Creative Education Studies 创新教育研究, 2021, 9(5), 1397-1403
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2021.95233

“导数的概念”教学设计与实施

王丽英，赵文飞，孙慧静，刘　波

海军航空大学，山东　烟台

收稿日期：2021年9月13日；录用日期：2021年10月19日；发布日期：2021年10月26日

摘　要

导数的概念是微积分学的核心概念，是解决函数问题的一个有利的工具，具有一定的抽象性，如何合理有效地讲解导数的概念，引导学生掌握导数的本质——变化率，是教学设计上的一个重点。本文结合笔者多年的教学经验，给出导数概念的一个具体的教学设计和实施过程。

关键词

导数的概念，教学设计

The Teaching Design and Implementation of the Concept of Derivative

Liying Wang, Wenfei Zhao, Huijing Sun, Bo Liu

Naval Aviation University, Yantai Shandong

Received: Sep. 13th, 2021; accepted: Oct. 19th, 2021; published: Oct. 26th, 2021

Abstract

The concept of derivative is the core concept of calculus. It is a favorable tool for solving functional problems. It has a certain abstraction. How to explain the concept of derivative reasonably and effectively and guide students to grasp the essence of derivative—the rate of change, is an important point in teaching design. This article gives a specific teaching design and implementation process.

Keywords

The Concept of Derivative, Instructional Design

文章引用: 王丽英, 赵文飞, 孙慧静, 刘波. “导数的概念”教学设计与实施[J]. 创新教育研究, 2021, 9(5): 1397-1403.
DOI: 10.12677/ces.2021.95233

1. 引言

导数的概念是高等数学中的一个基本概念，它是对函数知识的深化，对极限知识的发展，是微积分学中的核心概念。近年来，很多学者分别从不同的视角和方向上对导数的概念的教学设计进行了研究[1] [2] [3] [4] [5]。

由于导数概念的本身具备一定的抽象性，本文结合作者多年的授课经验，对导数的概念进行了优化设计。在授课过程中，充分利用多媒体的优势，设置丰富的情境教学，引导学生深刻感受平均变化率到瞬时变化率的逼近过程和曲线的割线到切线的变化过程，让学生能够更加直观地感受无限逼近的数学思想，让抽象的学习过程变得生动有趣，同时引入相应的数学发展史，以此拓展学生的科学文化素养。

2. 教学设计方案

教学过程中，始终坚持以教师的“导”，学生的“学”及教学过程中的“悟”为主线，推动教学过程，揭示教学原理。引入应用案例、数学史及对数学美的赏析，突出数学知识的应用性，采用提问引导、图示讲解和动画演示的教学方法，拓展学员思维，激发学生学习兴趣和探索欲望，促进学生们进一步体会导数的思想及其内涵。

课前准备，提前布置任务，让学生做好 2 项准备：观看舰载机着舰视频和切线变割线的动态变化过程，思考设置的相关问题；课堂实施，引导学生回顾 2 项内容，引出瞬时速度问题和切线斜率问题，通过动画演示，引导和启发学生去发现两个问题的共性，引出导数的定义，分析导数的实质并利用导数的定义计算函数在一点处的导数，为了探索新知，给出导数的几何意义，学以致用，启发学生根据导数的几何意义探讨其在军事上的应用，实现导数概念的感性认识到理性认识的升华。

3. 教学实施过程

3.1. 创设情境，导入新课，激发学生学习兴趣

实例 1 变速直线运动物体的瞬时速度问题：一物体作变速直线运动，位移函数为 $S=S(t)$，求物体在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$。

