

Study on the Effect of Centrifugal Force on River Channel Tension in Axisymmetric Bend

Mingwei Hei¹, Jiayu Zhang², Zhengju Ren¹, Yun Cheng¹, Lu Sun³, Changli Sun¹, Yongjun Zhang¹

¹Xinyang Water Conservancy Bureau, Xinyang Henan

²Xinyang Normal University, Xinyang Henan

³Xinyang Taxation Bureau, Xinyang Henan

Email: xysswjbianban@126.com

Received: Oct. 31st, 2019; accepted: Nov. 15th, 2019; published: Nov. 22nd, 2019

Abstract

A uniform circular motion system model with symmetrical mirror image is adopted according to the action and reaction properties of centripetal force and centrifugal force. Under the action of constrained centrifugal force, the whole system generates reciprocating vibration. It is applied to the calculation of the effect of the centrifugal force on the tension of the river bed. It can be applied to the design of circular arc water conservancy projects and flood control safety.

Keywords

Curvilinear Flow, Centrifugal Force, Tension

离心力对轴对称弯道河槽张力作用的研究

黑明伟¹, 张佳羽², 任正菊¹, 程云¹, 孙璐³, 孙长利¹, 张拥军¹

¹荥阳市水利局, 河南 荥阳

²信阳师范学院, 河南 信阳

³荥阳市税务局, 河南 荥阳

Email: xysswjbianban@126.com

收稿日期: 2019年10月31日; 录用日期: 2019年11月15日; 发布日期: 2019年11月22日

摘要

采用镜像对称设置的匀速圆周运动系统, 根据其向心力与离心力的作用与反作用力性质, 在受约束离心力的作用下, 全系统产生周期性运动, 并应用于圆弧弯道水流离心力对河槽张力作用的计算。可用于圆弧弯道水流段水利工程的设计和防洪安全等领域。

关键词

曲线水流, 离心力, 张力

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

尽管匀速圆周运动在确定轴上的投影是简谐振动, 但未见像弹簧振子、单摆等其它简谐振动, 对匀速圆周运动系统的功和能等问题作表述, 究其原因是对匀速圆周运动物体系统的向心力与离心力是不是作用力与反作用力的关系问题。本文根据有关参考文献[1] [2] [3]和相关研究, 明确了二者遵循牛顿第三定律。搞清楚这个问题, 有益于全面掌握离心力的特点, 正确指导相关问题的研究, 进一步拓宽离心力作用的使用空间。

弯道河槽是水流经过的常见通道, 流经弯道的水流, 受河槽产生的沿弯道曲率半径法向(向心)力的作用, 根据向心力与离心力的作用与反作用力(即符合牛顿第三定律)性质[1] [2] [3], 弯道水流必然对该段河槽产生离心力的扩张作用, 尤其是遇有水大流急的弯道急流情况, 离心力扩张作用显著, 产生的损毁作用增强。基于工程和防洪安全的实际需要, 弯道水流段与直线水流段的水工程设计指标应相区分, 相应调高弯道水流段水工程的设计标准, 以抵抗水流离心力扩张作用的影响, 确保水工程安全和功能的正常发挥。

2. 圆周运动物体系统的向心力与离心力是作用力与反作用力的依据

在质点仅受一物体的力的作用时向心力的反作用力就是离心力, 两者大小相等、方向相反, 但离心力却作用在给质点以向心力的物体上。换言之, 向心力和离心力是作用和反作用, 它们是作用在两个物体上的两个力。因此, 它们不能平衡, 不能抵销[1] [2]。

向心力只产生于转动物体, 不转动的物体没有向心力; 向心力作用的效果是使本应作直线(沿切线方向)运动的物体, 因受到垂直其运动方向指向圆心的作用, 才改作圆周运动的; 转动物体对其实施向心力作用的物体施以向心力的反作用力——离心力的作用。向心力和离心力分别作用于两个物体, 所在同一直线不变, 但随着转动物体位置的变动而改变, 且符合牛顿第三定律[3] [4] [5]。

