Creative Education Studies 创新教育研究, 2021, 9(5), 1459-1465
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2021.95244

Hans汉斯

“事件的独立性”教学设计

刘晓燕，李 沫，刘 波

海军航空大学航空基础学院数学教研室，山东 烟台

收稿日期：2021年8月27日；录用日期：2021年10月21日；发布日期：2021年10月28日

摘 要

课堂教学中不但要注重基本理论的论述及推导，更应注重理论部分的引入和应用展示，以及由教学内容延伸出的课程思政。在课堂教学中通过对实际应用案例的讲解，不但能够有效激发学生的学习热情，更能帮助他们进一步理解相关知识要点。同时，在课例设计中注重思政教育的渗透，实现政理有机结合，则是对思想政治理论课程的有效补充。

关键词

独立性，教学设计，课程思政

Instructional Design on the Independence of Events

Xiaoyan Liu, Mo Li, Bo Liu

Naval Aviation University, Yantai Shandong

Received: Aug. 27th, 2021; accepted: Oct. 21st, 2021; published: Oct. 28th, 2021

Abstract

In the classroom teaching, we should not only pay attention to the discussion and deduction of the basic theory, but also pay attention to the introduction and application of the theoretical part and the ideological and political education in professional course teaching. In the classroom teaching, the explanation of practical application cases can not only effectively stimulate students’ enthusiasm for learning, but also help them to understand the key points of relevant knowledge. It is an effective supplement to ideological and political theory curriculum to pay attention to the infiltration of ideological and political education in the course design.

文章引用: 刘晓燕, 李沫, 刘波. “事件的独立性”教学设计[J]. 创新教育研究, 2021, 9(5): 1459-1465.
DOI: 10.12677/ces.2021.95244

Keywords

Independence of Events, Instructional Design, Ideological and Political Education

1. 引言

独立性是概率论和数理统计中非常重要的一个基本概念。在概率论中，事件的独立性为后面学习 n 重伯努利试验等知识奠定了基础，有关随机变量的独立性、分布的可加性、大数定律和中心极限定理等均要用到独立性；在数理统计中，样本的定义、统计量的使用以及抽样分布等也离不开独立这个重要的条件[1] [2] [3]。独立性也是排队论、可靠性理论等其它学科必不可少的重要工具。在实际应用中，独立性的理论也是研究非独立模型的重要基础和工具。因此，20 世纪最有影响力的数学家之一的安德烈•柯尔莫哥洛夫也感叹：“人们发现独立性概念至少是概率论问题真正本质的第一个萌芽”。

知识点“事件的独立性”教学设计的构成主要分为三个层次：两个事件的独立性、三个事件的独立性及 n 个事件的独立性。这三部分由浅入深，层层递进。

2. 问题的引入

“近防炮”是一种舰艇、车辆上使用的近程防空、反导武器系统。只不过由于其炮弹口径较小，杀伤力不足，所以在面对飞行速度极快的来袭导弹时，近防炮只能尽可能地提高射速，采用弹幕的方式进行拦截。因此，对于近防炮发射出的单发子弹来说，它命中率是较低的。

引例 1 现假设“近防炮”发射的每发子弹命中导弹的概率均为 0.004，且是否命中是互不影响的。若系统发射 100 发子弹，求能成功拦截导弹的概率[4]。

分析：设事件 A = {导弹被成功拦截}，A_i = {第 i 发子弹命中导弹}，则所求概率为 $P(A)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100})$。

问题的核心转化为求解多个事件和的概率。对此，考虑将和事件的概率转化为积事件的概率计算问题，再由乘法公式展开

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100})\\&=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)\\&=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_n|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1}).\end{aligned}$$

现在问题又转化成：这些条件概率是多少呢？这些条件概率和相应的无条件概率之间又有什么样的关系呢？

这一问题中事件较多，不妨先考虑与之相关的仅涉及两个事件的引例 2。

引例 2 在装有 3 个红球和 7 个绿球的盒子中有放回的任取一球。设 A，B 分别表示甲，乙取到红球。求：(1) $P(B),P(B|A),P(B|\bar{A})$；(2) $P(A),P(A|B),P(A|\bar{B})$；(3) $P(AB)$.