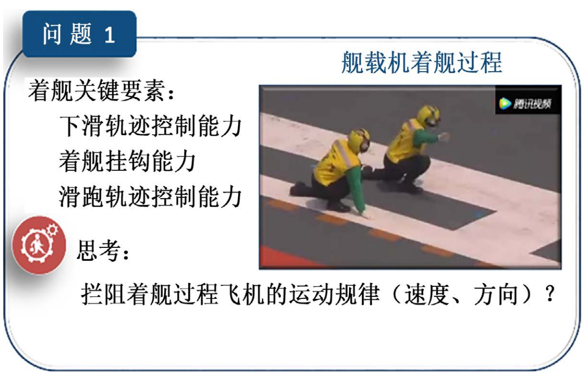

Figure 1. Problem 1
图 1. 问题 1

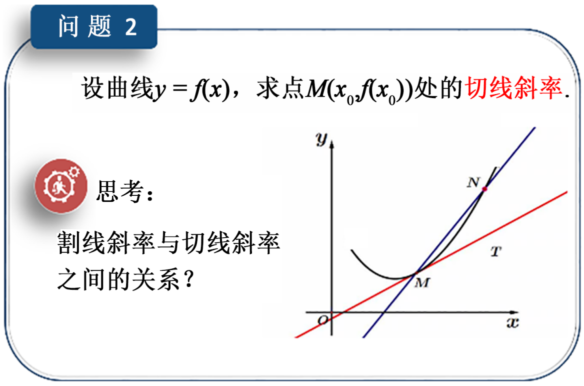

Figure 2. Problem 2
图 2. 问题 2

(设计思路：针对授课对象，为激发学生的学习兴趣，选取了相应的军事背景作为课程的引入——舰载机在拦阻着舰过程中的运动规律，如图 1 所示。首先与学生一起观看歼 15 舰载机在辽宁舰上的拦阻降落过程的视频，对其着舰过程进行简单分析，在忽略其他因素的影响，仅从数学角度来看，可以将舰载机的运动规律看作：变速直线运动，得出结论之后，继续引导学生并提出问题：对于飞行员来说，着舰前速度大小的控制也是十分重要的！在整个飞行过程中，平视显示器上会清晰的显示出舰载机在每个时刻的速度，即飞机在该时刻的瞬时速度。问题：如何从数学上求出舰载机在任意时刻的速度？)

解决思路：从平均速度过渡到瞬时速度。

分析：①根据中学的知识，物体在t_0时刻附近一小段时间内的平均速度为

$$\overline{v}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S\left(t_0+\Delta t\right)-S\left(t_0\right)}{\Delta t}.$$

②利用极限思想实现平均速度到瞬时速度的过渡。当时间间隔Δt很小时，$t_0+\Delta t$和t_0非常接近，可将Δt时间内物体的运动近似看做，如图 2：匀速直线运动，t_0时刻的瞬时速度就近似等于该段时间内的平均速度$\overline{v}$，近似的精度取决于Δt，Δt越小，近似精度越高。引导学生回顾第一章中学习过的极限思想——刘辉的割圆术，如图 3。它体现了用近似逼近精确的过程，利用极限思想实现了近似值到精确值的转化！

③总结求解过程，首先求出t_0时刻附近一小段时间内的平均速度；其次，对平均速度取极限，实现近似值到精确值的转化。

回归军事引入，如果舰载机着舰过程中的位移函数$S(t)$是已知的，那么通过上述方法即可求得飞机在任意时刻的瞬时速度了。

实例 2 曲线在一点处的切线问题

(设计思路：观看曲线上一点处割线变切线的动态变化过程，如图 4，思考割线斜率与切线斜率之间的关系，进一步得到切线的定义)

