

The Distribution of Inductive Charge on the Plane of a Conductor under a Charged Thin Ring

Qili Liao, Yan Yu, Ya Deng, Guoya Xie, Zhufeng Zhang

College of Mobile Telecommunications, Chongqing University of Posts and Telecom, Chongqing
Email: xiaosueer@163.com

Received: May 4th, 2018; accepted: May 17th, 2018; published: May 24th, 2018

Abstract

Based on the mirror image method of the electromagnetism, the induced charged surface density distribution on the grounding infinite conductor plane under the uniform charged thin ring is calculated with mathematical software. And it draws the images of the induced charge surface density varied with the angle and distance.

Keywords

Charged Surface Density Distribution, Grounding Infinite Conductor Plane, Uniform Charged Thin Ring, Mathematica

带电细圆环作用下导体平面上感应电荷的分布

廖其力, 余艳, 邓娅, 谢国亚, 张珠峰

重庆邮电大学移通学院, 重庆
Email: xiaosueer@163.com

收稿日期: 2018年5月4日; 录用日期: 2018年5月17日; 发布日期: 2018年5月24日

摘要

本文基于电磁学理论中的镜像法、利用Mathematica数学软件在笛卡尔直角坐标系中计算了均匀带电细圆环作用下接地无限大导体平面上的感应电荷面密度分布, 并绘出感应电荷面密度随角度和距离变化的图像。

关键词

电荷面密度分布, 接地无限大导体平面, 均匀带电细圆环, Mathematica

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

当导体在外界电场作用下处于静电平衡时, 其表面产生的感应电荷分布是复杂的[1] [2] [3], 大多数情况下只能由实验给出定性描述, 但当导体具有规则形状时, 比如无限大接地导体平面、导体球(或导体球壳), 就可作定量计算。在文献[4] [5]中我们首次将点电荷的镜像法原理[3]应用于连续带电体研究了带电细圆环与无限大导体平面的作用力和电势, 及带电线状体与导体平面和导体球的作用力和电势等电磁学问题。本文利用电磁场理论中的镜像法[3], 运用电场的叠加原理和 Mathematica 数学软件[6] [7] [8] [9], 计算均匀带电细圆环作用下接地无限大导体平面上的感应负电荷在导体平面上的分布, 并绘出了导体平面上感应负电荷的电荷面密度所随角度和距离变化的图像。在静电平衡时, 当确知导体平面上任一点的电荷的分布规律, 其电场强度由 $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$ 就可确定。下面分二种情况计算导体平面上的感应负电荷的电荷面密度分布。

2. 带电细圆环与导体平面平行时的感应负电荷的分布

如图 1(a)所示, 当带电细圆环与接地无限大导体平面平行, 既细圆环所在平面与导体平面的法线夹角 $\alpha = \pi/2$, 设均匀带电细圆环带电为正 q , 圆环半径为 R , 环心到平面的距离为 d 。设环心为坐标系的原点 o , 垂直指向导体平面为 x 轴的正方向, x 、 y 、 z 轴满足右手螺旋系。当导体平面处于静电平衡时, 按电磁理论中的镜像法[3] [4] [5], 该均匀带电圆环在导体平面上产生的感应负电荷在导体平面左侧空间(包括导体表面)产生的作用效果(力学的、电磁学的)等效于该均匀带电圆环经导体平面成像于平面右侧处的均匀带负电圆环 $-q$ 在导体平面左侧空间产生的作用效果。在带电圆环上任一点 $p_1(0, R \cos \phi, R \sin \phi)$ 处取微元电荷 dq , 其中 $\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$ 是点 p_1 与坐标原点 o 的连线与 y 轴正方向的夹角。过 p_1 作导体平面的垂线交导体平面于 $p_2(d, R \cos \phi, R \sin \phi)$, 由于导体平面上的电荷面密度 σ 分布具有关于 x 轴的轴对称性, 故可在 xoy 所决定的平面与导体平面的交线(与 y 轴平行)上任取一点 $p(d, d \tan \theta, 0)$, 其中 $\theta(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ 是 op 连线与 x 轴正方向的夹角, 称其为极角。则该微元电荷 dq 在 p 点处产生的感应电荷面密度 σ 大小为[2] [3] [4]

$$d\sigma = \frac{dq \cos^3 \beta}{2\pi d^2} \quad (1)$$

其中 β 角是位矢 $\mathbf{p}_1\mathbf{p} = d\hat{i} + (d \tan \theta - R \cos \phi)\hat{j} - R \sin \phi\hat{k}$ 和 $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 = d\hat{i}$ 的夹角, 这里的 \hat{i} 、 \hat{j} 、 \hat{k} 分别是 x 、 y 、 z 轴正方向的单位矢, 角 β 的余弦值 $\cos \beta$ 由解析几何有:

