

# Research on the Mechanism and Control Method of Hollow Conical Light in Biaxial Crystal

Xinyu Zheng, Guicai Song

Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin  
Email: 2656203931@qq.com

Received: Feb. 12<sup>th</sup>, 2020; accepted: Feb. 25<sup>th</sup>, 2020; published: Mar. 3<sup>rd</sup>, 2020

---

## Abstract

The phenomenon of cone refraction was proposed by Hamilton in 1832 from the perspective of wave theory of light. He predicted that when the light wave propagates along an optical axis of a biaxial crystal, the transmitted light energy will be distributed on a conical surface. This was later confirmed experimentally by Lloyd. According to the cone refraction theory, if a laser beam propagates along one optical axis of biaxial crystal, it will produce hollow cone light. Different from the solid laser, the whole energy of the hollow conical light is distributed on the funnel-shaped conical surface. The energy distribution characteristics of the hollow conical light make the hollow conical light have advantages and application prospects that the solid laser can't match. For example, the retractable characteristics of the hollow conical light make it different from the solid laser in principle in scanning point by point and line by line, with scanning. With the advantages of fast tracing speed and wide scanning range, hollow conical light can be used for multi-target detection and tracking. Therefore, hollow conical light has a wide range of applications in printing, scanning, copying, radar, guidance, communication, disease diagnosis and other industrial, medical and national defense fields.

## Keywords

Biaxial Crystal, Conical Refraction, Bottle Beam

---

# 双轴晶体产生空心圆锥形光的研究

郑欣宇, 宋贵才

长春理工大学, 吉林 长春  
Email: 2656203931@qq.com

收稿日期: 2020年2月12日; 录用日期: 2020年2月25日; 发布日期: 2020年3月3日

## 摘要

根据锥面折射理论, 如果使一束激光沿着双轴晶体的一个光轴传播, 将会产生空心圆锥形光。空心圆锥形光的这种能量分布特点使得空心圆锥形光具有实心激光无法比拟的优点和应用前景, 如空心圆锥形光可缩放的特性, 使得它在原理上与实心光束逐点逐行扫描方式不同, 具有扫描速度快、扫描范围广的优点, 利用空心圆锥形光可以进行多目标探测、多目标跟踪, 因此空心圆锥形光在印刷、扫描、复印、雷达、制导、通信、疾病诊断等工业、医疗与国防领域有广泛的应用。

## 关键词

双轴晶体, 锥形折射, 空心光束

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

双轴晶体产生锥形折射现象, 是英国科学家哈密顿于 1832 年从光的波动理论角度提出的, 这种说法随后由洛埃(Lloyd)从实验上进行了证实。根据锥面折射理论, 如果使一束激光沿着双轴晶体的一个光轴传播, 将会产生空心圆锥形光。如图 1 所示。空心圆锥形光的这种能量分布特点使得空心圆锥形光具有实心激光无法比拟的优点和应用前景, 如空心圆锥形光可缩放的特性, 使得它在原理上与实心光束逐点逐行扫描方式不同, 具有扫描速度快、扫描范围广的优点, 利用空心圆锥形光可以进行多目标探测、多目标跟踪, 因此空心圆锥形光在印刷、扫描、复印、雷达、制导、通信、疾病诊断等工业、医疗与国防领域有广泛的应用。

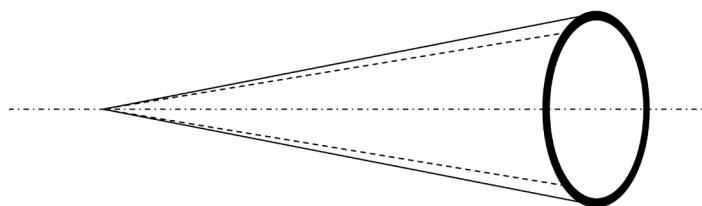


Figure 1. Schematic diagram of hollow conical light

图 1. 空心圆锥形光示意图

1816 年, 菲涅耳提出了他的行波理论, 这个理论是在惠更斯的波前分布实验的基础上提出的, 短短几年之后, 他通过实验发现了波动理论中的衍射和折射现象。

1832 年, Hamilton 用几何光学方程把菲涅耳的波动理论和牛顿的微粒理论结合了起来他把光线描述成具有某些特性的函数等位面的法线, 并预测了锥形折射现象, 这个现象, 是菲涅耳的波理论四阶近似的结果 Hamilton 指出, 在一个双轴介质中, 折射率表面有两层, 对应由双折射产生的两束光线, 旋转椭球的两层表面与两条光轴相交于四个点。

