水层面积没有变化，同时边缘液面的水平曲率半径和竖直曲率半径都可以较容易求得，此时最小分离拉力可以通过式(5)进行预测。

综上，对于水层面积等于玻璃面积且玻璃为矩形的情况，所需分离拉力由式(6)决定，下文将其进行实验验证与讨论；而水层面积小于玻璃面积的情况，本文无法通过理论模型给出适用的分离拉力预测公式，但仍然可以通过实验得到一些规律和结论。

### 3. 实验探究

#### 3.1. 验证水铺满玻璃夹层时的最小分离拉力公式

实验具体操作流程如下：

- 1) 使用胶头滴管往下层玻璃片表面加足量的水，将安装有挂钩的上层玻璃片轻放于水面上；
- 2) 将质量为 1.67 kg 的重物置于玻璃片上，持续 20 秒，从而使夹层内气泡尽可能地排出，玻璃片和水层尽可能地相互贴紧；
- 3) 用纸巾轻轻地将玻璃夹层以外的水吸干，使水刚好铺满整个玻璃夹层；
- 4) 移除重物，用电子测力计连接挂钩，在竖直方向上逐渐增大拉力直到玻璃片被拉开，此时电子测力计将记录该过程的最大拉力，及分离玻璃片所需拉力。

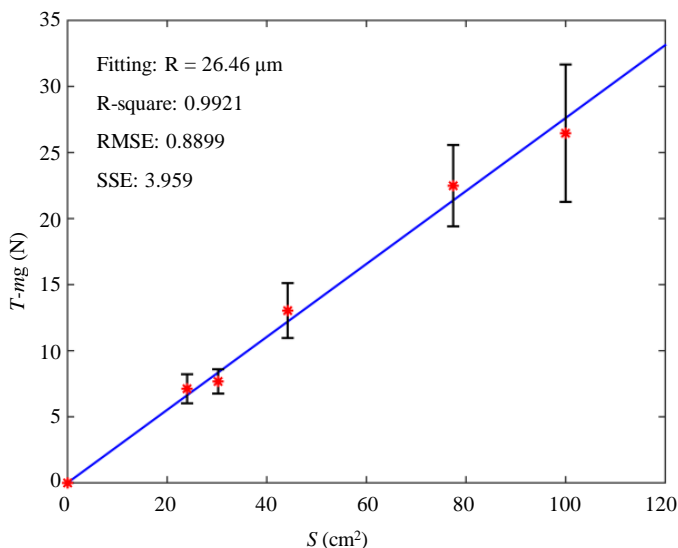
实验采用面积分别为 49 mm × 49 mm、55 mm × 55 mm、65 mm × 68 mm、87 mm × 89 mm 和 100 mm × 100 mm 的玻璃片，玻璃片与挂钩总质量依次为 40.9 g、44.4 g、68.4 g、92.6 g 和 114.2 g，按照上述操作进行分离拉力测量，每组实验重复 12 次以减少误差。由于重物质量比玻璃片和挂钩的总质量大 15 倍以上，因此每组实验都可以认为重物将玻璃片与水层压至相同的极限厚度  $h$ 。由式(6)可知，尽管玻璃片具有不同的质量与面积，但分离拉力与玻璃片的重力之差  $T - mg$  应始终正比于玻璃片面积  $S$ ，比例系数  $2\sigma/h$  为常数。因此，以玻璃片面积  $S$  为横坐标，分离拉力与玻璃片的重力差  $T - mg$  为纵坐标，将数据按照正比例函数进行拟合，拟合结果如图 2 所示。

由图 2 可以发现，实验测量数据点分布在一条过坐标原点的直线上，拟合线性相关系数为 0.9921，具有很好的线性关系。因此理论模型得以验证，即当水铺满整个矩形玻璃夹层时，分离玻璃所需最小拉力可通过式(6)进行预测。

实验中还发现，不同系统参量(如水量、玻璃材质等)对最小分离拉力有不同的影响，下文将通过实验探究不同参量的作用。

#### 3.2. 夹层水量对分离拉力的影响

如前文所述，当水层面积小于玻璃面积时，无法通过式(5)求得分离拉力的理论值，但仍可通过实验探究夹层水量对分离拉力的影响。选取 65 mm × 68 mm 的玻璃片，利用胶头滴管逐渐改变玻璃夹层的水



**Figure 2.** When water fully covered the interlayer, the separation force was proportional to the area of glass

**图 2.** 水铺满玻璃夹层时, 分离拉力与玻璃面积成正比

量, 每次测量之前仍使用 1.67 kg 的重物施压 20 秒。由于水层在玻璃板之间的形状具有随机性, 几乎不可能复现相同的形状(仅可通过控制水量复现相同的面积), 因此每组数据仅测量 1 次, 实验结果如图 3 所示。