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1\mathbf{p}}{|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_1\mathbf{p}|} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + (d \tan \theta - R \cos \phi)^2 + (R \sin \phi)^2}} \quad (2)$$

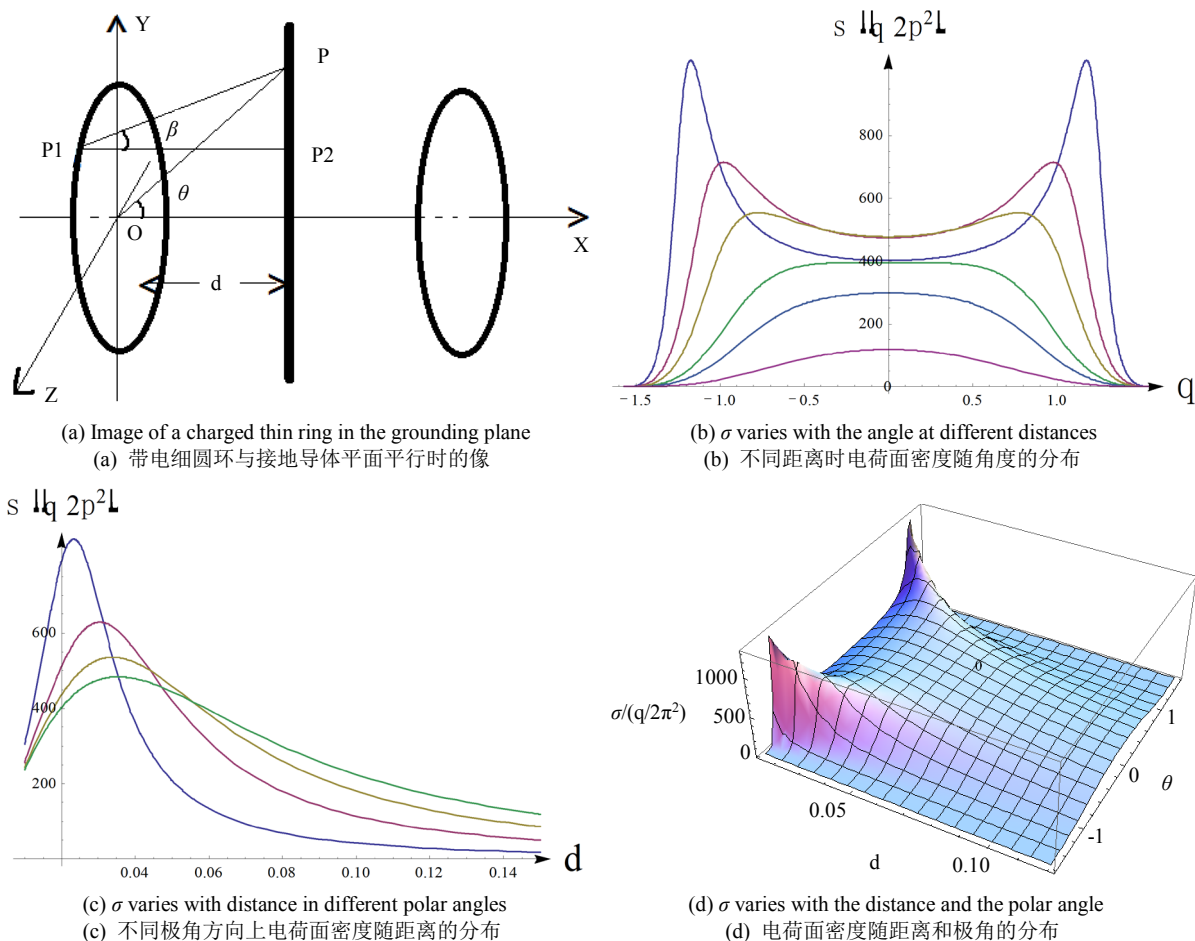


Figure 1. Charge distribution on the plane of ground conductor under the action of a charged thin ring
图 1. 带电细圆环与接地导体平面平行时的电荷分布

