

基于插值法对坐标轴旋转下涡环速度场的重构

高晗庭, 邱民京, 高 磊*

四川大学空天科学与工程学院, 四川 成都

收稿日期: 2022年1月19日; 录用日期: 2022年2月21日; 发布日期: 2022年2月28日

摘 要

立体PIV技术现在被广泛用于旋翼尾迹流场的测量, 本文提出在多个方向角平面内进行立体PIV测量以获得平面内较高的测量精度, 再在不同测量剖面之间采用插值的方法重构三维空间速度场, 从而获得可靠和准确的旋翼三维流场立体重构结果。根据上述实验要求, 本文提出了在柱坐标下, 以现有的涡环模型, 将其坐标轴沿 $\theta = \pi/2$ 顺时针旋转一定的角度, 基于MATLAB得到其不同方位角下 $r-z$ 平面内速度绝对值大小的分布。再利用插值算法重构涡环三维速度场, 并与真实值进行比较和误差分析, 得到了良好的一致性, 为立体PIV重构旋翼尾迹三维流场提供了理论算法基础和可行性分析。

关键词

立体PIV, 涡环, 插值, 流场重构

Reconstruction of Vortex Ring Velocity Field under Coordinate Axis Rotation Based on Interpolation Method

Hanting Gao, Minjing Qiu, Lei Gao*

School of Aeronautics and Astronautics, Sichuan University, Chengdu Sichuan

Received: Jan. 19th, 2022; accepted: Feb. 21st, 2022; published: Feb. 28th, 2022

Abstract

Three-dimensional PIV technique has been widely used in the rotor wake flow field measurement, this paper puts forward the multiple direction angle plane three-dimensional PIV measurement to get high measuring precision of the plane, and adopts the method of interpolation between different measurement profiles to reconstruct three-dimensional space velocity field, to obtain reliable and accurate

*通讯作者。

rotor three-dimensional flow field of the three-dimensional reconstruction results. According to the above experimental requirements, the paper proposes that in cylindrical coordinates, the existing vortex ring model is used to rotate its coordinate axis clockwise along $\theta = \pi/2$ by a certain angle, and the distribution of the absolute value of velocity in the r - z plane under different azimuth angles is obtained based on MATLAB. The interpolation algorithm was used to reconstruct the three-dimensional velocity field of the vortex ring, and the comparison and error analysis with the real value were carried out. A good consistency was obtained, which provided a theoretical algorithm basis and a feasibility analysis for three-dimensional PIV reconstruction of the three-dimensional flow field of the rotor wake.

Keywords

Three-Dimensional PIV, Vortex Ring, Interpolation, Flow Field Reconstruction

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对旋翼尾迹流场的流动结构与演化规律的物理机理清楚认识是发展旋翼空气动力学必须解决的关键问题之一。它是研究直升机飞行特性、旋翼载荷、振动及噪声、操纵性及稳定性的理论基础，也是深入研究直升机气动干扰问题的重要手段。直升机在飞行过程中，旋翼桨叶会脱出强烈集中的桨尖涡，对旋翼流场具有强烈的影响，而且这些脱出的桨尖涡与桨叶会发生相互干扰，从而在桨叶上产生出强烈的冲击气动载荷和噪声。旋翼的气动特性与其尾迹流场密切相关，准确的尾迹流场信息对旋翼气动计算、性能计算起着决定性的作用；而对旋翼尾迹流场的准确试验测量，又反过来制约着已有理论的可用性和旋翼理论研究的进一步深入与发展。由于桨尖涡是旋翼尾迹流场中的主导结构，测量和研究旋翼尾迹流场的桨尖涡就成为非常重要的研究内容。

多种定性流动显示及定量流场测量方法已经被运用在对旋翼尾迹的研究上。对于旋翼滑流边界的收缩和桨尖涡的运动轨迹，可以通过烟流流场显示及纹影摄像等方法测定。而对于旋翼尾迹速度分布测量，经历了从最开始的皮托静压探头测量、热线测量到非接触式的激光多普勒测速(LDV)和粒子图像测速(PIV)技术的过程。由于传统二维 PIV (平面两速度分量)具有测量整个二维平面内瞬时速度场的能力，被认为比 LDV 更适合用于测量非定常旋翼桨尖涡流场[1]。近年来，借助于 LDV 和 PIV 技术，国内外展开了一系列旋翼尾迹流场的测量试验研究，获得了大量的桨尖涡结构和发展演化试验数据[2]。袁红刚等人使用二维 PIV 技术研究了悬停状态下旋翼模型的轴向诱导速度场，确定了桨尖涡位置和尾迹边界随旋翼转速和总距的变化规律[3]。李春华等人通过二维 PIV 技术对悬停和前飞状态下模型旋翼流场进行了测量，对比分析了不同前飞速度、总距、转速、方位等条件下的旋翼速度场和桨尖涡运动和演化规律，获得了在悬停和前飞条件下旋翼流动特性[4]。随着 PIV 技术的发展，立体 PIV (Stereo PIV)技术(平面三速度分量)也广泛应用于旋翼尾迹流场的测量中，获得了桨尖涡轴向速度的变化规律。为了解决 PIV 测量在全局流场信息获取和局部涡核区域空间解析力不足的矛盾，Raffel 等人使用测量窗口大小不同的两套立体 PIV 系统对桨尖涡进行了同步测量，得到了精细的涡核轨迹和涡核内部流动特性的实验结果[5]。

在理论研究中，人们常常把螺旋涡模型用来等效替代桨尖涡。直线涡(点涡)、涡环、螺旋涡是涡旋动力学研究的三大基本对象[6]，如图 1 所示。相对于直线涡，对螺旋涡诱导的流动，毕奥萨法尔积分没有一个封闭的形式。对于点涡，它不能表示为一个简单的极点，也不能表示为一个无限薄的涡环的完全椭圆积分。

对于螺旋涡的研究历史十分悠久,可追溯到 1880 年 Kelvin 关于柱状涡的螺旋扰动的著名著作,即大螺距螺旋涡[7],相对于直线涡,对螺旋涡诱导的流动,Biot-Savart 积分没有一个封闭的形式。对于点涡,它不能表示为一个简单的极点,也不能表示为一个无限薄的涡环的完全椭圆积分。因此,Maykopar 指出,螺旋涡的诱导速度必须通过由 Biot-Savart 积分产生的特殊函数来计算,或者通过 Kapteyn 型贝塞尔函数系列来计算[8]。Ricca 对几种推导螺旋涡速度的方法进行了比较,重点讨论了扭转对速度的影响[9]。Hardin 推导出了 Kapteyn 级数的完整三角形式,给出了螺旋涡在柱坐标下 (ρ, θ, z) 三维速度的各个分量[10]。Kuibin 和 Okulov 对 Kapteyn 级数主要部分提出了一种有效的改良方法,得到了更精准的解析解[11]。Joukowsky 清楚地证明了螺旋涡自激速度的形式化,表示在忽略毕奥萨伐积分中的某些项后,可以转化为密切涡环的自激运动,这一方法由 Moore 和 Saffman 正式提出来[12] [13]。