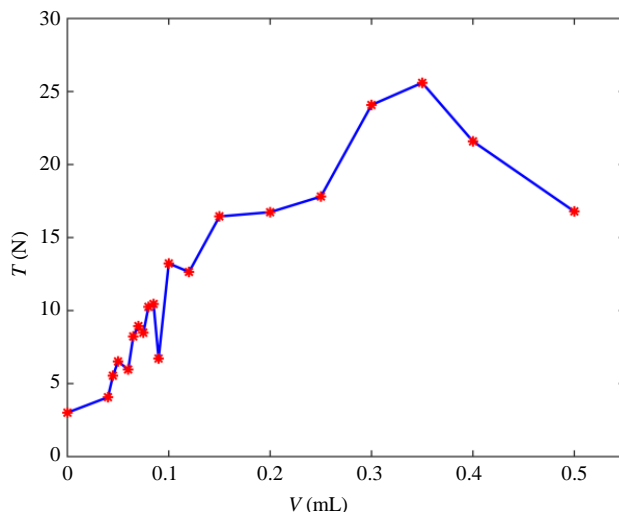
随着水量逐渐增大直至刚好铺满玻璃夹层(0~0.35 mL), 分离拉力逐渐上升; 当水刚好完全铺满整个玻璃夹层时, 分离拉力最大; 继续增大水量(仍铺满夹层, 但水层厚度增大), 分离拉力出现下降趋势。当水未铺满玻璃夹层时, 可视为水层厚度不变而水层面积随水量增加而增大, 由式(5)可知最小分离拉力亦将增大, 即曲线的上升部分; 当水铺满玻璃夹层后, 水层厚度将随水量的增加而增大, 此时水层边缘的竖直曲率半径也会增大, 由式(6)可知最小分离拉力将减小, 即曲线的下降部分。

玻璃与水层分离瞬间, 由公式(5)可知, 分离拉力与水层面积  $S$ 、水层边缘曲率半径  $R_{\parallel}$ 、 $R_{\perp}$  有关。图 2 拟合得到分离瞬间边缘液面的竖直曲率半径为 26.46  $\mu\text{m}$ , 即数量级为  $10^{-5}$  m。实验中, 当水未铺满玻璃夹层时, 可观察到水层平面呈不规则图形, 但边缘依然为光滑曲线, 可估算边缘各处水平曲率半径不小于 1 mm, 即数量级为  $10^{-3}$  m。由此可见,  $\frac{1}{R_{\parallel}}$  比  $\frac{1}{R_{\perp}}$  小两个数量级以上, 由式(5)可知, 水层形状对分离拉力的影响远小于水层面积和厚度, 因此可以被忽略。

### 3.3. 初始施压对分离拉力的影响

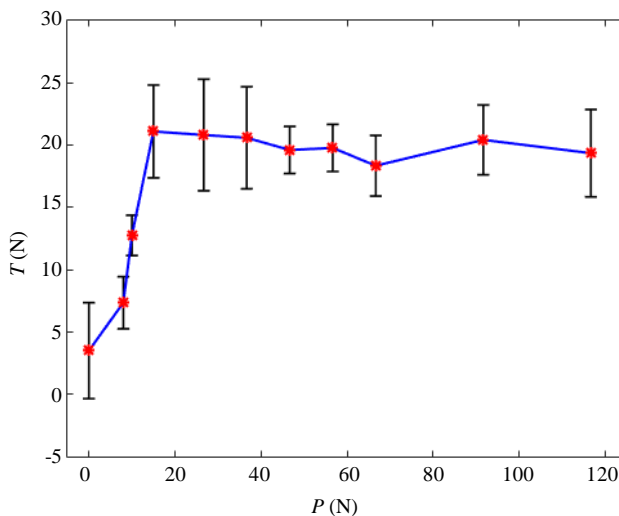
如前文所述, 对玻璃片施加压力可以使玻璃片与水层充分地贴合并排出部分气泡, 因此施压大小不同会影响水层厚度从而对分离拉力产生影响。选用 87 mm  $\times$  89 mm 的玻璃片, 让水铺满玻璃夹层; 在原有 1.67 kg 重物的基础上, 分别使用推力计对重物附加 0 N、10 N、20 N、30 N、40 N、50 N、75 N 和 100 N 的压力, 持续 20 秒; 每组分分离拉力测量 6 次, 实验结果如图 4 所示。

随着初始施压大小的增加, 最小分离拉力先逐渐增大, 然后基本稳定于一个定值。究其原因, 随着附加施压增大水层厚度减小, 由式(6)可知分离拉力将增大; 当附加施压达到 20 N 时, 水层已被压缩到极限值, 所以分离拉力趋于稳定。初始施压大小对玻璃片贴合度、水层中气泡量等因素存在影响, 但由于实验条件的限制, 本文无法对其定量关系进行分析。