分析：一般情况下，条件概率与无条件概率是不相等的，即事件 A 的发生与否对事件 B 发生的概率是有影响的。但也很多例外的情形，显然有放回的摸球模型就是其中之一。甲无论取到的是红球还是绿

球，观察完颜色后都要放回，这对于乙之后取红球或绿球的概率一点影响也没有。同样，乙取到红球与否，对于甲取到红球的概率也不会产生影响。

解：(1) $P(B)=P(B|A)=P(B|\bar{A})=\dfrac{3}{10}$;

(2) $P(A)=P(A|B)=P(A|\bar{B})=\dfrac{3}{10}$;

(3) $P(AB)=P(A|B)P(B)=\dfrac{9}{100}$.

由上述结果不难得到 $P(AB)=P(A)P(B)$，即两事件积的概率等于概率之积。之所以出现这样的结果，原因是这两次摸球间没有任何影响，各次结果出现的概率是相对独立的。由此引出两个事件相互独立的概念。

3. 两个事件的独立性

定义 1 设 A，B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A，B 相互独立，简称 A，B 独立。

定理 1 设 A，B 是两事件，若 $P(A)>0$，则 A，B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

证明：若 $P(A)>0$，由条件概率定义知 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

故 A，B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B), \Leftrightarrow P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$.

定理 1 的意义在于，在一定条件下，它可以更直观地表示两事件相互独立，那就是事件 A 发生与否对事件 B 发生的概率毫无影响，它在定义的基础上能够帮助我们更好的理解事件间相互独立的关系。

问题：为什么不直接用 $P(B|A)=P(B)$ 来定义独立性呢？

说明：①定义关于事件 A，B 是对称的，即在定义中 A，B 没有任何区别，满足定义式即能说明 A，B 独立，也能说明 B，A 独立，应用起来更为灵活；

②定理中使用 $P(B|A)=P(B)$ 判断独立性是有前提条件的，要求 $P(A)>0$，适用范围相对小些。

独立性的概念诞生于现实中的独立现象，因此在实际应用中，通过事件的实际意义判断事件间的独立性更为简单、直接——若 A，B 两事件之间没有关联，那么就可以认为它们相互独立。进一步，在实际应用中，有许多事件相互依赖性较小，在误差允许的范围内，它们都可视为独立的，从而方便问题的分析和解决。

比如，“甲的成绩优秀”与“乙的成绩合格”，在不作弊的前提下，我们认为这两件事是独立的；再比如事件“甲患感冒”和“乙患感冒”，这取决于两个人的活动范围，若两个人相距甚远，则可认为这两件事是独立的，但如果甲和乙在同一个房间里，则认为不独立；引例 2 中有放回的摸球模型中，各次结果也是相互独立的，等等。

当然也会存在很多问题，其中事件的独立性由现实意义并不是那么好判断，如例 1。

例 1 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 $A=\{$抽到 K$\}$，$B=\{$抽到的牌是黑色的$\}$。问事件 A，B 是否独立？

分析：一副扑克有 54 张牌，除去大小王还剩 52 张，这 52 张牌中红黑各半都是 26 张。在这 26 张黑

牌中，有两张 K，而 K 的四张牌中有两张是黑色的，因此 A，B 这两个事件是否独立直观上就不是很好判断了。这里可以借助于独立性的定义和定理来进行判断。

解法一 (利用定义 1)由于 $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$， $P(B)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$, 且

$$P(AB)=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}=P(A)P(B),$$

故事件 A，B 独立。

解法二 (利用定理 1) $P(A)=\frac{1}{13}>0$, $P(B)=\frac{1}{2}$, 且

$$P(B\mid A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=P(B),$$

故事件 A，B 独立。

再进一步探究：若两个事件相互独立了，还有什么性质呢？

定理 2 事件 A，B 独立，则下列各对事件也相互独立：

$$A 与 \overline{B}, \overline{A} 与 B, \overline{A} 与 \overline{B}.$$

证明：(只证明其中的一个)

设事件 A，B 相互独立，则有 $P(AB)=P(A)P(B)$, 故

$$\begin{aligned}P\left(A\overline{B}\right)&=P\left(A-AB\right)\\&=P\left(A\right)-P\left(AB\right)\\&=P\left(A\right)-P\left(A\right)P\left(B\right)\\&=P\left(A\right)\left[1-P\left(B\right)\right]\\&=P\left(A\right)P\left(\overline{B}\right).\end{aligned}$$