正是基于上述要求,本文拟建立涡环模型来验证插值算法对三维流场重构的可行性。在柱坐标 (ρ, θ, z) 下将涡环沿将涡环沿 $\theta = \pi/2$ 顺时针旋转一定的角度(30 度、45 度等)后,基于 MATLAB 重新计算旋转后新的诱导速度场以及在不同方位角下每个平面内速度绝对值大小的等值线和三维等值面。且与之前不同的工作是在于取多个 θ 下的 $r-z$ 平面,计算出不同平面下的速度大小,基于 MATLAB 插值程序从而重构出整个三维空间速度场,为在直升机旋翼尾流用立体 PIV 测量不同切面下的速度场,并用插值算法重构出整个三维空间速度场的实验提供理论支撑和可行性分析。

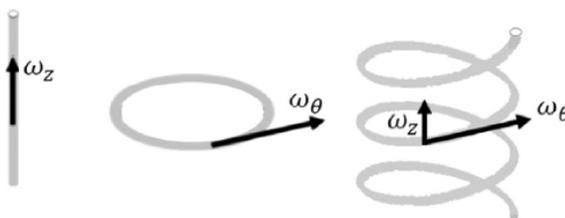


Figure 1. Elementary vortex structures: straight line (a point) vortex, vortex ring and a helical vortex [6]

图 1. 基本涡结构: 直线涡(点涡)、涡环和螺旋涡[6]

2. 涡环模型构建和结果分析

2.1. 正放的涡环模型

如图 2 考虑半径为 $a=1$ 的涡环,取直角坐标系 $O-xyz$,涡环所在的平面为 $x-y$ 平面, z 轴通过圆心 O ,同时我们取柱坐标系 (ρ, θ, z) ,两坐标系之间的关系为 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$,由于轴对称性,通过 Oz 轴的所有平面上的运动都是一样的,因此不失普遍性可考察平面 $\theta = 0$ 处的流体运动。

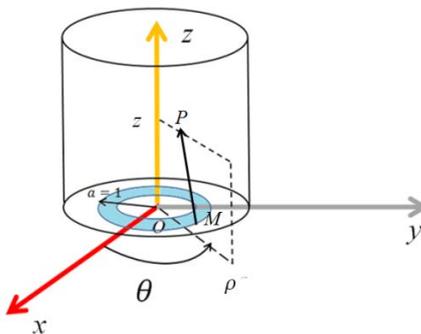


Figure 2. The geometric position of the vortex ring in normal place

图 2. 涡环正放的几何位置

2.2. 涡环速度公式

假设给定圆形涡丝的强度是 Γ ，在无散度有涡旋场中，即 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ， $\nabla \times \mathbf{u} = \Omega$ ，推出 $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$ ， \mathbf{A} 称为矢势，将之代入 $\nabla \times \mathbf{u} = \Omega$ ，即 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \Omega$ ，根据场论中基本运算公式可以得到：

$$\mathbf{A}(\rho, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left\{ \left(\frac{2}{\kappa} - k \right) \kappa(k) - \frac{2}{\kappa} E(k) \right\} \quad (1)$$

$$\kappa(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \quad (2)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta \quad (3)$$

$$k^2 = \frac{4\rho a}{z^2 + (\rho + a)^2} \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_\rho = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}, \mathbf{u}_\theta = 0, \mathbf{u}_z = \frac{\partial(\rho \mathbf{A})}{\rho \partial \rho} \quad (5)$$

令涡环半径 $a = 1 \text{ m}$ ，在柱坐标系下，取 $\theta = 0$ 的平面，如图 3 所示：

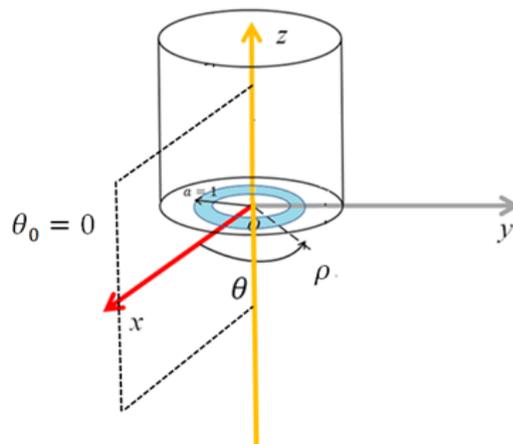


Figure 3. Survey plane diagram

图 3. 测量平面示意图

在 $-0.9 \text{ m} < z < 0.9 \text{ m}$, $0.1 \text{ m} < r < 1.9 \text{ m}$ 的平面上，引入无量纲量 $r^* = r/a$, $z^* = z/a$ 基于 Matlab 可以算出 $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_z$ 的速度等值线图以及矢量图和流线图如下，从图 4 可以看出涡环诱导的速度场在涡核两端严格对称的。越靠近涡核处速度等值线越密集。

以 z 轴作为对称轴线，从图中可以看出，涡核附近的流线仍为闭合曲线，这大概是因为，涡核附近旋转运动的速度以 $1/\rho$ 阶次趋于无穷，而涡丝本身的运动则是 $\ln \rho$ 阶次的无穷大，与 $1/\rho$ 相比是高阶小量，因此起主要作用的仍为旋转运动，流线呈封闭形式。

再引入速度绝对值大小，也就是 $U_{abs} = \sqrt{u_\rho^2 + u_z^2}$ ，计算得到如图，为了便于观看，只画了某些特定值的等值线图。

因为涡环诱导的速度场与 θ 无关，所以只需要速度公式对 θ 做一次 0 到 2π 的循环，即可得到速度绝对值大小的等值面图。选取 $U_{abs} = 8$ 来进行作图，如图 5 所示，从图中可以清晰地看出，涡环的速度等值面是呈圆环分布，且涡环速度等值面的切面为圆形。

