Creative Education Studies 创新教育研究, 2023, 11(1), 137-144
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2023.111023

Hans汉斯

基于问题解决的高中数学新授课教学设计

——以《抛物线的标准方程》为例

王慧慧，曹学锋，王雨萱

黄冈师范学院，湖北 黄冈

收稿日期：2022年12月5日；录用日期：2023年1月23日；发布日期：2023年1月29日

摘 要

问题解决是当今数学教育界所关注的热点，是数学改革的一个突破口，是数学教育发展的新趋势。问题解决能力是学生从数学的角度提出问题、理解问题并能综合运用所学的知识和技能解决问题的能力，其培养贯穿在数学课堂教学的始终。本文以“抛物线的标准方程”的教学设计为例，从教学思路、案例描述、教学反思等三个方面阐述如何在新授课教学中培养学生的问题解决能力。

关键词

问题解决，抛物线，教学设计

High School Mathematics Teaching Design Based on Problem Solving

—Taking the Standard Equation of a Parabola as an Example

Huihui Wang, Xuefeng Cao,Yuxuan Wang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Dec. 5th, 2022; accepted: Jan. 23rd, 2023; published: Jan. 29th, 2023

Abstract

Problem-solving is the focus of today’s mathematics education circle, is a breakthrough of mathematics reform, is the new trend of mathematics education development. Problem solving ability is the ability of students to put forward and understand problems from the perspective of mathematics, and to comprehensively apply the knowledge and skills they have learned to solve problems. The cultivation of problem solving ability runs through the whole mathematics classroom

文章引用: 王慧慧，曹学锋，王雨萱. 基于问题解决的高中数学新授课教学设计[J]. 创新教育研究，2023，11(1): 137-144. DOI: 10.12677/ces.2023.111023

teaching. Taking the teaching design of “the standard equation of parabola” as an example, this paper expounds on how to cultivate students’ problem-solving ability in the new teaching from three aspects, such as teaching idea, case description and teaching reflection.

Keywords

Problem Solving, A Parabola, Design of Teaching

1. 引言

问题解决是当今国内外数学教育界所关注的热点，将其和数学课程紧密相连，作为数学教学改革的一个突破口，成为国际数学教育发展的一个趋势[1]。基于问题解决的教学是从问题情境出发，以数学思想方法为线索，以问题解决为目的，使数学成为数学活动的教学，数学思维的教学，再创造再发现的教学[2]。问题解决能力的培养就是培养学生从数学的角度提出问题、理解问题并能综合运用所学的知识和技能解决问题。学生问题解决能力的培养贯穿在数学课堂教学的始终，本文以“抛物线的标准方程”为例，从教学思路、案例描述、教学反思等三个方面阐述如何在新授课教学中培养学生的问题解决能力。

2. 高中数学新授课问题解决教学思路

2.1. 创设情境，激发学生学习兴趣

创设问题情境，激发学生的学习兴趣是问题解决教学的开始。在问题解决教学中创设问题情境的目的在于激发学生渴求学习数学知识的心理状态，促进学生对数学学习的全部投入以到达最佳的教学效果。问题情境的创设不仅要考虑学生的认知结构，知识基础也还要考虑问题的可持续性探究价值，确保问题探究的延续性。

2.2. 师生互动，激活课堂激活问题

创设问题情境，激发学生的学习兴趣是问题解决教学的开始。在问题解决教学中创设问题情境的目的在于激发学生渴求学习数学知识的心理状态，促进学生对数学学习的全部投入以到达最佳的教学效果[3]。问题情境的创设不仅要考虑学生的认知结构，知识基础也还要考虑问题的可持续性探究价值，确保问题探究的延续性。

2.3. 合作学习，交流分析解决问题

教师在教学中激发兴趣，激活问题，都是为学生参与问题解决创造条件。新授课学生参与问题解决可以采用合作学习的方式进行。合作学习问题解决包括合作学习与问题解决两个过程。前者指向问题解决中的数学交流，旨在合作学习分析问题的过程中培养学生的表达能力、交往能力与自我反思能力；后者强调问题解决中的主体参与，小组合作分析问题之后需要小组成员独立完成问题解决，旨在培养学生信息整合、迁移应用以及方案的执行能力。

3. 教学设计

3.1. 创设情境，问题提出

出示篮球在空中划过的路线图、石拱桥图片。

问题：这些图片中我们之前学习的哪种曲线？

生：抛物线。

问题：(出示手电筒与太阳灶图片)手电筒的内壁和太阳灶的内壁上有抛物线吗？

问题：那抛物线上的点有什么几何特征呢？

设计意图：出示篮球在空中划过的路线、石拱桥图片让学生在观察其中的抛物线，引导学生感受抛物线在现实中的应用。紧接着通过提问学生思考学生发现手电筒和太阳灶的内壁所在平面与轴面的交线为抛物线，此时，教师已将抛物线的现实背景引进学生的认知中，通过提问：抛物线上的点有何几何特征？将数学问题融入现实背景生成问题情境，学生对抛物线的形状有了直观的感受，但对于抛物线上点有什么几何特征却满是疑惑，充分激发学生的探究欲望，为问题解决做铺垫。