3. 匀速圆周运动物体系统在受约束离心力作用下产生周期性运动

3.1. 构建物理实验模型

如图 1, 光滑平面, 对称设置的两个质量均为 m 的球 C_1, C_2 , 二者做镜像的分别绕轴 O, O' 的匀速圆周运动, 转动半径同为 R , 平板装置 A 全系统的质量为 $M (=km)$ 。鉴于球 C_1, C_2 采用镜像对称设置, 为便

于研究, 分析以球 C_1 为例(如图 2)(球 C_2 类同, 讨论略。系统不计摩擦)。

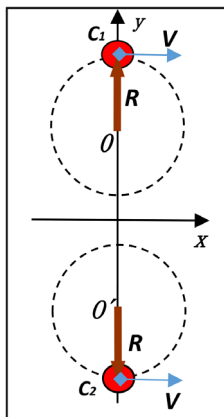


Figure 1. Mirror symmetrical circular motion
图 1. 镜像对称圆周运动

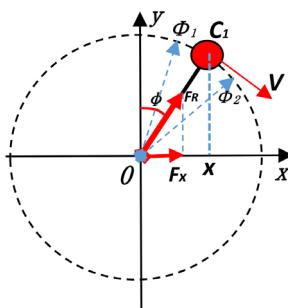


Figure 2. Centrifugal force analysis
图 2. 离心力分析

图 1 中, 两个镜像对称的作匀速圆周运动质点(球 C_1, C_2)的向心力, 在 y 轴方向上的合力为 0, 即系统向心力在 y 轴方向上的力受到约束, 并始终处于平衡状态, 只考虑二者向心力在 x 轴方向上的作用。

3.2. 匀速圆周运动系统离心力作用的解析

3.2.1. 匀速圆周运动系统离心力及在 x 轴方向上的冲量

如图 2, 圆周运动系统的向心力($-F'_R = -m \frac{v^2}{R}$)与离心力(F_R)遵循牛顿第三定律[1] [2] [3]:

$$F_R = -F'_R,$$

离心力在 x 轴上的分量:

$$F_x = F_R \sin \phi = -F'_R \sin \phi = -m \frac{v^2}{R} \sin \phi.$$

离心力在 x 轴上的分量的冲量:

根据动量和动量守恒定律, 在任意时间段 $t_1 \rightarrow t_2$ ($\phi_1 \rightarrow \phi_2$), 以匀速 v 转动的 C_1 向心力在 x 轴方向的分量所产生的冲量, 其数值大小等于该向心力的反作用力——离心力在 x 轴方向的分量对平板 A 系统产生的冲量, (C_1 在 x 轴方向的初速度 v_{x_1} , 末速度 v_{x_2} ; 相对应平板 A 系统在 x 轴方向的初速度 $v_{1(M)}$, 末速度 $v_{2(M)}$):

$$\therefore v_x = v \cos \phi, \quad v_{x_1} = v \cos \phi_1, \quad v_{x_2} = v \cos \phi_2, \quad t = \frac{R\phi}{v};$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= \bar{F}_x (t_2 - t_1) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left(-m \frac{v^2}{R}\right) \sin \phi dt = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left(-m \frac{v^2}{R}\right) \sin \phi d\left(\frac{R\phi}{v}\right) \\ &= mv \cos \phi_2 - mv \cos \phi_1 = Mv_{2(M)} - Mv_{1(M)} \end{aligned}$$

根据平均力算法:

$$\bar{F}_x = \frac{mv \cos \phi_2 - mv \cos \phi_1}{t_2 - t_1}.$$

且 $v_{2(M)} = \frac{mv \cos \phi_2 - mv \cos \phi_1 + Mv_{1(M)}}{M}$ 。

前半周(0→π)区间的冲量:

$$\begin{aligned} \int_0^T F_x dt &= \bar{F}_x \frac{T}{2} = \bar{F}_x \frac{\pi R}{v} = mv \cos \phi_2 - mv \cos \phi_1 \Big|_0^\pi = -2mv \\ \bar{F}_x &= \frac{mv \cos \phi_2 - mv \cos \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{-2mv^2}{\pi R}. \end{aligned}$$

若 $v_{1(M)} = 0$, 且 $M = km$,

$$v_{2(M)} = \frac{mv \cos \phi_2 - mv \cos \phi_1}{km} = \frac{-2mv}{km} = -\frac{2}{k}v.$$