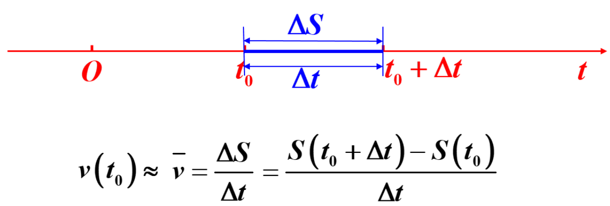

Figure 3. Instantaneous velocity variation diagram
图 3. 瞬时速度变化图

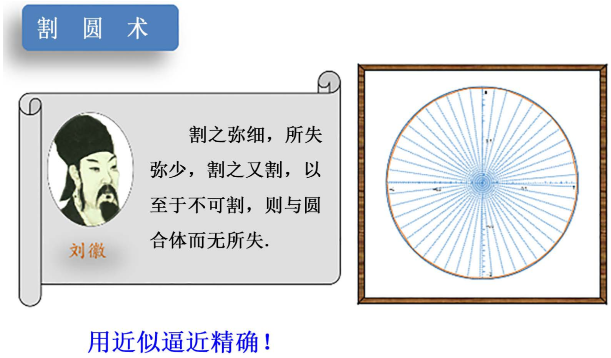

Figure 4. Cutting circl
图 4. 割圆术

①穿插数学史，培养学生的科学文化素养。历史上关于切线，古希腊的学者们将其定义为与曲线有且只有一个交点的直线。这一定义只对一些特殊曲线正确，而对一般曲线就不合适了，比如正弦曲线。当时大大小小的数学家对这个问题进行了很多的研究。最终由德国数学家莱布尼兹在这些研究的基础上给出了切线的定义——求切线就是画一条连接曲线上距离为无穷小的两点的直线！

②引导学生结合极限理论，给出切线的严格数学定义。切线：当点 N 沿着曲线无限接近于 M 点时，割线 MN 的极限位置。于是，得到了切线斜率即割线斜率的极限。

③总结求解过程，首先求割线斜率，$k_{MN}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；其次，对割线斜率求极限，即

$$k_{MT}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

引导学生去发现这两个问题的共性，如图 5，进而总结出导数的定义。

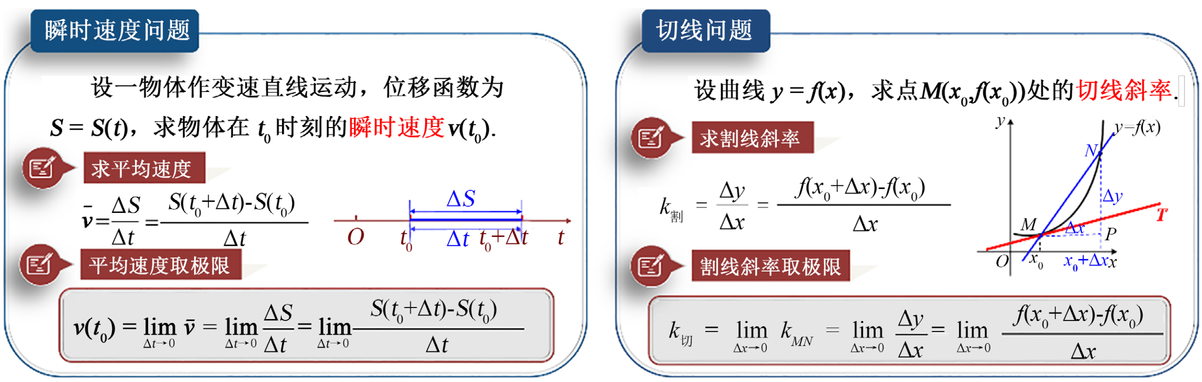

Figure 5. Comparison diagram
图 5. 对比图

虽然一个是物理问题，一个是几何问题，背景不同，但求解思路却完全一致：

首先，从研究方法上看，都是将一点的问题，扩展到一个小区间上去研究，得到问题的近似解，然后通过取极限求得问题得精确解！这种以不变代变，用近似逼近精确的研究方法是科学研究的一种重要方法，充满着辩证法的思想。

其次，从结果形式上看，所求量都是一种特殊形式的极限—增量之比的极限。第一个极限：路程增量与时间增量之比，第二个极限是：纵坐标增量与横坐标增量之比。不论是路程增量还是纵坐标增量，

表示的都是函数增量，而时间增量和横坐标增量表示的则是自变量增量，因此这两个增量之比的极限，其数学本质是函数增量与自变量增量之比，当自变量增量趋向于 0 时的极限。