1833 年, Lloyd 证实了 Hamilton 对锥形折射的预测, 他在实验中发现空心光环的偏振是线性的, 沿

光轴旋转一周, 偏振方向只旋转半周, 他还提出在无旋光的透明双轴晶体中, 锥形折射模式可以由一个无量纲参数描述, 即出射光环的半径和入射光宽度的比值。

1841年, Potter用霞石进行了内锥折射的实验, 实验中Potter发现了在晶体的焦像平面的重要性, 因为这里出现光源的会聚像, 他发现在这个平面外的光锥截面处是由两个同心环构成的。

1549年, Poggendorf根据Potter的实验, 提出锥形折射的亮环实际上是一对同心亮环, 它们之间有一个暗环, 1855年, Haidinger进行了实验, 证实了这一点。

1567年, Stokes通过对Bessel方程的研究, 得到了现在用来理解锥形衍射的渐近理论, 并由此提出了渐近的积分形式, 指出只有通过旁轴近似才能充分描述锥形折射的衍射现象。

1941年, Raman首先提出了内锥折射和外锥折射的联系, 他描述了远场处锥形折射光环的模式, 描述了随着与焦平面距离的增加, 锥形折射光环的变化, 由于两片波表面分离, 每个面上的环分离并且扩散。

1978年, Belskii和Khapalyuk提出了双轴晶体内圆偏振光的衍射积分, 后来他们又进一步发展了这个理论, 并提出旁轴衍射理论可以用于旋光晶体, 得到了由一个小孔产生的光束入射薄晶体形成的锥形衍射积分, 并获得了其Legendre展式。1997年, Warnick和Arnold通过数学计算, 运用Belskii和Khapalyuk的理论, 由动态格林函数表示电场, 解释了Schell和Bloembergen的实验现象, 他们还模拟了晶体外亮环的能量分布, 从中发现内环的次级环结构。

国内对锥形折射的研究相对较晚, 但也取得了许多成果:

1997~1999年, 长春理工大学宁国斌、梁柱教授等对激光的动态外锥折射进行了一系列的实验研究, 并且取得了丰富的研究成果, 他们提出了双轴晶体锥形折射的控制技术, 并获得了锥角可控的动态外锥折射, 研制出了一种新型的激光扫描器。

2002年, 李华、李强等通过晶体内光波的简正模方程, 得到了当光线沿晶体内的光线光轴传播时, 在双轴晶体中的电场强度和电位移矢量的表达式。

2003年, 薛冬、李国华等通过几何方法和理论推导, 得到了双轴晶体中的波法线光轴与光线轴方向, 并印证了它们是两个完全不同的光轴, 其空间位置有差别。

2005年, 孟繁华、宋连科等利用光波面和光波法线面的曲线方程, 得出了在光波面上, 光轴角度和光线轴角度的表达式, 并根据锥形折射的性质及对应光波面上的位置关系, 推导了内锥折射锥顶角和外锥折射锥顶角的表达式。

但是到目前为止, 由于产生空心圆锥形光的晶体结构和特性以及空心圆锥形光的锥角控制和输出特性等没有得到深入的理论和实验研究, 因而, 直到今天, 空心圆锥形光也没有在实际中得到应用。而本文正是对空心圆锥形光的产生、输出特性等进行理论和实验研究, 这一项目的研究对推进空心圆锥形光的应用具有重要意义。

## 2. 双轴晶体在应用中的技术需求

1. 在光扫描方面。由于空心圆锥形光是控制锥角的大小从而进行扫描, 锥角缩放一次就能对目标扫描两次, 形成两帧图像, 因此, 相对于实心光束, 空心圆锥形光的扫描范围更广, 速度更快, 也不会产生遗漏, 为扫描领域提供了一种快捷、高效的光学扫描方式[1]。如果在空心圆锥形光扫描范围之内有多个目标, 则利用CCD可以同时多个目标进行成像。因此, 空心圆锥形光扫描可以用于印刷、复印、医疗、光学检测和激光布景等方面, 也可以用于形成大气云图与地球表面的图像[2]。