即 A 与 $\overline{B}$ 相互独立。

定理 2 为我们判断事件的独立性提供了更多的途径：这四对事件中，只要有一对独立，其余三对也独立，即他们互为充要条件(为等价命题)。

以上是两个事件相互独立的有关内容，下面将独立性的概念推广到多个事件的情况。

4. 多个事件的独立性

先以三个事件的相互独立性为例。

定义 2 设 A，B，C 是三个事件，如果满足等式

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\P(BC)=P(B)P(C),\\P(AC)=P(A)P(C),\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C),\end{cases}$$

则称事件 A，B，C 相互独立。

若满足前三个等式，则称事件 A，B，C 两两独立。

猜想：可否仅用前三个等式来刻画三个事件相互独立呢？

DOI: 10.12677/ces.2021.95244

实际上，在大多数情况下由前三个等式可以得到第四个等式是成立的，这种情况在现实问题中也是很常见的，历史上有段时间人们依据现实情况也是这样认为的。直到前苏联数学家伯恩斯坦构造了一个人工的例子，人们才发现仅用前三个等式来定义三个事件独立性的漏洞，然而在现实中仍未找到合理的自然例子。

伯恩斯坦反例：一个均匀的正四面体，第一面染成红色，第二面染成黄色，第三面染成蓝色，而第四面同时染上红、黄、蓝三种颜色。现以 A，B，C 分别记投一次四面体出现红、黄、蓝颜色朝下的事件，问 A，B，C 是否相互独立？

解：由于在四面体中红、黄、蓝分别出现两面，因此

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

同时出现两种颜色，则只有第四面朝下，其概率为

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},$$

则有 $\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}, \\ P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{4}, \\ P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{4}, \end{cases}$ 成立。

故事件 A，B，C 两两独立。

同时出现三种颜色，也只有第四面朝下，其概率为

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C).$$

因此 A，B，C 不相互独立。

说明：通过定义 2 及伯恩斯坦反例可得出对于三个事件相互独立和两两独立之间的关系，即相互独立一定两两独立，反之，不成立。也由此可见，无论是两两独立还是相互独立，定义的条件既不能多也不能少，这也是数学定义简洁精确的具体体现。

由三个事件相互独立的定义不难推广到更一般的情况。

定义 3 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是任意 n 个事件，如果对于任意 $k(2\le k\le n)$ 个事件，任意 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$ 具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。

说明：①定义中的等式较为抽象，将其表示的稍具体一些，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立是指下列关系式同时成立

$$\begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j), 1\le i<j\le n, \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k), 1\le i<j<k\le n, \\ \cdots \\ P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \end{cases}$$

其中涉及的概率等式有 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个，数量很大。因此在实际问题中，独立性的定

义常常不是用来判断事件间的独立性的，而是利用定义式来计算相应的概率。

② n 个事件的独立性也有类似于定理 2 的结论，即“若 n 个事件相互独立，则将 n 个事件中任意多个事件换成它们各自的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立”。这条重要的结论在计算积事件的概率时会经常用到，可大大简化相应的概率计算。

将以上知识点应用于“引例 1”的求解。

引例 1 解：设事件 $A=\{$导弹被成功拦截$\}$，$A_i=\{$第 i 发子弹命中导弹$\}$，则由 $A_1,A_2,\cdots,A_{100}$ 的独立性知 $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\cdots,\bar{A}_{100}$ 也相互独立，故所求概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100})\\&=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)\\&=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)\\&=1-(1-0.004)^{100}\\&\approx 0.33.\end{aligned}$$