3.2. 导数的定义

在数学上，将上述增量之比抽象出来，上升为数学概念，即导数。

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义；若这种增量之比的极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数。记为 $y'|_{x=x_0}$，$f'(x_0)$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或者 $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$。

①介绍导数起源和导数符号的历史背景，拓展学生的知识面，激发学生的学习兴趣，丰富学生的数学文化素养。

导数是微积分的核心概念，它最早是由法国数学家费马于 1962 年在研究切线和极值的问题中提出的。随着 17 世纪上半叶工业革命的兴起，蓬勃发展的自然科学面临着四类亟待解决的问题：瞬时速度及其逆问题；因透镜的设计需要而面临的切线问题；炮弹最远射程及确定近日点远日点的最值问题；与求体积、面积相关的求和问题。那个时期，几乎所有的数学大师，都在致力于解决这些数学难题！作为微积分的发明者和奠基人牛顿和莱布尼兹分别从物理学和几何学的角度提出了导数的概念。这种变化率问题在自然科学、工程实际应用以及大家后续的专业课程中有着广泛的应用，如角速度、加速度、功率、机械特性等。

记号 $y'|_{x=x_0}$，$f'(x_0)$ 是由 Lagrange 给出的，记号 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 则是由被称为“数学符号大师”的法国数学家莱布尼兹给出的，这两种记号一直沿用至今。

②剖析概念的内涵，加深学生对概念的理解

首先，定义的核心是：当这种函数增量与自变量增量之比当自变量增量趋向于 0 时的极限存在时，才称函数在 x_0 点可导，将这个极限称为函数在 x_0 点的导数！即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

其次，函数增量与自变量增量之比，在数量关系上表示的是函数 $f(x)$ 在以 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 为端点的一个区间上的平均变化率。求极限之后，表示的则是函数 $f(x)$ 在 x_0 点的瞬时变化率，即导数是研究函数在一点的瞬时变化率问题的，它反映了在该点处因变量随自变量的变化而变化的快慢程度。

③首尾呼应，给出导数的物理意义和几何意义

瞬时速度 $v(t_0)$ 就是位移函数 $S(t)$ 在 t_0 时刻的导数，反映了位移函数在 t_0 时刻的变化快慢的程度；

曲线在 x_0 点处的切线斜率就是曲线函数 $f(x)$ 在 x_0 点的导数，反映了曲线在 x_0 点变化快慢的程度。

3.3. 导数概念的拓展

①利用单侧极限建立单侧导数的定义，进而得到函数在一点可导的充要条件

左导数： $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数： $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

②数形结合，给出导函数的定义

如果函数 $f(x)$ 在开区间内 I 的每一点都可导，就称函数在开区间内是可导的。进一步，如果对于开

区间内的任意一点 x，都对应着一个确定的导数值 $f'(x)$，这样就构成了一个新的函数，这个函数就叫做原来函数 $y=f(x)$ 的导函数，记为 $y', f'(x), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或者 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

引导学生分析函数在一点可导与导函数在该点值之间的关系：当给定的 x_0 为开区间内的点时，函数在该点处的导数 $f'(x_0)$ 便等于导函数在该点处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$。

3.4. 实例加深学生对概念的理解

①中学阶段已经学习了部分初等函数的导数公式，如正弦函数、余弦函数、指数函数等！但学生们基本上只停留在公式的套用阶段，并不知道公式是如何得来的。引导学生根据本节课所学内容推导一个基本初等函数的导数公式。同时渗透思政教育：进入大学，需要及时转变学习观念，不仅要知其然，还要知其所以然！

例 1 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导函数。

分析：引导学生根据所学内容，总结根据定义求导数的步骤，简称为“求导三部曲”，即

一求增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

二算比值：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

三求极限：$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x$

②学以致用，探讨导数在生活中和军事中的应用

生活中旋转的雨伞，雨滴离开雨伞的瞬间正是沿着雨伞旋转轨迹的切线防线飞出去的。投掷铅球时，投掷方向正是铅球运动轨迹在刚刚出手时的切线方向，如图 6。这些与导数的几何意义相关。