2. 在光探测方面。与实心光束相比, 空心圆锥形光和有着两个方面的优势: 一是由于空心圆锥形光的能量分布在整个漏斗形圆锥面上, 因此, 光束探测面远大于实心光束, 只要空心圆锥形光具有较大的

探测空间; 二是通过对空心圆锥形光锥角的控制, 可使扫描范围进一步扩大, 进而实现对目标的搜索和跟踪。因此, 空心圆锥形光克服了现有激光雷达的不足, 可以同时完成对多个目标的速度和距离的测量, 并可以对多个目标进行跟踪和成像。

### 3. 在制导方面。

由于空心圆锥形光的锥角可以在较大范围内进行调整, 空心圆锥形光驾束制导可以在导弹发射时将锥角调到最大, 从而确保导弹在空心圆锥之内, 然后逐渐缩小锥面光束的张角, 使导弹精确命中目标。因此, 利用空心圆锥形光进行驾束制导可以有效地控制弹体不脱离光束。

利用空心圆锥形光进行制导具有隐身作用。由于制导初期, 空心圆锥形光的张角较大, 只是“笼罩”目标, 不会照射到敌方激光告警器, 当敌方探测到激光信号时, 导弹已经命中目标了。所以利用空心圆锥形光进行制导, 是一个全新的课题。这一课题的研究, 对精确制导武器的发展将具有推动作用。

## 3. 实验方案

为了完成双轴晶体空心圆锥形光产生及控制, 在该项目的研究中, 首先采用发散角小的激光作为光源, 然后利用双轴晶体的来产生空心圆锥形光, 通过对空心圆锥形光的调制, 实现对空心圆锥形光锥角的控制; 利用示波器、光电探测器、功率计等进行对空心圆锥形光特性的测量。产生外锥折射时的实验装置如图 2 所示。

当光源发出的光照射到负透镜  $L_1$  上时会形成发散光, 该发散光经过正透镜会产生会聚光, 聚焦在双轴晶体表面的  $F$  点上, 光通过双轴晶体  $G$  后, 会从  $A$  点处发出空心圆锥形光。当  $A$  点位于透镜  $L_3$  焦点上时, 则空心圆锥形光经过正透镜  $L_3$  以后会变成空心圆筒光; 当  $A$  点远离焦时, 光经过正透镜  $L_3$  以后会变成会聚光束, 当  $A$  点近离焦时, 光经过正透镜  $L_3$  以后又会变成发散光束。

如图 2 所示, 本实验所采用的双轴晶体是  $\text{KNbO}_3$ , 属于正交晶系, 尺寸约为  $7 \text{ mm} \times 6.5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ , 光源为 He-Ne 激光器, 晶体的折射率为  $n_x = 2.1338$ ,  $n_y = 2.2372$ ,  $n_z = 2.2784$ , 由公式

$$\chi_0 = \frac{n_y^2}{2} \left( \frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n_z^2} \right) \sin 2\beta = \frac{\sqrt{(n_y^2 - n_z^2)(n_z^2 - n_y^2)}}{n_x n_z}$$

测得晶体出射面上的光斑直径约为  $3 \text{ mm}$ 。

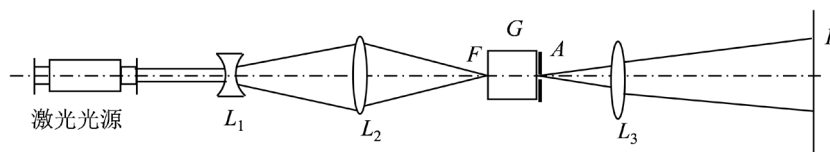


Figure 2. Schematic diagram of the generation and control system of the cone light with the center of time and space refracted by the external cone of biaxial crystal  
图 2. 双轴晶体外锥折射时空心圆锥形光产生和控制系统示意图

### 3.1. 内锥形折射方案

如图 3 和图 4 所示。在双轴晶体的表面上设计小孔光阑, 使一束很窄的非偏振的平行光从各项同性介质垂直入射到晶体上, 此时, 在晶体中传播的波矢方向沿着光轴方向与电位移矢量的偏振方向无关, 但是光线的传播方向与电矢量的偏振方向有关。由于入射光由许多电矢量沿着不同方向的平面波组成, 所以电矢量方向不同的光波, 光的传播方向也不同, 所以, 这些光线方向分布在一个锥形面上, 从晶体中透射出来的光将形成一个空心圆筒[3]。