设 $k = 3$, $v_{2(M)} = -\frac{2}{3}v$; $k = 2$, $v_{2(M)} = -v$ 。

后半周(π→2π)区间的冲量:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{T}{2}}^T F_x dt &= \bar{F}_x \frac{T}{2} = \bar{F}_x \frac{\pi R}{v} = mv \cos \phi_2 - mv \cos \phi_1 \Big|_\pi^{2\pi} = 2mv \\ \bar{F}_x &= \frac{mv \cos \phi_3 - mv \cos \phi_2}{t_3 - t_2} = \frac{2mv^2}{\pi R}. \end{aligned}$$

3.2.2. 离心力在 x 轴上的分量所做的功

已知匀速圆周运动在 x 轴上的投影是简谐振动, 根据有关文献[1] [2] [3] [4] [5]和研究, 匀速圆周运动系统与弹簧振子、单摆等简谐振动一样, 存在机械能守恒特征, 即球 C_1 向心力在 x 轴上的分量对其所做的功及所具有的能, 完全转化为向心力的反作用力——离心力在 x 轴上的分量对系统 A 所做的功及所具有的能[3] [4] [5] (假设机械能守恒)

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} F_x dx &= \bar{F}_x (x_2 - x_1) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left(-m \frac{v^2}{R}\right) \sin \phi dx \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left(-m \frac{v^2}{R}\right) \sin \phi d(R \sin \phi) \\ &= \frac{1}{2} mv^2 \cos^2 \phi_2 - \frac{1}{2} mv^2 \cos^2 \phi_1 \\ &= \frac{1}{2} Mv_{2(M)}^2 - \frac{1}{2} Mv_{1(M)}^2 \end{aligned}$$

由于被积函数在 $0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$; $\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$ 两段的做功区间有正、负, 根据力做功的方向, 使用

$$W = \int_a^b |f(x)dx| = \pm \int_a^b f(x)dx$$

前半周(0→π)区间做的功和振幅:

球 C_1 在 0→π 区间的转动, 相对应的系统 A 速度为 $v_{0(M)} \rightarrow v_M$ 。根据参考文献[3] [4] [5]和分析研究, 离心力在前半周(0→π/2)、(π/2→π)做正功, 假设系统机械能守恒:

$$\begin{aligned} W|_0^\pi &= \int_0^{\pi/2} |F'_x dx| + \int_{\pi/2}^\pi |F'_x dx| \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 - \frac{1}{2}Mv_{0(M)}^2 \end{aligned}$$

在前半周(0→π)区间离心力对系统 A 作用的周期性运动存在, 其振幅 X_M :

由 $M = km$, 假设 $v_{0(M)} = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} F_x dx &= \bar{F}_x [x_{2(M)} - x_{1(M)}] = \bar{F}_x X_M = mv^2 \\ &= \frac{1}{2}Mv_{2(M)}^2 = \frac{1}{2}km \left(-\frac{2v}{k} \right)^2 = \frac{2}{k}mv^2, \end{aligned}$$

由此可知, 系统初始静止, 只有当 $k=2$, 能量守恒, 周期性运动成立; 对系统初速不为 0, $k \neq 2$ 的有关动力学问题在此不作论述。系统振幅:

$$X_M = \frac{\frac{1}{2}Mv_{2(M)}^2}{\bar{F}_x} = \frac{2}{k}mv^2 \frac{\pi R}{2mv^2} = \frac{\pi R}{k},$$

当 $k=2$, 即系统全质量是转动部分 C_1 质量 2 倍时, 系统振幅:

$$X_M = \frac{\pi R}{2}.$$

3.2.3. 后半周(π→2π)区间离心力在 x 轴上的分量做的功和振幅

在后半周(π→2π)区间与前半周类同, 离心力在后半周(π→3π/2)、(3π/2→2π)做负功(系统 A 在后半周区间速度为 $v_M \rightarrow v_{M_3}$):

$$\begin{aligned} |W|_\pi^{2\pi} &= \int_\pi^{3\pi/2} |F'_x dx| + \int_{3\pi/2}^{2\pi} |F'_x dx| \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = -\left[\frac{1}{2}Mv_{M_3}^2 - \frac{1}{2}Mv_M^2 \right]. \end{aligned}$$