将(2)式代入(1)式化为:

$$d\sigma = \frac{q}{4\pi^2} \frac{d}{r^3} d\phi \tag{3}$$

其中 $r = |\mathbf{op}| = \sqrt{d^2 \sec^2 \theta + R^2 - 2Rd \tan \theta \cos \phi}$, 令 $A = d^2 \sec^2 \theta + R^2$ 、 $D = 2Rd \tan \theta$, 再对(3)式中的变量 ϕ 积分可得导体平面上感应负电荷面密度 σ 大小为:

$$\sigma = \frac{qd}{2\pi^2} \left[\frac{E\left(\frac{2D}{A+D}\right)}{(A-D)\sqrt{A+D}} + \frac{E\left(\frac{2D}{A-D}\right)}{(A+D)\sqrt{A-D}} \right] \tag{4}$$

其中 $E[x] = \text{EllipticE}[x]$ 是第二类完全椭圆积分函数, $E[x] = E\left(\frac{\pi}{2} | x \right)$, 其定义为

$E(\phi|x) = \int_0^\phi (1 - x \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta$ 。当导体平面处于静电平衡时, 其上任一点的电场强度由 $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$ 就可确定。

为了直观形象反映导体平面上的感应负电荷面密度 σ 的分布规律, 图 1(b)~(d) 给出了在带电细圆环作用下, 接地无限大导体平面处于静电平衡时其表面上产生的感应负电荷面密度 σ 随极角、距离变化而

变化的分布图像, 图中带电细圆环半径取值 $R = 0.05 \text{ m}$ 。图 1(b) 中的 6 条图线是带电细圆环的环心到导体平面的不同距离, 且在导体平面处于静电平衡时, 其表面上的感应电荷面密度 σ 分布随极角 θ 变化而变化的图像, 在第一象限内从右到左的这 6 条图线分别对应于细圆环的圆心到导体平面的距离 $d = 0.02 \text{ m}$ 、 0.03 m 、 0.04 m 、 0.06 m 、 0.08 m 、 0.15 m ; 图 1(c) 中电荷面密度 σ 在不同极角时随距离变化而变化的图像, 图中这 4 条图线在第二象限内自上而下分别对应于极角 $\theta = \pi/3, \pi/4, \pi/6, 0$; 图 1(d) 中电荷面密度 σ 随距离 d 和极角 θ 变化而变化的 3D 图。上述图像表明, 在极角 θ 一定时, 随着距离 d 的增大, 导体平面上的感应电荷面密度 σ 先增大后减小且趋于零; 当距离 d 小于 d_0 时, (其中 d_0 由(4)式求导求出极值点, 该 d_0 与圆环半径和极角有关), 其磁感应电荷面密度 σ 随着距离 d 的增大先增大后减小, 当距离 d 大于 d_0 时, 磁感应电荷面密度 σ 随着距离 d 的增大而减小。由 $E = \sigma/\epsilon_0$ 就可知道这些图线也反映了导体平面上任一点电场强度的大小。

3. 带电细圆环与导体平面不平行时的感应负电荷的分布

当带电细圆环与导体平面不平行时, 既环与导体平面的法线的夹角 $\alpha \neq \pi/2$, 建立如图 2(a) 所示的笛卡尔直角坐标系, 仍以圆环圆心为坐标原点 o , x 轴垂直于导体平面且指向平面的方向为正方向, 则圆环所在平面与 x 轴负方向的夹角为 α , y 轴在 x 轴和 x 轴在圆环所在的平面内的投影所决定的平面内, xyz 轴满足右手螺旋系。细环均匀带电为正 q , 圆环半径为 R , 环心离平面的距离为 d 。在带电圆环上任一点 $p_1(-R \cos \alpha \cos \phi, R \sin \alpha \cos \phi, R \sin \phi)$ 处取微元电荷 dq , 其中 $\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$ 角是点 p_1 在 yoz 平面的投影点与坐标原点 o 的连线与 y 轴正方向的夹角。过 p_1 作导体平面的垂线交导体平面于 $p_2(d + R \cos \alpha \cos \phi, R \sin \alpha \cos \phi, R \sin \phi)$, 设 $p(d, d \tan \theta \cos \phi, d \tan \theta \sin \phi)$ 为导体平面上任一点, 其中 θ 是 op 连线与 x 轴正方向的夹角, 称其为极角; $\varphi(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ 是点 p 在 yoz 平面内的投影点和坐标原点 o 的连线与 y 轴正方向的夹角, 称其为方位角。则该微元电荷 dq 在 p 点处产生的感应电荷面密度 σ 仿照上面计算可得:

$$d\sigma = \frac{q}{4\pi^2} \frac{d + R \cos \alpha \cos \phi}{r^3} d\phi \quad (5)$$