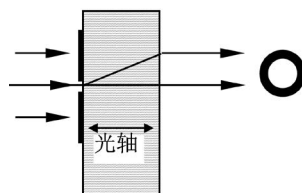


Figure 3. Inner cone refraction diagram

图 3. 内锥形折射示意图

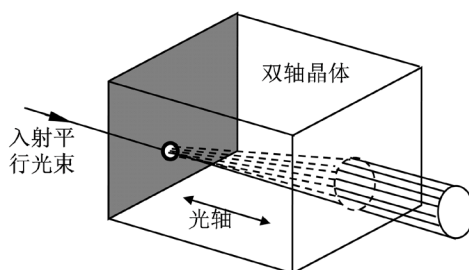


Figure 4. Inner cone refraction

图 4. 内锥形折射

### 3.2. 外锥形折射方案

如图 5 所示, 此时, 在晶体中得光线的传播方向与电矢量偏振方向无关, 但是, 波矢传播方向与电位移矢量偏振方向有关, 所以电位移矢量方向不同的光波, 波矢的传播方向也不同[4]。在出射端同样加一个小孔光阑, 使在晶体中传播的波矢方向不同的平面波都由这个小孔折射出去, 光波在晶体外将分布在一个锥面上。

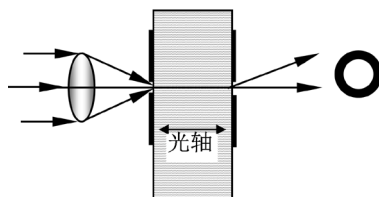


Figure 5. Schematic diagram of external cone refraction

图 5. 外锥形折射示意图

### 3.3. 双轴晶体内锥折射时锥角控制方案

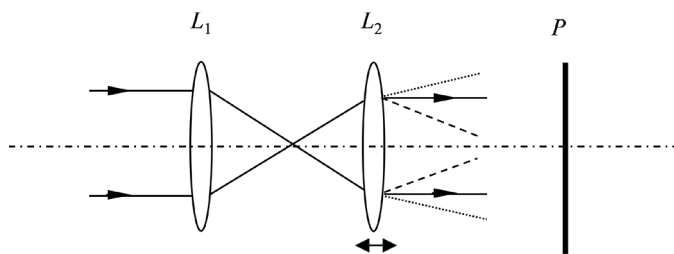
在图 6 的光学系统中, 双轴晶体内锥折射后从晶体出射的光是空心圆筒光, 空心圆筒光经过  $L_1$  后会形成空心圆锥形光, 但该空心圆锥形光的锥角不变。

为了改变空心圆锥形光的锥角, 在图 7 的装置当中, 使  $L_1$  的位置保持不变, 通过沿着光学系统轴线方向水平移动  $L_2$  就可以改变空心锥形光锥角的大小。

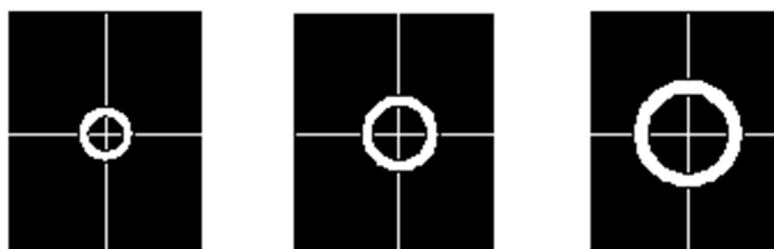
在空间某一位置, 垂直于光学系统轴线的接收屏上, 不同时刻光环孔径大小的变化如图 7 所示。

### 3.4. 实验现象

He-Ne 激光器输出的光束, 发散角约为 12 mrad, 光斑直径约为 1.5 mm。进入晶体的光线是沿着光轴的一束细光线, 我们可以看到一个较细的光环。然而, 由于 He-Ne 激光器的功率不高, 光学器件的加