后半周(π→2π)区间离心力对系统 A 作用产生周期性运动的平均力和振幅 X'_M :

$$\bar{F}_x = \frac{mv \cos \phi_3 - mv \cos \phi_2}{t_3 - t_2} = \frac{-2mv^2}{\pi R}.$$

当 $k=2$ 时, 系统后半周振幅:

$$X'_M = \frac{2}{k}mv^2 \frac{-\pi R}{2mv^2} = \frac{-\pi R}{2}. \text{ (同上半周)}$$

3.2.4. 前后半周(0→2π)做功之和

$$W = W|_0^\pi - |W|_\pi^{2\pi} = 0.$$

前后半周离心力对系统 A 做功之和等于 0，再次表明系统 A 做周期性运动的特征。

由于 C_1, C_2 是镜像对称设置， C_2 与 C_1 类同， C_2 讨论略。

结果：对质点球 C_1, C_2 在前半周($0 \rightarrow \pi$)区间的匀速转动，向心力的 x 轴方向分量为负方向，其反作用力——离心力的 x 轴方向分量为正方向，对系统作正功，使系统产生沿 x 轴正方向的运动；后半周($\pi \rightarrow 2\pi$)区间的匀速转动，向心力的 x 轴方向分量为正方向，其反作用力——离心力的 x 轴方向分量为负方向，对系统作负功，使系统产生沿 x 轴负方向的运动，正负功数值相等，做功代数和为 0，即系统沿 x 轴方向作周期性运动。且前后半周离心力沿 x 轴方向的分量的冲量值大小相等。

4. 轴对称[6]圆弧弯道水流离心力对河道张力作用的解析算法

自由状态镜像对称的匀速圆周运动系统，向心力与离心力符合作用与反作用性质，系统产生沿 x 轴方向宏观的周期性运动，由此可知弯道水流必然对河道产生法向张力的作用，尤其是水大流急的情况，对河槽产生的损毁作用强，有必要对此作研究。以轴对称圆弧弯道河槽为例，讨论水流离心力对河槽产生单向张力的算法。弯道水流是凹岸流速较大，凸岸流速较小，为突出效果和便与研究，轴对称弯道水流取平均流速 v ，以平均流量 Q 与水流断面面积 S 之比为参照依据[7] [8] [9] [10]。

如图 3，水流经过的圆弧弯道河槽示意图，有效半径 R 为圆心轴上 O 点至河槽水流质心点 $C(x, y, 0)$ 的距离，水流平均流速 v ，平均流量 Q ，如图 4，水流断面高 h ，面积 S ， $C'(x, y, z)$ ，讨论该段圆弧弯道水流沿 x 轴方向对河道的张力 F_x 。

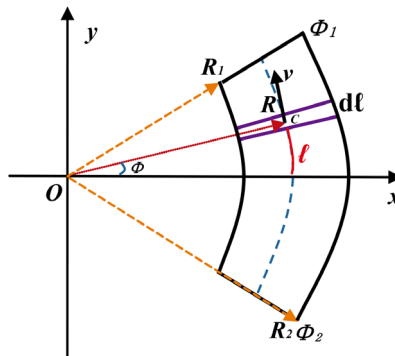


Figure 3. Schematic diagram of arc curve river channel
图 3. 圆弧弯道河槽示意图

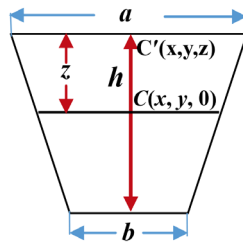


Figure 4. River cross section
图 4. 河道横断面

采用微元法，在圆弧上的 $\ell (= R\phi)$ 段位置选取 $d\ell$ 为水流元素的弧微分，水流元素质心 $C(R\cos\phi, R\sin\phi, 0)$ 点的质量为 m ，根据匀速圆周流动水流的向心力与离心力遵循作用力与反作用力(即： $F_R = -F'_R$)的关系，先求出该水流元素离心力在 x 轴方向上的分量 $F_x (= -F_R \cos\phi)$ 。