其中 $r = |op| = \sqrt{d^2 \sec^2 \theta + R^2 + 2Rd(\cos \alpha - \tan \theta \sin \alpha \cos \phi) \cos \phi - 2Rd \tan \theta \sin \phi \sin \phi}$, 令 $A = d^2 \sec^2 \theta + R^2$ 、 $B = 2Rd(\cos \alpha - \tan \theta \sin \alpha \cos \phi)$ 、 $C = 2Rd \tan \theta \sin \phi$, 则 r 可化为:

$$r = \sqrt{A + B \cos \phi - C \sin \phi} \quad (6)$$

再令 $B_1 = \sqrt{B^2 + C^2}$, (6) 式变为

$$r = \sqrt{A + B_1 \cos(\phi + \gamma)} \quad (7)$$

其中 $\gamma = \arctan(C/B)$, 对(5)式中的变量 ϕ 积分可得:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{q}{2\pi^2} \frac{1}{(A - B_1) B_1 \sqrt{A + B_1}} & \left\{ (B_1 d - AR \cos \alpha \cos \gamma) \left[E\left(\pi + \frac{\gamma}{2} \middle| \frac{2B_1}{A + B_1}\right) - E\left(\frac{\gamma}{2} \middle| \frac{2B_1}{A + B_1}\right) \right] \right. \\ & \left. + (A - B_1) R \cos \alpha \cos \gamma \left[F\left(\pi + \frac{\gamma}{2} \middle| \frac{2B_1}{A + B_1}\right) - F\left(\frac{\gamma}{2} \middle| \frac{2B_1}{A + B_1}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $E[\phi|x] = \text{EllipticE}[\phi, x]$ 是第二类椭圆积分函数, 其定义为 $E(\phi|x) = \int_0^\phi (1 - x \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta$ 。

$F[\phi|x] = \text{EllipticF}[\phi, x]$ 是第一类椭圆积分函数, 其定义为 $F(\phi|x) = \int_0^\phi (1 - x \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta$ 。