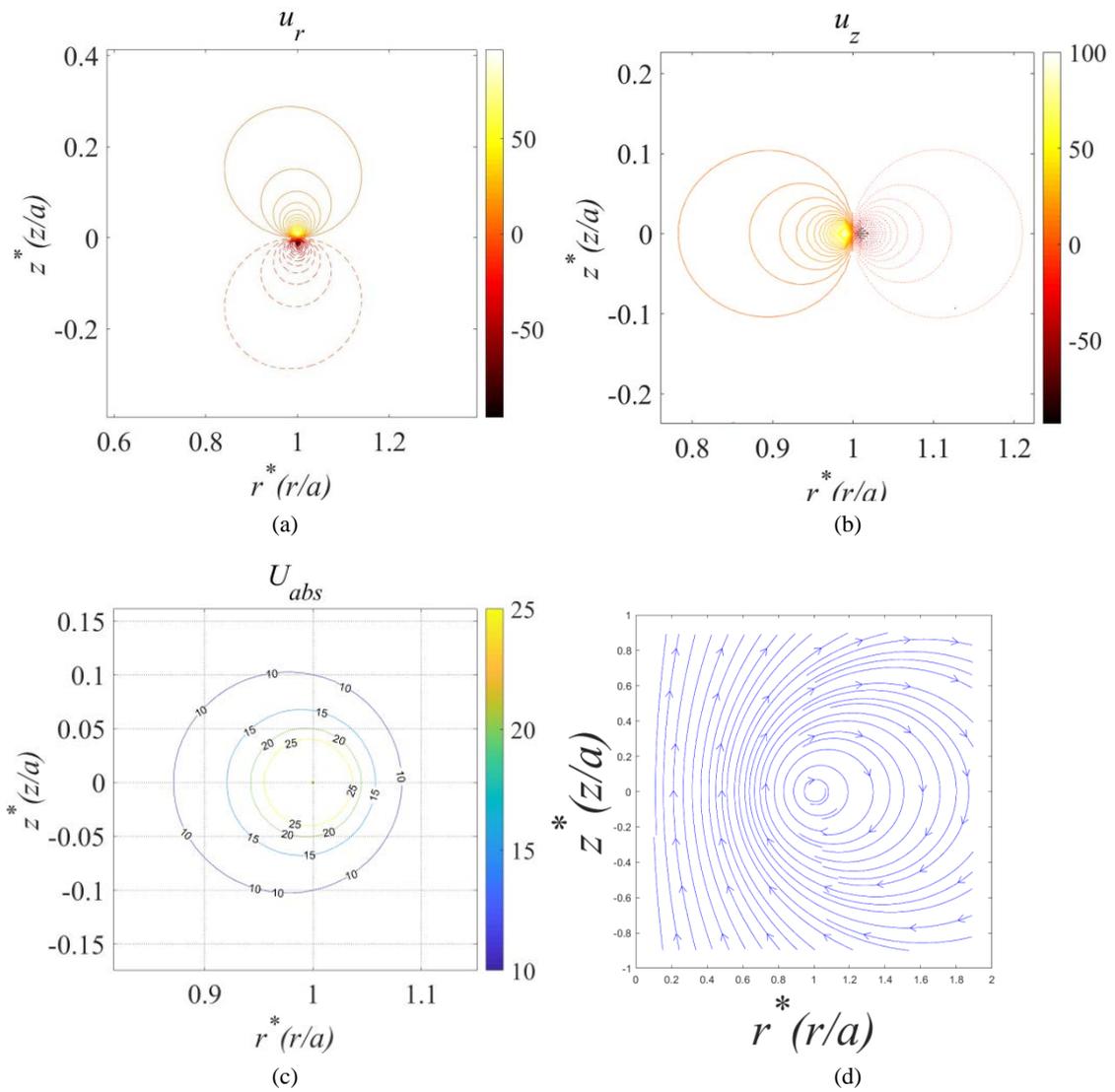
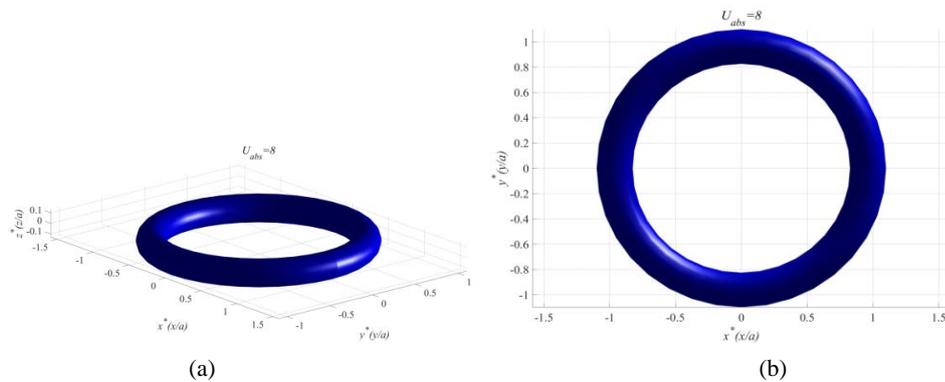


Figure 4. (a) Velocity contour map of u_r ; (b) Velocity contour map of u_z ; (c) A contour plot of the absolute value of velocity for some particular value; (d) The flow chart between u_r and u_z

图 4. (a) u_r 的速度等值线图; (b) u_z 的速度等值线图; (c) 速度绝对值大小某些特定值的等值线图; (d) u_r 和 u_z 的流线图



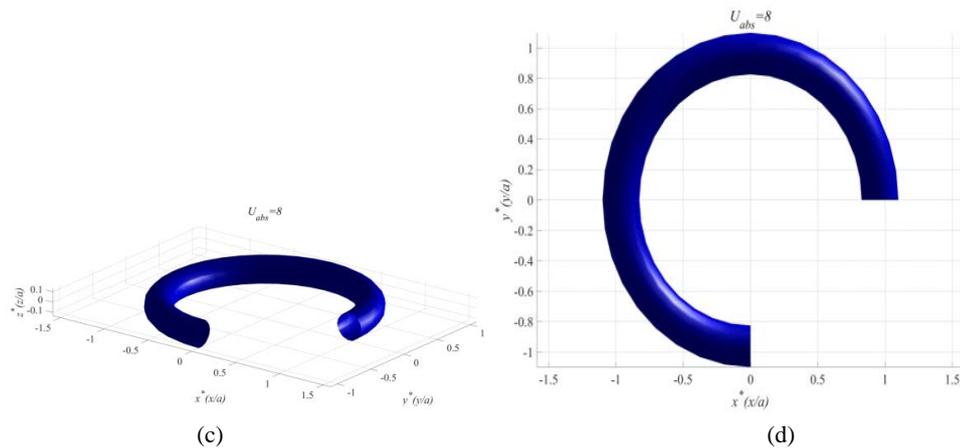


Figure 5. (a) Isosurface of $U_{abs} = 8$; (b) Vertical view of $U_{abs} = 8$; (c) Three quarters of isosurface of $U_{abs} = 8$; (d) Vertical view of three quarters of isosurface of $U_{abs} = 8$