半径 R 的圆弧上, 单位长度弧长上的水流元素个数为常量 $n\left(=\frac{N}{\ell}\right)$, N 为弧长 ℓ 上水流元素的总个数, 弧长 ℓ 的总水量为:

$$M = Nm = n\ell m,$$

弧微分 $d\ell$ 上水流元素的离心力在 x 轴方向上的分量 $F_x n d\ell\left(=F_x \frac{N}{\ell} d\ell\right)$, 在 $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ 段上求积分得整个弯道弧段水流在 x 轴方向上的张力:

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} F_x n d\ell &= n \int_{\phi_1}^{\phi_2} F_R' \cos \phi d(R\phi) = n \int_{\phi_1}^{\phi_2} m \frac{v^2}{R} \cos \phi d(R\phi) \\ &= \frac{M}{\ell} v^2 (\sin \phi_2 - \sin \phi_1) = 2 \frac{M}{\ell} v^2 \sin \phi_2. \end{aligned}$$

2012年7月24日长江三峡发生7万 m^3 洪峰流量的罕见洪水, 夹杂着泥沙直扑三峡大坝。如流经圆弧河槽段, 平均河宽1000m, 平均河深5m, 圆弧河段有效长1000m, 有效半径5000m, $2\phi=17^\circ 27'$, 平均流速14m/s, 该段圆弧弯道水流沿 x 轴方向对河槽的张力:

$$\int_{-\ell}^{\ell} F_x n d\ell = n \int_{\phi_1}^{\phi_2} F_R' \cos \phi d(R\phi) = 2 \frac{M}{\ell} v^2 \sin \phi_2 = 195673.5 \text{ N} = 19.57 \text{ (吨)}。$$

此虽为基础算法, 对工程水力学的实际计算应用, 基于弯道水流三维流的特点, 以相同流速为前提, 对弯道水流进行空间网格化编制, 采用本文算法, 对网格水流离心力沿 x 轴方向的分量对河槽的张力逐一计算并累加, 即可求得弯道水流离心力对河槽的张力。有关实际算例此不做表述。

5. 结论

以匀速圆周运动在轴上的投影是简谐振动为基本, 通过构造自由状态下镜像对称的圆周运动系统模型, 确定圆周运动系统向心力与离心力遵循作用力与反作用力性质, 对系统质量做优化设置和离心力方向做有效约束, 整个系统在离心力作用下做周期性运动, 使用此理论且用于弯道段河槽的沿平行于中心半径方向的张力计算。能够增强对圆周运动系统向心力与离心力的作用与反作用性质的认识, 有益于拓展离心力应用研究的空间。

参考文献

- [1] 李泽华. 人造卫星运行中的向心力和离心力问题[J]. 物理通报, 1962(3): 132-136.
- [2] 谢仁荣. 解读人造卫星运行中的向心力和离心力问题[J]. 数理化解题研究, 2012(I): 32-34.
- [3] 孙璐. 大角度受控离心力对系统的无工质推进方法研究[J]. 科技创新导报, 2019(21): 49-52.
- [4] 孙璐. 电磁驱动式无工质牵引器[P]. 中国 201721222213.4, 2017-09-22.
- [5] 孙璐, 等. 内力用于系统的无工质自主推进方法研究[C]//中国电工技术学会电磁发射技术专业委员会. 全国第八届电磁发射技术研讨会论文集: 2017年卷. 郑州, 2017: 198-204.
- [6] 孙璐, 等. 轴对称线圈磁场的精确计算方法研究[J]. 军械工程学院学报, 2016, 28(3): 71-78.
- [7] 王志鹏. 浅析河流弯道水流特点及冲刷深度[J]. 农业科技与信息, 2018(23): 123-124.
- [8] 刘庆华, 李道霞. 弯道水流浅析[J]. 天中学刊, 1998(5): 120.
- [9] 戴文鸿, 苗伟波, 高嵩, 等. 弯道水流运动及床面变形数值模拟研究进展[J]. 南水北调与水利科技, 2014(3): 121-124.
- [10] 刘健, 郭维东. 弯道河段水流流态试验研究[J]. 人民长江, 2008(16): 81-84.