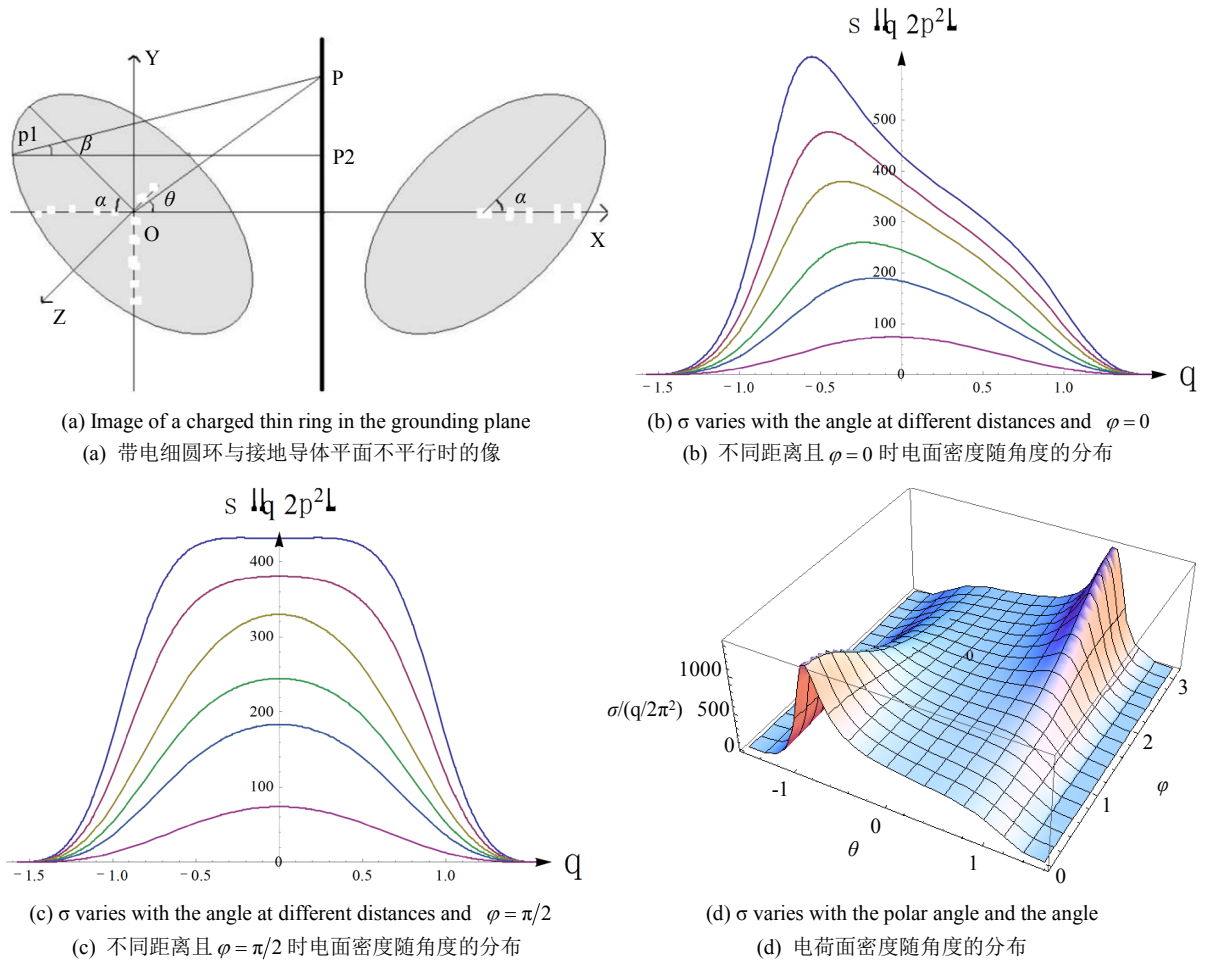


Figure 2. Charge distribution on the plane of ground conductor under the action of a charged thin ring
图 2. 带电细圆环作用下的接地导体平面上的电荷分布

图 2(b)~(d)是带电细圆环与接地无限大导体平面不平行时,导体处于静电平衡其表面上的感应电荷面密度 σ 随极角、距离变化而变化的分布图像,图中 $R=0.05\text{ m}$ 和 $\alpha=\pi/3$ 。图 2(b)和图 2(c)中的 6 条图线是带电细圆环的环心到导体平面的不同距离且在导体处于静电平衡时,其表面上的感应电荷面密度 σ 分布随极角 θ 变化而变化的图像,第一象限内从右到左的这 6 条图线分别对应于细圆环的圆心到导体平面的距离 $d=0.06\text{ m}$ 、 0.07 m 、 0.08 m 、 0.10 m 、 0.12 m 、 0.20 m ;图 2(b)和图 2(c)中的方位角分别对应于 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi/2$;图 2(d)中在 $d=0.04\text{ m}$ 时电荷面密度 σ 随极角 θ 和方位角 φ 变化而变化的 3D 图。这些图像的分布规律与图 1(b)~(d)相似。由电荷分布情况,接地无限大导体平面上任一位置的电场强度的分布就可唯一确定。

4. 结束语

本文根据电磁学中的镜像法,借助于 Mathematica 研究了均匀带电细圆环作用下,接地无限大导体平面处于静电平衡时,在导体平面上产生的感应负电荷的分布规律,给出了解析表达式,并绘出电荷面密度 σ 随距离和角度变化而变化的图像。当知道电荷面密度 σ 分布规律后,由 $E=\sigma/\epsilon_0 n$ 就可确定导体表面的电场强度,所以本文的研究具有一定的理论价值和实际意义,同时对大学物理教学内容有一定的补充、参考作用。

参考文献

- [1] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学(上)[M]. 高等教育出版社, 1985: 127-146.
- [2] 梁灿彬, 秦光戎, 梁竹健. 电磁学[M]. 高等教育出版社, 1980: 64-87.
- [3] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 高等教育出版社, 1979: 71-76.
- [4] 廖其力, 邓娅, 余艳. 带电线状体作用下的导体表面电荷分布[J]. 应用物理, 2018, 8(2): 116-124.
- [5] 廖其力, 余艳, 邓娅. 带电细圆环和导体平面周围空间的电场[J]. 应用物理, 2018, 8(2): 125-132.
- [6] 廖其力, 余艳, 邓娅, 邓敏艺, 白克钊. 用 Mathematica 研究环形电流平面内磁场[J]. 广西物理, 2016, 37(1): 54-56.
- [7] 王福谦, 贾兰芳, 王磊. 接地条形板对均匀电场的影响及其数值模拟[J]. 大学物理, 2017, 36(2): 36-38.
- [8] 徐燕, 陈浩. 两共轴带电圆环的相互作用能和相互作用力[J]. 大学物理, 2007, 26(6): 26-27, 31.
- [9] 杨天虎. 两共轴带电圆环作用力的计算[J]. 大学物理, 2016, 35(8): 29-31, 35.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2160-7567, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: app@hanspub.org