图 5. (a) $U_{abs} = 8$ 的等值面; (b) $U_{abs} = 8$ 的俯视图; (c) $U_{abs} = 8$ 的四分之三的等值面; (d) $U_{abs} = 8$ 的四分之三俯视图

2.3. 坐标轴旋转下的涡环速度场

在正放的涡环模型中，地面坐标系保持不动，将涡环的坐标系沿着 y 轴，也就是沿着 $\theta = 2/\pi$ 顺时针旋转一定的角度 α ，本文采取旋转 30 度，如图 6(a)所示，旋转之后的涡环模型图如图 6(b)所示，图中标示出了地面坐标系和涡环自身坐标系。

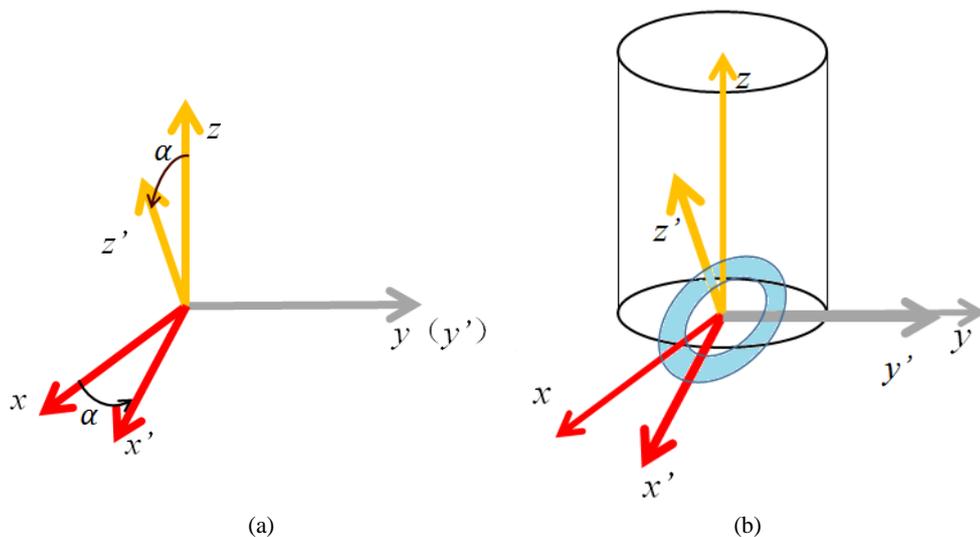


Figure 6. (a) Diagram of axis rotation; (b) Schematic diagram of vortex rings after axis rotation

图 6. (a) 坐标轴旋转示意图; (b) 坐标轴旋转后涡环的示意图

坐标轴旋转之后，可以找到新旧坐标轴之间的关系如下：

$$y' = y \quad (6)$$

$$x' = x \cos \alpha + z \sin \alpha \quad (7)$$

$$z' = z \cos \alpha - x \sin \alpha \quad (8)$$

但是不能直接将上式直接带入使用，需要用新坐标系表示出旧坐标系，如下：

$$y = y' \quad (9)$$

$$x = x' \cos \alpha - z' \sin \alpha \quad (10)$$

$$z = z' \cos \alpha + x' \sin \alpha \quad (11)$$

再将 $\alpha = \pi/6$ 代入上式，再代回涡环速度公式中，在 MATLAB 里进行计算，即可得到坐标轴旋转后涡环的速度绝对值大小的等值面，如图 7 所示。

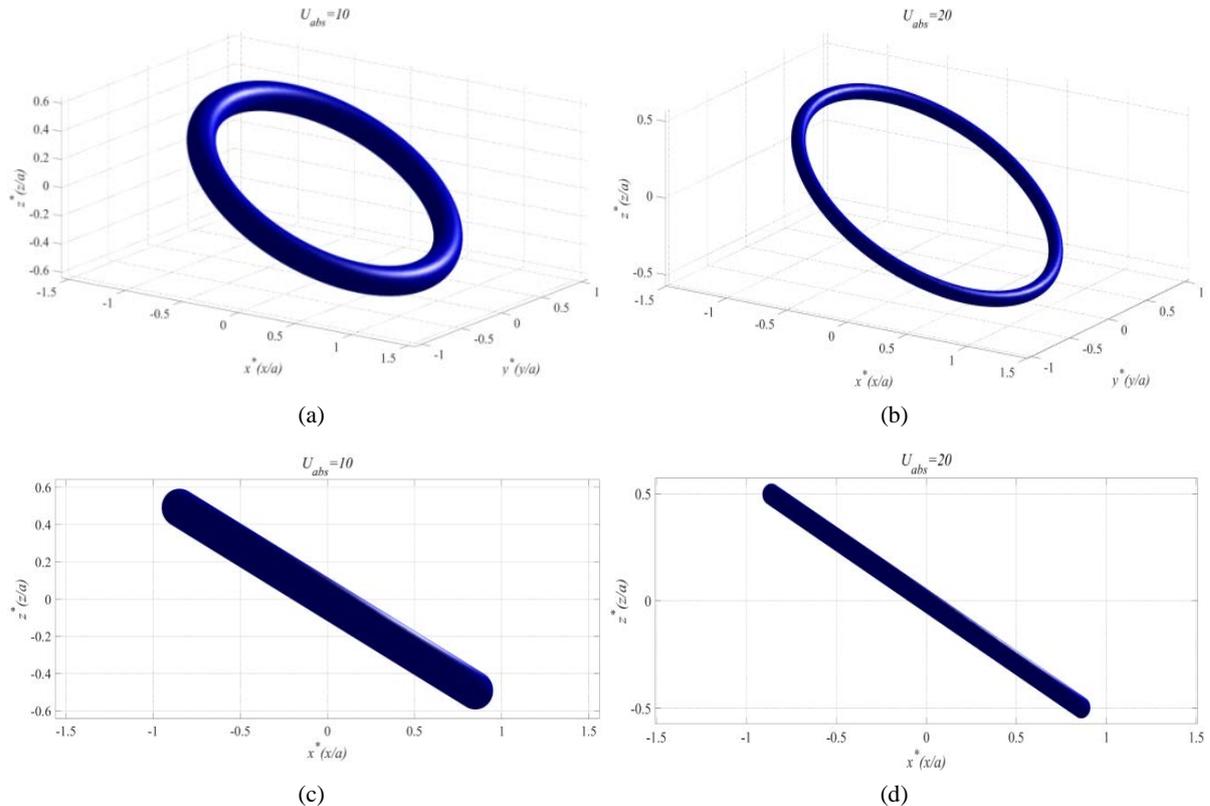


Figure 7. (a) Isosurface of $U_{abs} = 10$; (b) Isosurface of $U_{abs} = 20$; (c) The side view of $U_{abs} = 10$; (d) The side view of $U_{abs} = 20$