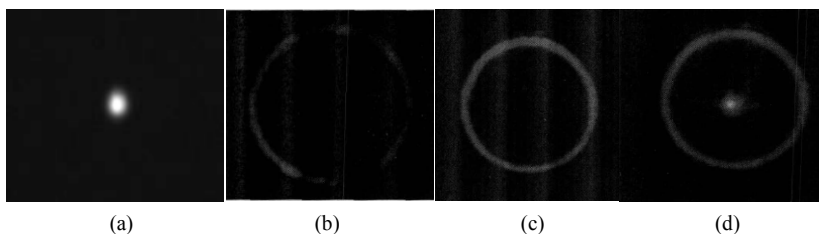


**Figure 6.** Control diagram of light cone angle of hollow cone  
**图 6.** 空心圆锥形光锥角控制示意图



**Figure 7.** Change of aperture size of ring at different times in the same position  
**图 7.** 同一位置, 不同时刻光环孔径大小的变化

工误差会对成像效果产生影响, 无法清晰的分辨锥形折射所形成的双环。但由于单环是双环重合形成的, 其衍射特性不受影响, 我们先选取凸透镜焦距为  $f_1 = 150 \text{ mm}$ , 凹透镜焦距  $f_2 = 30 \text{ mm}$ , 通过实验观测到的结果如下:



**Figure 8.** Experimental effect  
**图 8.** 实验效果图

如图 8 所示, 经过调节, 我们得到了双轴晶体的内锥折射光环。a) 为通常情况下的双折射光斑; b) 为调节过程中出现的双半环光斑。c) 为仔细调节后, 近场处出现的单环, 此时测得光环直径  $47.14 \text{ mm}$ , 距凸透镜  $64 \text{ mm}$ , 光环宽度  $2.68 \text{ mm}$ ; d) 为远场由于衍射而出现轴上亮点情况, 此时光环直径  $52.18 \text{ mm}$ , 距透镜约为  $500 \text{ mm}$ , 光环宽度  $6.84 \text{ mm}$ , 光斑直径  $12.62 \text{ mm}$ 。

从这几张照片我们可以看出, 当激光通过双轴晶体, 通常发生双折射形成两个光斑, 这是光束没有沿光轴入射的情况。旋转晶体使光轴沿着入射光方向, 双折射光斑形状变为弧形然后形成内锥折射的空心光环, 这个光环是入射光经过晶体后形成的圆柱面和观察面的交界线。当我们把观察屏逐渐远离晶体时, 会看到光环中心由于衍射而逐渐出现光斑, 并且在某个范围内达到亮度的最大值, 随后光斑逐渐发散变弱。在此过程中, 光环逐渐变得模糊, 亮度变弱, 光环和中心亮斑之间的空心部分渐渐出现一些微弱的衍射条纹。

#### 4. 双轴晶体产生锥形光的机理研究

对于双轴晶体, 折射率椭球的  $xoz$  截面, 方程为

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (1)$$

这是一个椭圆, 如图 9(a)所示。

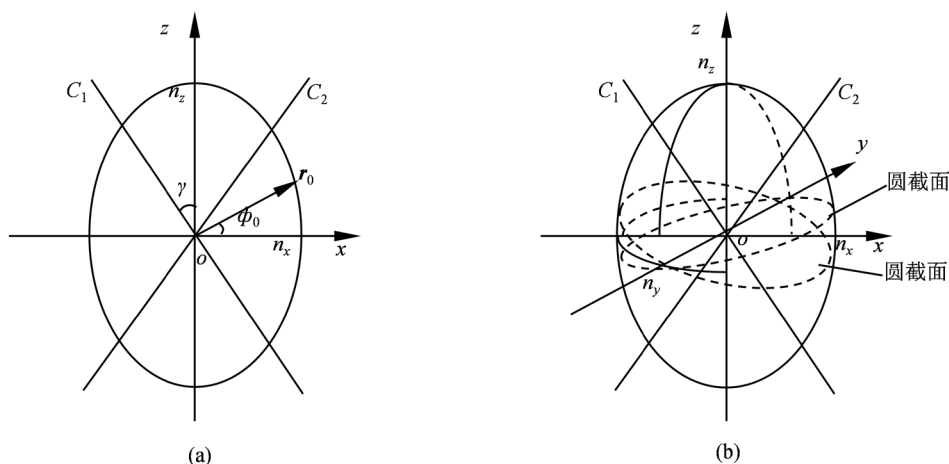


Figure 9.  $xz$  section and optical axis of index ellipsoid of biaxial crystal  
图 9. 双轴晶体的折射率椭球的  $xz$  截面与光轴