但在此处，0.33 的概率太低了，这对于拦截来袭导弹来说显然是不够的。更进一步，若提高拦截概率，为确保以 0.99 的概率拦截导弹，至少要发射多少发子弹？

续解：由已知，$P(A)=1-(1-0.004)^n\geq 0.99$, 故

$$n\geq\frac{\lg(0.01)}{\lg(0.996)}\approx 1149,$$

即为确保有效地拦截来袭导弹，至少要发射 1149 发子弹。

由引例 1 的分析求解进行课程思政。

首先，据国内媒体报道，我国自行研制的近防炮系统打破了西方国家的技术封锁，5 项技术填补了国内空白，其射速已大大超越了 10,000 发/分钟的水平。考虑到引例 1 中求解出的“要有效地拦截来袭导弹至少要发射 1149 发子弹”，从数据上来看，我国自行研制的近防炮系统只需不到 7 秒钟就可实现，实际上它已具了备拦截目前最快的超音速反舰导弹的能力。通过对这一情况的介绍，弘扬我军威和国威，不但坚定了学生们的民族自豪感和对中国特色社会主义道路的信心，也引导他们树立起肩负起实现强军梦与中国梦重担的决心。

其次，在引例 1 的求解中，用客观数据展示：虽然每发子弹命中导弹是小概率事件，但随着发射子弹数量的增加，命中目标就变成了几乎必然的事件。也就是说，小概率事件在试验次数较大时，发生的可能性会变得很大，应用大概率思维来应对它。也就是说，小概率事件并非零概率事件，若从长时段来看，只要具备相关的因素和条件，小概率事件就几乎一定会发生，而它一旦发生，可能会造成大影响，甚至会形成多米诺骨牌效应。

由此借助辩证思维正向引导学生，在平时的生活和学习中不能放弃每一次的努力，要以积极主动的心态去应对每一件哪怕是小概率的事情，坚持往往会产生令人惊喜的结果。同时也启示学生不能孤立、静止地看待小概率事件，不能因其发生的可能性小就放松对其监测、预警和防范。2018 年 1 月 5 日，习近平在新进中央委员会的委员、候补委员和省部级主要领导干部学习贯彻习近平新时代中国特色社会主义思想和党的十九大精神研讨班上强调：“不虑于微，始贻于大；不防于小，终亏大德。”(出自《明太祖实录》，释义：不虑及细小之事，就会酿成大祸；不防范微小之处，终会伤大节、毁大德。)以此警示学生，不要对任何小概率事件抱有侥幸心理，要培养、建立“以大概率思维应对小概率事件”的习惯和机制，尽可能地将隐患消除在萌芽状态——这不是一个多么复杂的道理，尤其在近一年多抗疫的过程中，

大家都应该对此有切身的感受和认知。这就需要我们既善于运用辩证思维、战略思维来预判事物发展趋势，又要善于运用底线思维、概率统计学思维来分析事物发展趋势中的偶然性，发现必然性与多种随机现象之间的联系，从而做好应对各种可能性的准备。

5. 小结

本课例主要采用问题驱动教学模式。首先，以“近防炮拦截来袭导弹”创设问题情境，激发学生的学习兴趣，引导他们主动参与教学；继而分析、提炼出两个事件相互独立的定义，并导出事件独立性的性质；然后，将两个事件独立性的概念推广到三个事件乃至 n 个事件独立性的情况，让学生体会由特殊到一般的逻辑思维过程；最后，运用独立性的概念和性质解决之前提出的问题。这种教学模式不但实现了由实际问题到理论，再由理论解决实际问题的闭环，而且也能有效地培养学生“用数学”的能力。也就是说，课例是按照提出问题－分析问题－解决问题的思路进行设计的，真正做到了以问串教，实现了知识的传授和能力的培养相统一。

除此之外，在课例中引入课程思政的内容，不但能使学生对知识点本身的关注度变高，而且也对他们世界观和价值观的形成有很重要的引导作用，可以从专业的角度引导学生正确看待身边发生的事情，是思想政治理论课程的有效补充。总的来说，本课例既注重知识点本身的讲授，同时也注意知识点与实际案例及相关思政元素的联系，即遵循科学性和思想性相统一，启发性和发展性相统一等教学原则，同时，在课例中自然地引入思政元素能够使学生感觉这种教育不是说教式的，使他们能够更自觉地进行学习，老师也能在良好的课堂氛围中进行教学，讲课也更有激情，这是一个良性的循环。

参考文献

[1] 盛骤, 等. 概率论与数理统计[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] 同济大学应用数学系. 概率统计简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[3] Sheldon M. Ross 概率论基础教程[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010.

[4] 赵鲁涛, 范玉妹, 王萍, 等. 概率论与数理统计教学设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 2015.