图 7. (a) $U_{abs} = 10$ 的等值面; (b) $U_{abs} = 20$ 等值面; (c) $U_{abs} = 10$ 的侧视图; (d) $U_{abs} = 20$ 的侧视图

从上面几张视图可以看出，坐标变换后倾斜的角度为 $\pi/6$ ，且是沿着 y 轴顺时针旋转的，侧面反映出公式的正确性。且 $U_{abs} = 20$ 上的点明显比 $U_{abs} = 10$ 的少，所以其圆环的厚度小于 $U_{abs} = 10$ 的厚度。

2.4. 坐标轴旋转后的涡环不同切面速度分布

在之前的工作介绍了坐标旋转之后的等值面图，现在研究各个切面上速度绝对值大小的分布。坐标系依旧采用柱坐标，在 $r-z$ 平面内，得到不同 θ 下速度的分布。柱坐标与笛卡尔直角坐标系之间的变换关系为： $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ ，将上述坐标变换公式代入此式，再令 θ 等于不同的值，即可得到不同切面的速度绝对值分布。

令 $\theta = 0$ ，切面示意图如图 8 所示：

在 $-2 \text{ m} < z < 2 \text{ m}, 0.1 \text{ m} < r < 1.2 \text{ m}$ 的平面上，引入无量纲量 $r^* = r/a, z^* = z/a$ ，得到在坐标轴旋转后 $\theta = 0$ 的速度分布，与未旋转之前的进行对比，如图 9 所示。

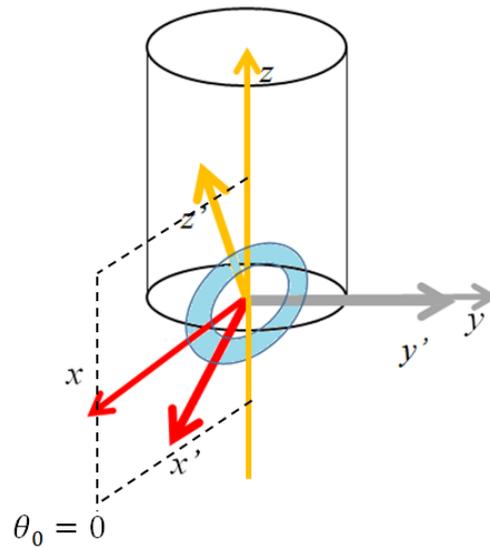


Figure 8. Schematic diagram of velocity field in $\theta = 0$ plane measured after rotation
图 8. 旋转后所测 $\theta = 0$ 平面的速度场示意图

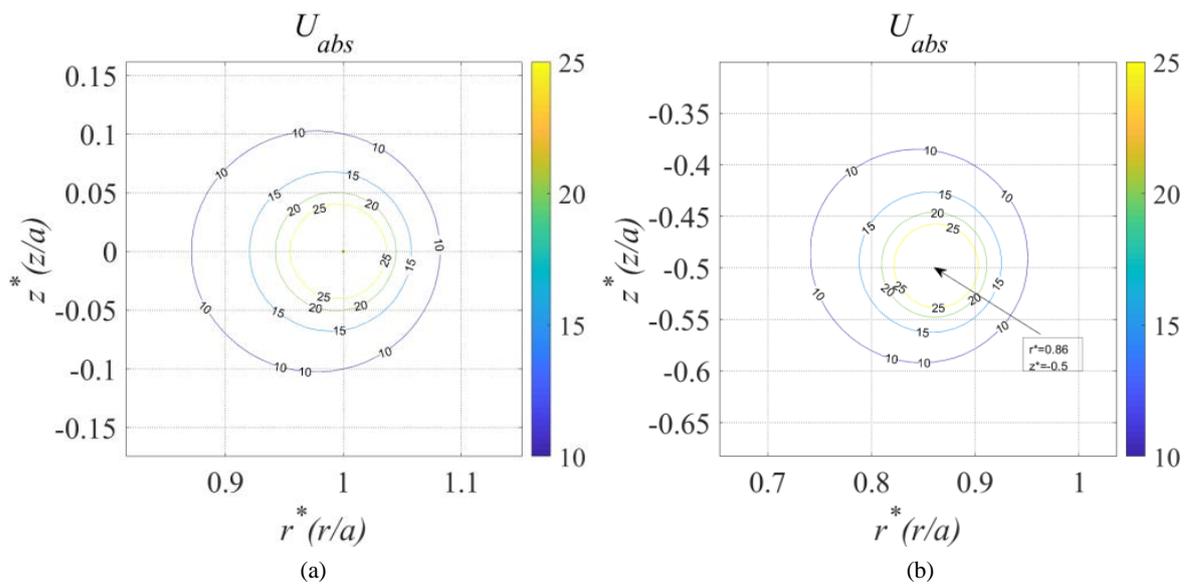


Figure 9. (a) Velocity contour of $\theta = 0$ before rotation; (b) Velocity contour of $\theta = 0$ after rotation
图 9. (a) 未旋转前 $\theta = 0$ 的速度等值线; (b) 旋转后 $\theta = 0$ 的速度等值线

对比前后两次图，可以发现涡核的中心发生了转变，其变化规律满足坐标变换公式。等值线上的点分布也随之发生了改变，旋转之后速度大小的值分布的更广了。

再比较坐标轴旋转之后的 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 这两个对称平面的速度等值线图，如图 10 所示。

从图中可以看出，涡核中心和等值线的分布完全呈对称形式，也证明了旋转之后速度公式的正确性。

令 $\theta = \pi/4$ ，切面示意图如图 11 所示。

从图 12 可以明显的看出，涡核中心随之发生了变化，其变化规律也满足上述的坐标变换公式。在坐标轴倾斜之后涡环速度场通过修改 θ 的值，都可以在 MATLAB 中计算得到任意切面下 r - z 平面内速度绝对值大小的分布。