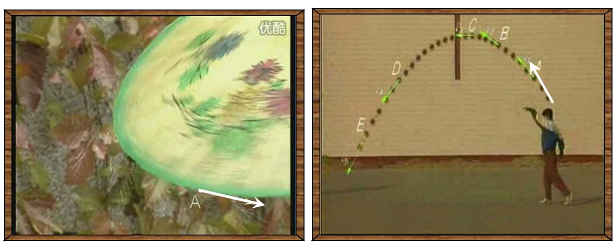

Figure 6. Spinning umbrella and Throwing Shot
图 6. 旋转的雨伞和抛掷铅球

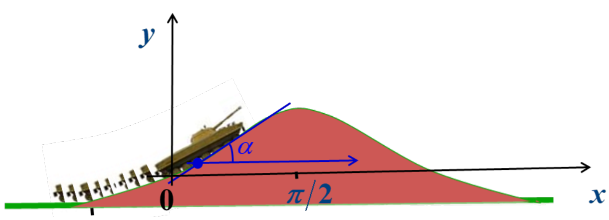

Figure 7. Tank climbing
图 7. 坦克爬坡

实际上，在军事应用中，切线也经常用到，如舰载机离舰的瞬间，坦克的爬坡训练等等。坦克号称陆地之王，具备快速的机动性能、稳定的火控系统和超强的爬坡能力。如果忽略坦克自身的性能，仅从数学的角度来看，坦克的爬坡能力在一定程度上取决于坦克能爬过山坡的最大倾斜角。而目前一般主战坦克最大爬坡角度在 30 度左右。坦克爬坡问题抽象出来的数学问题如下：

例 2 已知某型坦克的最大爬坡角度为 30 度，在执行任务时，需要爬过一个山坡，如图 7 所示，上坡截面的边界曲线方程为 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}\sin x, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，问坦克能否沿着边界爬过这个山坡？

分析：坦克能否爬过这个山坡取决于各点处山坡的倾斜角也就是山坡曲线在各点处的切线倾角是否小于三十度。根据今天所学知识，我们知道切线倾角 α 的正切值，也就是切线斜率，就等于山坡曲线该点处的导数。而山坡曲线 $f\left(x\right)$ 已知，因此求导就能求出 $\tan\alpha$ 的表达式，进而求出 α 的范围了。

解：设山坡上 x 点处切线倾角为 α (不妨假设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$)，由导数的几何意义知，$\tan\alpha = f'\left(x\right)$，即

$$\tan\alpha = f'\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}\sin x\right)'=\frac{1}{3}\cos x.$$

由题设条件，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，因此 $0\le\cos x\le 1$。于是 $\tan 0=0\le\tan\alpha\le\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因此得出 α 的范围 $0\le\alpha<\dfrac{\pi}{6}$，山坡倾斜角小于三十度，因此坦克能爬上山坡。

4. 结束语

本文通过创设情境，让学生经历比较分析、抽象概括等思维过程，感受数学来源于生活，服务于生活，体会概念的形成过程；以问题为牵引，类比归纳了两类问题的共性，利用极限思想给出了函数在一点处的导数及导函数的定义，加深学生对概念的理解；分析了导数的几何意义，学以致用，探讨了它在军事上的应用，实现导数概念的感性认识到理性认识的升华。

参考文献

[1] 方喆. 信息化手段下的高等数学课程教学改革探索[J]. 河北软件职业技术学院学报, 2020, 22(1): 60-63.

[2] 曲元海，于梅菊，等. 基于高等数学核心素养的教学设计——以导数概念为例[J]. 通化师范学院学报，2020, 41(4): 100-103.

[3] 温泉. 基于 APOS 理论的导数概念教学研究[D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 河北师范大学, 2020.

[4] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[5] 邓增玉. 浅议导数的概念[J]. 数学教育研究, 2011(50): 102.