从中心  $o$  向椭圆引矢径  $r$ ,  $r$  的长度随着  $r$  与  $x$  轴的夹角  $\phi$  而变: 当  $\phi = 0$ ,  $|r| = n_x$ , 当  $\phi = \pi/2$ ,  $|r| = n_z$ 。由于  $n_x < n_y < n_z$ , 必有一个矢径  $r_0$ , 它的长度  $|r_0| = n_y$ 。此时,  $r_0$  与  $y$  轴所形成的平面与椭球相截的截面是一个圆, 如图 9(b)所示。

利用(1)式, 可以得到

$$\frac{(n_y \cos \phi_0)^2}{n_x^2} + \frac{(n_y \sin \phi_0)^2}{n_z^2} = 1 \quad (2)$$

因此可以得到

$$\text{tg} \phi_0 = \text{tg} \gamma = \pm \frac{n_z}{n_x} \sqrt{\frac{n_y^2 - n_x^2}{n_z^2 - n_y^2}} \quad (3)$$

双轴晶体两个光轴的确立, 为晶体的切割和加工提供了理论依据。

##### 4.1. 探讨锥形折射的能量传输过程, 及各参数对其能量分布的影响

如果入射光是一束完全平行的光束, 锥形折射的环为一个尖锐的环。然而, 如果入射光是一束逐渐发散或会聚的非偏振光束, 环的形状则为两个分离的环, 每个环的最亮区域都是靠近中心线位置。两个环都是沿着中心暗环对称分布, 内环是对应于内光线, 外环对应外光线。

我们假设入射光束有角能量分布  $\alpha(\theta_1)$ , 入射光束的角宽度为  $\Delta\theta_1$ , 能量  $I$  表示为:

$$I = \alpha(\theta_1) 2\pi\theta_1 \Delta\theta_1 \quad (4)$$

锥形折射的能量  $I_1$  包含宽度为  $\Delta\theta_1$  的空心锥, 锥形折射后的能量为:

$$I_1 = \alpha_1(\theta_1) 2\pi(\gamma_0 \pm \theta_1) \Delta\theta_1 \tag{5}$$

这里  $\alpha_1(\theta_1)$  是锥形折射光束的角能量分布。假设在折射过程中仅有微弱的能量损失,  $I$  可近似于  $I_1$ , 因此

$$\alpha_1(\theta_1) \approx \alpha(\theta_1) \frac{\theta_1}{\gamma_0} (\theta_1 \ll \gamma_0) \tag{6}$$

对于高斯光束, 其角分布  $\alpha(\theta_1)$  如下:

$$\alpha(\theta_1) = \alpha_0 \exp\left(-2\frac{\theta_1^2}{\omega_0^2}\right) \tag{7}$$

如图 10 所示, (a)表示入射高斯光束的能量分布  $\alpha(\theta_1)$ , 光腰为  $\omega_0$ ; (b)表示能量沿锥形折射的双环结构的分布

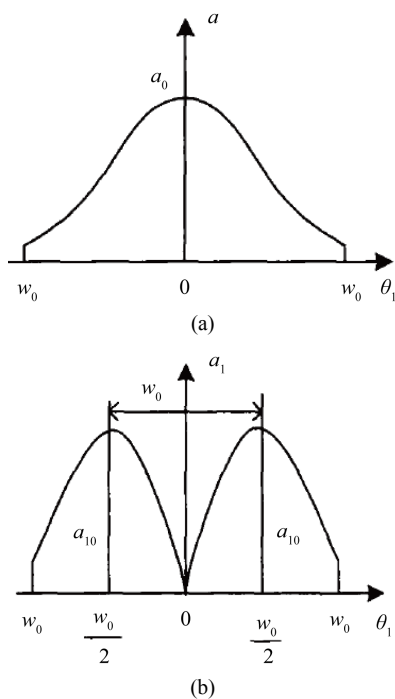


Figure 10. Energy distribution of non parallel incident Gaussian beams along the ring

图 10. 非平行入射的高斯光束沿环的能量分布

#### 4.2. 通过推导得到的结论, 研究锥形折射产生的光环的精细结构

如图 11 所示, 内波矢量为  $S_1$ , 光轴方向为  $A_1$  如果半锥角为  $\gamma_0$ , 光纤维轴的矢量为  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_0$  和  $C$  的交点为  $C_0$ , 有:  $\Gamma_0 = A_1 \cos \gamma_0 + C \sin \gamma_0$