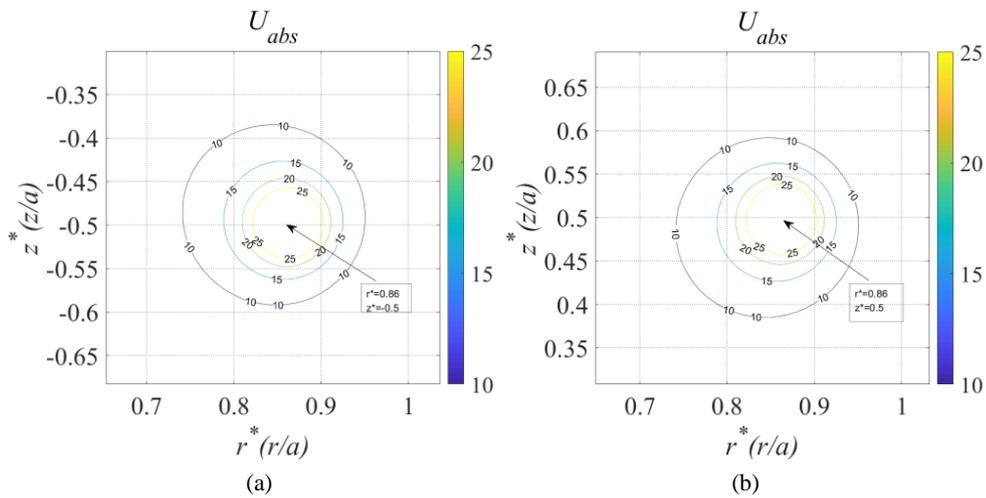


Figure 10. (a) Velocity contour of $\theta = 0$ after rotation; (b) Velocity contour of $\theta = \pi$ after rotation
图 10. (a) 旋转后 $\theta = 0$ 的速度等值线; (b) 旋转后 $\theta = \pi$ 的速度等值线

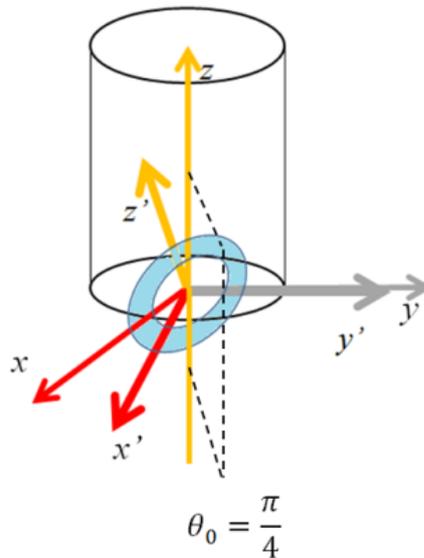


Figure 11. Schematic diagram of velocity field in $\theta = \frac{\pi}{4}$ plane measured after rotation

图 11. 旋转后所测 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 平面的速度场示意图

3. 插值法重构倾斜涡环速度场

假设我们在做 PIV 实验测量旋翼螺旋涡尾迹的时候,通过测量不同方向角下的 $r-z$ 平面上速度大小,如果测量全部的方向角,会增加实验成本以及时间。基于上述要求,可以通过测量几个等分方向角平面内的速度大小,通过插值的方法,得到其他平面内速度的信息,从而重构整个三维流场。

3.1. 插值算法简介

分段三次样条插值: 分段是把区间 $[a, b]$ 分成, $[(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)]$ 共有 $n+1$ 个点, 其中两

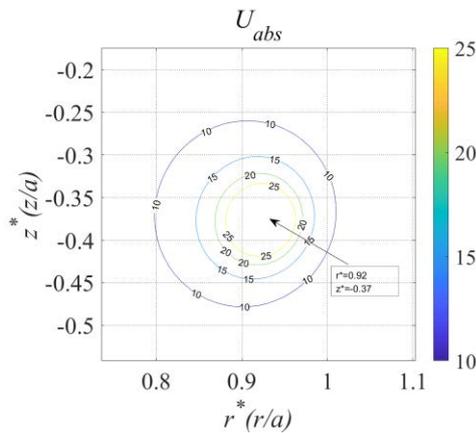


Figure 12. Velocity contour of $\theta = \frac{\pi}{4}$ after rotation

图 12. 旋转后 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 的速度等值线

个端点 $x_0 = a, x_n = b$ 。三次样条就是说每个小区间的曲线是一个三次方程，三次样条方程满足以下条件：

- 1) 满足插值条件，且在节点处函数值相等；
- 2) 插值函数的一阶导数、二阶导数连续。

Hermite 三次插值:与三次样条函数不同点在于 Hermite 插值只需要满足节点处一阶导数连续且相等，所以计算效率优于三次样条插值，但曲线不如其光滑。

在 MATLAB 里直接调用 ‘spline’，即三次样条插值函数的命令以及 ‘pchip’，即 Hermite 三次插值函数命令。

3.2. 插值算法结果与分析

在第二章坐标轴旋转后涡环速度场的讨论后，得到了不同切面下速度大小的分布。现在将 $\theta = 0, \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12$ 这几个点上作为等分区间，用三次样条插值和 Hermite 插值进行插值。以 $\theta = \pi/7$ 为例，从图 13 可以看出，由三次样条插值函数和 Hermite 插值出来的等值线的涡核中心和真实情况由一点偏离，这可能是由于网格点的数量和涡核附近诱导的速度极值差异性较大造成的。等值线形状大致一致，也说明了插值方法的可行性，除了在涡核附近有一些差异，在涡核的中远场区域速度大小都有很好的一致性。

从插值出来的数据显示，只有在涡核附近的点会有一定的误差，所以在涡核中心沿着 r 方向和 z 方向各取 10 个网格点来进行误差分析，如图 14 所示， x 表示从涡核的 r 方向和 z 方向的网格点的个数，可以看出除了在涡核附近几个点误差相对大之外，其他点都有一个很好的一致性。涡核附近会有较大差异是因为选取网格点的数量和间距有关，因为涡核处的速度是趋于无穷大，这个时候网格的精度对数据大小的影响就十分大，所以在涡核处出现较大误差是可以接受的。

从图中可以看出除了在涡核附近几个点误差相对大之外，其他点都有一个很好的一致性。涡核附近会有较大差异是因为选取网格点的数量和间距有关，因为涡核处的速度是趋于无穷大，这个时候网格的精度对数据大小的影响就十分大，所以在涡核处出现较大误差是可以接受的。