**Figure 3.** The relationship between the separation force and the amount of water in glass interlayer

**图 3.** 分离拉力与玻璃夹层中水量的关系



**Figure 4.** The relationship between separation force and the initial pressure on the upper glass

**图 4.** 分离拉力与初始施压的关系

### 3.4. 玻璃材质对分离拉力的影响

选用 50 mm × 50 mm、100 mm × 100 mm 的有机玻璃(亚克力板)与 49 mm × 49 mm、87 mm × 89 mm 的普通玻璃, 将水铺满玻璃夹层并使用 1.67 kg 的重物施压 20 秒, 移除重物后测量分离拉力, 每组数据测量 6 次。实验结果如表 1 所示, 表中质量为上层玻璃与挂钩的总质量。

对前 3 个实验组分别计算  $\frac{T - mg}{S}$  值, 依次可得: 0.297 N/cm<sup>2</sup>、0.318 N/cm<sup>2</sup>、0.307 N/cm<sup>2</sup>; 可见 3 个数值几乎相等, 由此可以判断, 水与两种材料的浸润情况基本相同, 即表面张力系数  $\sigma$  基本相等。然而对于 100 mm × 100 mm 的有机玻璃, 在测力计量程范围内都无法将玻璃片分离, 即分离拉力大于 300 N, 情况较为特殊。对此可做定性分析: 有机玻璃材质较为柔软, 当通过吸盘挂钩在其中央区域施加拉力时,

**Table 1.** The relationship between separation force and glass material  
**表 1.** 分离拉力与玻璃材质的关系

实验组号	玻璃类型	面积 $S$ (mm <sup>2</sup> )	质量 $m$ (g)	拉力平均值 $T$ (N)	A 类不确定度(N)
1	普通玻璃	49 × 49	40.9	7.52	1.10
2	普通玻璃	87 × 89	92.6	25.55	1.12
3	有机玻璃	50 × 50	22.0	7.89	1.94
4	有机玻璃	100 × 100	42.8	超出量程	超出量程

有机玻璃片会发生明显形变，玻璃片之间的空间不再保持平整，而是形成中心厚、边缘薄的夹层；随着拉力增大，中央部分首先分离，但由于周围区域被水密封，空气不能进入中央区域进行补充，从而在玻璃片夹层中央部分形成一个气压远低于大气压的空洞，形成吸盘效应。不难估算，当低压区面积为玻璃片总面积的三分之一时，大气压产生的附加压力可以达到 333 N，超出了测力计最大量程 300 N，因此在测力计量程范围内无法将玻璃片分离。

#### 4. 总结

本文从大气压与表面张力的角度出发，利用拉普拉斯公式建立了夹层有水玻璃片的受力平衡方程，推导得到水铺满玻璃夹层时最小分离拉力的理论表达式，并进行了实验验证。此外，本文还实验探究了夹层水量、初始施压大小以及玻璃材质对最小分离拉力的影响，在本文的实验操作条件下得到以下结论：1) 当水未铺满夹层时，最小分离拉力与水量呈正相关；当水刚好铺满夹层时分离拉力达到最大值，随后与水量呈负相关；2) 随着初始施压的增大，分离拉力先增大，然后趋于稳定值；3) 由于力学结构的差异，不同材质在分离过程中的形变程度不同，较为柔软的材质将发生较大形变，所需分离拉力受吸盘效应影响将显著增大，此时本文提出的理论不再适用。此外，当水未铺满玻璃夹层时，水层边缘形状不规则，且在玻璃片分离过程中可观察到水层面积有明显的缩小，情况极为复杂，有待进一步深入研究。

#### 参考文献 (References)

- [1] Christenson, H.K. and Horn, R.G. (1985) Forces between Mica surfaces in Ethylene Glycol. *Journal of Colloid & Interface Science*, **103**, 50-55.
- [2] Horn, R.G., Smith, D.T. and Haller, W. (1989) Surface Forces and Viscosity of Water Measured between Silica Sheets. *Chemical Physics Letters*, **162**, 404-408.
- [3] Yoshizawa, H. and Israelachvili, J. (1994) Relation between Adhesion and Friction Forces across Thin Films. *Thin Solid Films*, **246**, 71-76.
- [4] de Boer, M.P. (2007) Capillary Adhesion between Elastically Hard Rough Surfaces. *Experimental Mechanics*, **47**, 171-183, <https://doi.org/10.1007/s11340-006-0631-z>
- [5] Lambert, P., Chau, A., Delchambre, A., et al. (2008) Comparison between Two Capillary Forces Models. *Langmuir*, **24**, 3157-3163. <https://doi.org/10.1021/la7036444>
- [6] Marchand, A., Das, S., Snoeijer, J.H., et al. (2012) Contact Angles on a Soft Solid: From Young's Law to Neumann's Law. *Physical Review Letters*, **109**, Article ID: 236101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.236101>
- [7] 曾鹏, 王伟民. 夹层有水玻璃难分开的主要原因不是分子引力[M]. 物理教师, 2014, 35(9): 60-60.
- [8] Problems of IYPT. <http://archive.iypt.org/problems/>
- [9] 李椿, 章立源, 钱尚武. 热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [10] 吴望一. 流体力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2015.

**期刊投稿者将享受如下服务：**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[app@hanspub.org](mailto:app@hanspub.org)