假设  $\gamma_0$  极小, 可以简化为:

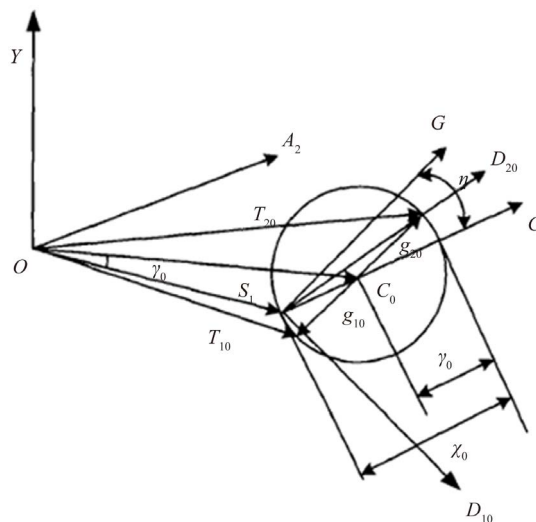
$$\Gamma_0 = A_1 + C\gamma_0 \tag{8}$$

在图 11 中,  $g_{10}$  是从  $C_0$  指向  $T_{10}(\theta_1 = 0)$  顶点的矢量, 所以有:

$$g_{10} = T_{10} - \Gamma_0 = -G\gamma_0 \tag{9}$$

同样,  $g_{20}$  是从  $C_0$  指向  $T_{20}(\theta_1 = 0)$  的矢量, 有:





**Figure 11.** Schematic diagram of conic refraction vector relationship

**图 11.** 锥形折射矢量关系示意图

$$g_{20} = T_{20} - \Gamma_0 = G\gamma_0 = -g_{10} \quad (10)$$

由方程(9)和(10)可以看出: 三个矢量  $G$ ,  $g_{10}$  和  $g_{20}$  是彼此平行的。 $g_{10}$  和  $g_{20}$  是绝对值相同而方向相反的两个矢量。

当  $G$  随  $\eta$  顺时针由  $0$  到  $2\pi$  变化时, 矢量  $g_{10}$  或  $g_{20}$  的端点形成一个半径为  $\gamma_0$  的光环。 $g_{10}$  所表示的内部光线和  $g_{20}$  所表示的外部光线形成了锥角为  $2\gamma_0 = \chi_0$  的光锥。

内光线和外光线形成同一个圆锥。光轴  $A_1$  是圆锥的母线, 而不是圆锥的轴, 圆锥与光轴是相切的。内光波和外光波的振幅方向是彼此正交的  $D_{10}$  和  $D_{20}$ , 当  $G$  顺时针变化时也顺时针变化。

## 5. 总结

本文正对空心圆锥形光的产生、输出特性等进行理论研究, 这一项目的研究对推进空心圆锥形光的应用具有重要意义。

从双轴晶体产生的双折射现象开始, 给出了当入射面是晶体主介电轴平面和光为正入射时, 折射方向的计算公式, 它们提供了测量晶片光学常数的一种方法。

空心光束的物理特性使得它在激光、光信号、生物技术、微电子学和材料科学、医学及分子学、原子学等领域中有着广泛的应用前景, 虽然人们对双轴晶体产生空心光束有了越来越多的认识, 但是关于这方面仍有许多方面值得我们研究。

## 参考文献

- [1] Wang, X. and Littman, M.G. (1993) Laser Cavity for Generation of Variable-Radius Rings of Light. *Optics Letters*, **18**, 767-768. <https://doi.org/10.1364/OL.18.000767>
- [2] Rioux, M., Belanger, P.A. and Cormier, M. (1977) High-Order Circular-Mode Selection in a Conical Resonator. *Applied Optics*, **16**, 1791-1792. <https://doi.org/10.1364/AO.16.001791>
- [3] Tamm, C. and Weiss, C.O.J. (1990) Bistability and Optical Switching of Spatial Patterns in a Laser. *Journal of the Optical Society of America B*, **7**, 1034-1037. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.7.001034>
- [4] Allen, L., Beijersbergen, M.W., Spreeuw, R.J.C., et al. (1992) Orbital Angular Momentum of Light and the Transformation of Laguerre-Gaussian Laser Modes. *Physical Review A*, **45**, 8185-8189. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185>