图 15 是两种插值方法的相对误差分析，同样在涡核中心沿着上下和左右各取 10 个网格点来进行分析。 x 表示从涡核的 r 方向和 z 方向的网格点的个数。

从相对误差图来看，除了在涡核附近点以外，相对误差大小都在 5%-10%左右，有些点的相对误差甚至为 0，这也证明了误差是在可以接受的范围内。可以人为通过调节网格点数量和间距，使得涡核附近的点的插值精度更高，从而达到更优化。

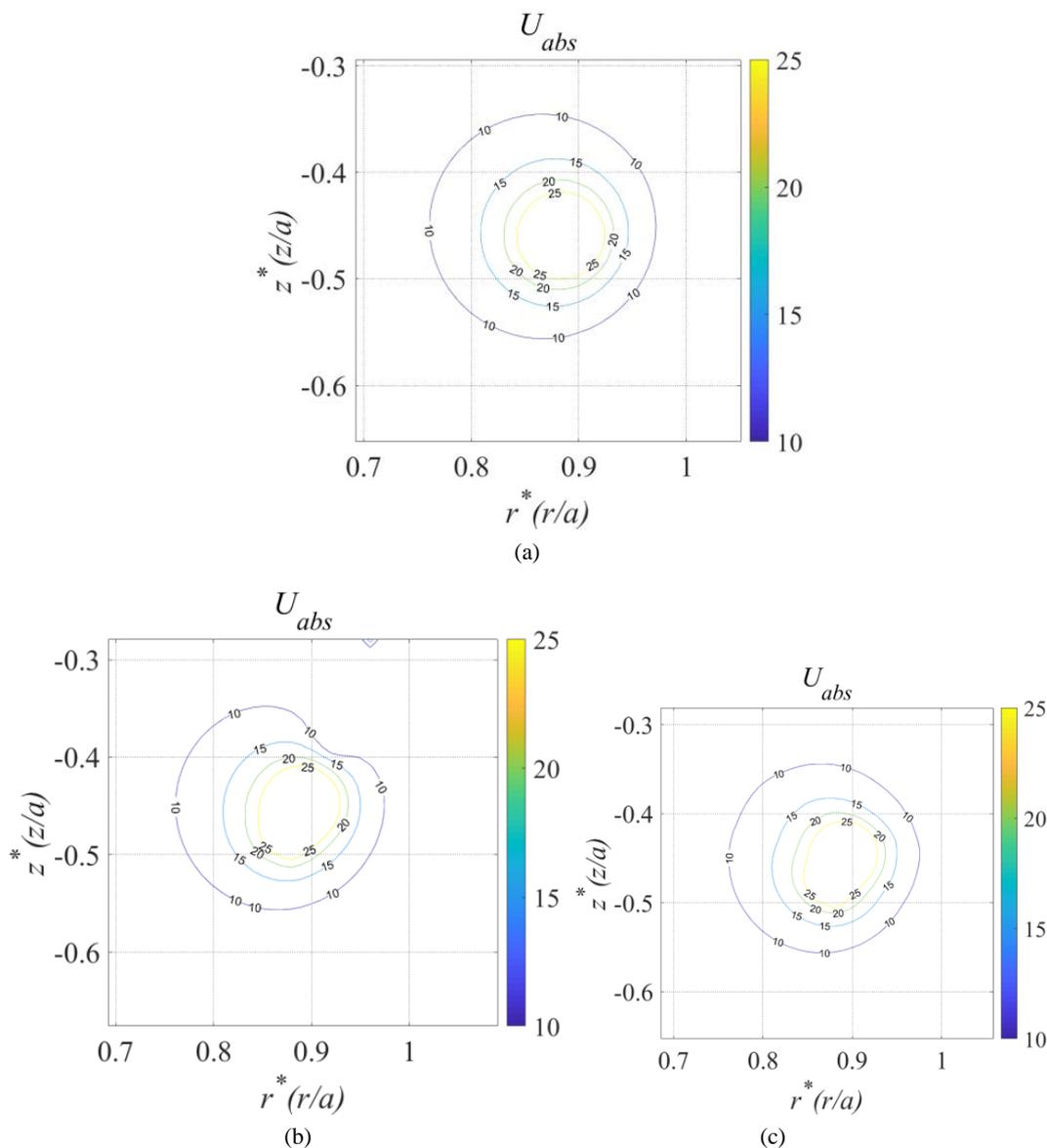


Figure 13. (a) The contour map of $\theta = \frac{\pi}{7}$ obtained from the velocity formula; (b) Contour map obtained by Spline interpolation; (c) Contour map obtained by Hermite interpolation

图 13. (a)由速度公式得的 $\theta = \frac{\pi}{7}$ 的等值线图; (b)由 Spline 插值法得到的等值线图; (c)由 Hermite 插值法得到的等值线图

由上述例子 $\theta = \pi/7$ 的切面上分别用三次样条插值和 Hermite 插值得到速度大小的结果和误差分析来看，用已知几个等分方位角的平面上速度大小通过插值的方法重构整个三维流场是切实可行的。为以后的实验提供了新的思路和理论基础以及可行性的分析。

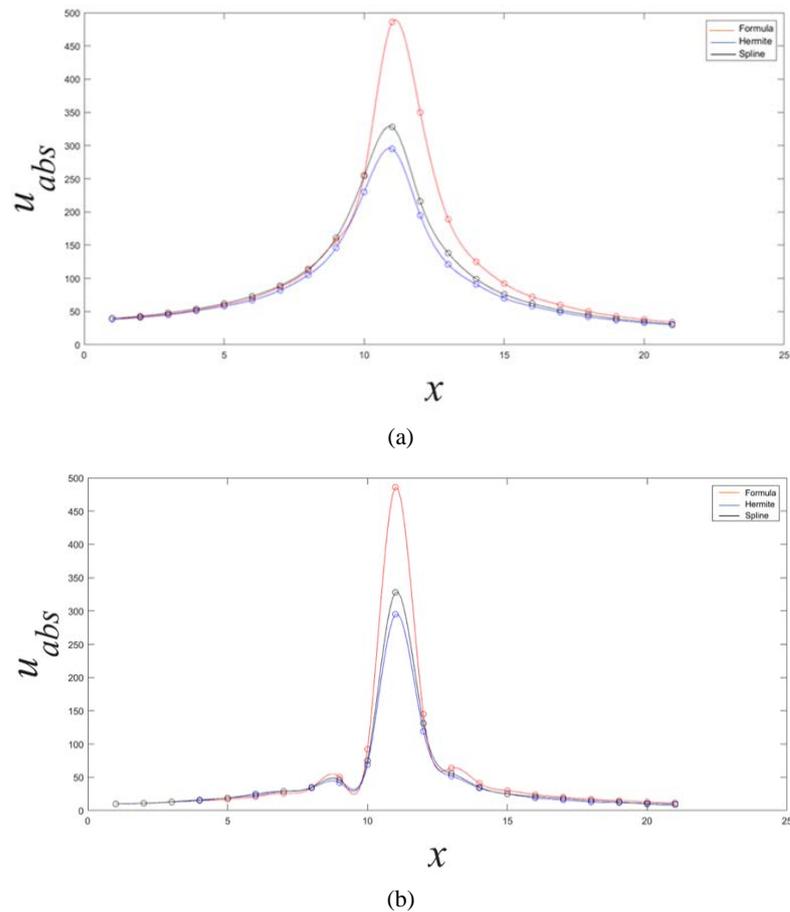


Figure 14. (a) Ten grid points were selected along the r direction of vortex core center for comparison; (b) Ten grid points were selected along the z direction of vortex core center for comparison

图 14. (a) 沿涡核中心的 r 方向各取 10 个网格点进行比较; (b) 沿涡核中心的 z 方向各取 10 个网格点进行比较

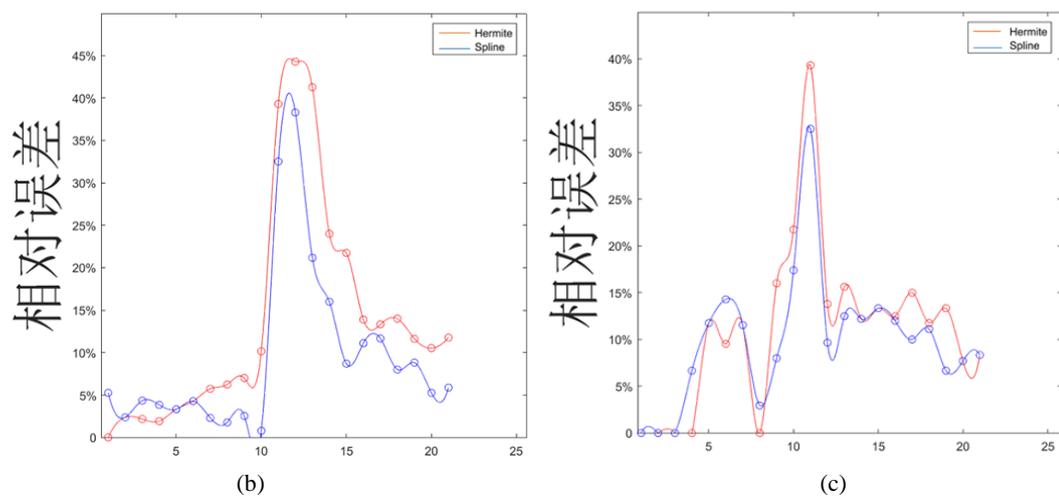


Figure 15. (a) Ten grid points were selected along the r direction of vortex core center for comparison; (b) Ten grid points were selected along the z direction of vortex core center for comparison

图 15. (a) 沿涡核中心的 r 方向各取 10 个网格点进行比较; (b) 沿涡核中心的 z 方向各取 10 个网格点进行比较

4. 结论

本文利用涡环的速度诱导公式, 将坐标轴旋转之后得到新的涡环模型, 利用 Matlab 编程计算出旋转以后的不同速度大小的等值面, 以及各个切面上的速度等值线。利用三次样条插值和 Hermite 插值, 得到其他方位角上的速度大小, 与公式计算得到的真实值比较有较好的一致性, 为立体 PIV 实验测量旋翼尾迹从而通过插值的方法重构三维流场提供了理论模型基础和可行性分析。

参考文献

- [1] Van der Wall, B.G. and Richard, H. (2006) Analysis Methodology for 3C-PIV Data of Rotary Wing Vortices. *Experiments in Fluids*, **40**, 798-812. <https://doi.org/10.1007/s00348-006-0117-x>
- [2] Gmelin, B.L., Heller, H.H., Mercker, E., et al. (1995) The HART Programme: A Quadrilateral Cooperative Research Effort. *51st American Helicopter Society International Annual Forum*, Fort Worth, Texas, 9-11 May 1995, 695-710.
- [3] 袁红刚, 李进学, 杨永东, 王天虹. 悬停状态下旋翼尾迹测量试验研究[J]. *空气动力学学报*, 2010, 28(3): 306-309.
- [4] 李春华, 曹金华, 吴裕平. 直升机旋翼流场特性 PIV 试验分析[J]. *直升机技术*, 2012, 170(1): 6-10.
- [5] Raffel, M., Richard, H. Enrenfried, K., et al. (2004) Recording and Evaluation Methods of PIV Investigations on a Helicopter Rotor Model. *Experiments in Fluids*, **36**, 146-156. <https://doi.org/10.1007/s00348-003-0689-7>
- [6] Okulov, V.L., Sørensen, J.N. and Wood, D.H. (2015) The Rotor Theories by Professor Joukowsky: Vortex Theories. *Progress in Aerospace Sciences*, **73**, 19-46. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2014.10.002>
- [7] Thomson, S.W. (1880) XXIV. Vibrations of a Columnar Vortex. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **10**, 155-168. <https://doi.org/10.1080/14786448008626912>
- [8] Maykopar, G.I. (1969) Studies of Air Propellers: Materials to the History of TsAGI. Moscow Publishing Department of TsAGI, Moscow, 1-13.
- [9] Ricca, R.L. (1994) The Effect of Torsion on the Motion of a Helical Vortex Filament. *Journal of Fluid Mechanics*, **273**, 241-259. <https://doi.org/10.1017/S0022112094001928>
- [10] Hardin, C.J. (1982) The Velocity Field Induced by a Helical Vortex Filament. *The Physics of Fluids*, **25**, 1949-1952. <https://doi.org/10.1063/1.863684>
- [11] Kuibin, P.A. and Okulov, V.L. (1998) Self-Induced Motion and Asymptotic Expansion of the Velocity Field in the Vicinity of a Helical Vortex Filament. *The Physics of Fluids*, **10**, 607-614. <https://doi.org/10.1063/1.869587>
- [12] Joukowsky, N.E. (1912) Vortex Theory of Screw Propeller, I. *Trudy Otdeleniya Fizicheskikh Nauk Obshchestva Lubitelei Estestvoznaniya*, **16**, 1-31.
- [13] Moore, D.W. and Saffman, P.G. (1972) The Motion of a Vortex Filament with Axial Flow. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **272**, 403-429. <https://doi.org/10.1098/rsta.1972.0055>