3.2. 动手实践，探究新知

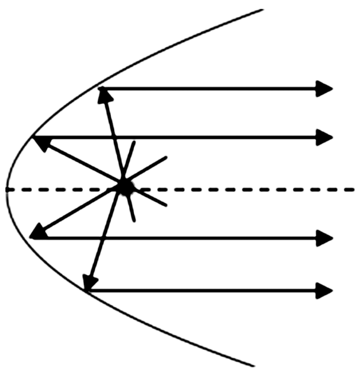


Figure 1. Light reflection diagram of inner wall section of flashlight
图 1. 电筒内壁截面光线反射图

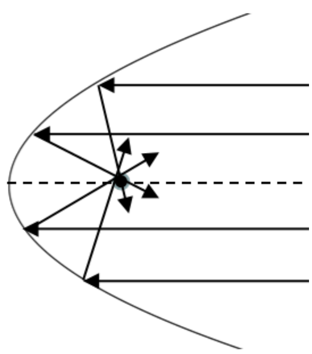


Figure 2. Light reflection diagram of the cross section of the inner wall of a flashlight illuminated by parallel rays
图 2. 平行光线照射手电筒内壁截面面光线反射图

通过演示观察手电筒内这一小灯泡发出的灯光经过抛物面的反射后形成了一束平行光线，如图 1 引导学生根据光的反射原理得到，用一束平行于对称轴的光线去照手电筒的内壁，所有的光线经过抛物面的反射都会落在手电筒的小电灯泡上，如图 2 顺势引出焦点，从物理现象加深学生对焦点的认知。

问题 1：那么，这其中蕴含着怎样的数学原理呢？

问题 2：从抛物面的聚光现象，你可以联想到哪些物理知识？

生：镜面反射。

追问：除了镜面反射还能想到什么物理知识？

生：镜面成像。

师：很好！通过镜面反射使得平行于抛物面对称轴的一组光线都落到焦点 F 上，那我们尝试找到焦点 F 的像。

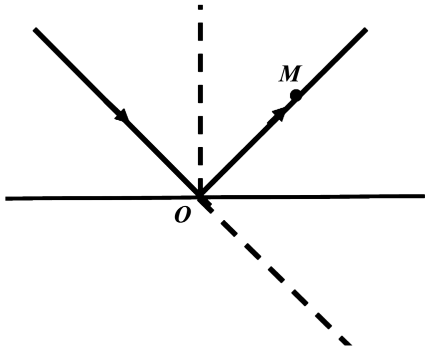


Figure 3. Specular reflection of light
图 3. 光的镜面反射图

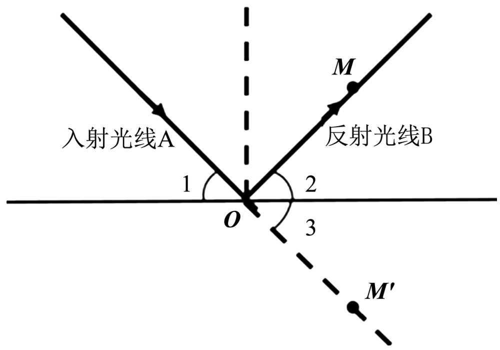


Figure 4. Specular reflection of light
图 4. 光的镜面反射图

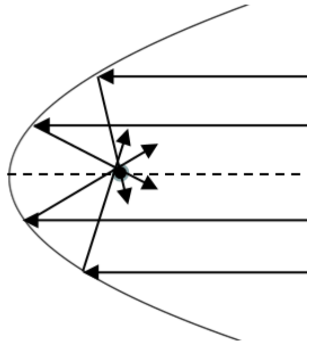


Figure 5. Light reflection diagram of a cross-section surface of a parabolic inner wall illuminated by parallel rays
图 5. 平行光线照射抛物面内壁截面面光线反射图

问题 3：如图 3，回想在平面反射中，如何做出点 M 像呢？

生：如图 4 通过镜面做入射光线 AO 的延长线，因为 $\angle 1=\angle 2$ (入射角等于反射角)，$\angle 1=\angle 3$ (对顶角相等)，所以 $\angle 2=\angle 3$，所以，AO 的延长线与 OB 关于镜面对称，在 AO 的延长线上取 $OM'=OM$，则点 M'为 M 的像。

探究：运用同样的方法，尝试做出图 5 中每一组入射光线与相对应的反射光线关于焦点 F 的像，观察它们有何特征？

生：焦点 F 的像在同一条直线上(如图 6)。

追问：把焦点 F 的像所在的直线记作直线 l，你能通过刚刚作图发现抛物线上的点满足什么样的等量关系吗？

生：抛物线上的点到焦点的距离与到直线 l 的距离相等。

师：非常好！让我们用几何画板画出具有这一几何特征的图形，观察它们是否为抛物线(如图 7)。拖动 F 点，观察点 F 点要满足什么条件，才能形成抛物线？

生：点 F 不能在直线 l 上。

师：我们把符合这一特征的点形成的轨迹就叫做抛物线，即平面内与一定点 F 和一定直线 l (l 不经过 F)的距离相等的点轨迹叫做抛物线，点 F 叫做抛物线的焦点，直线 l 叫做抛物线的准线。

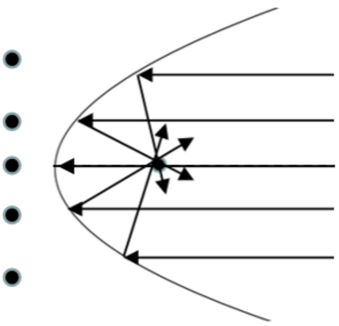


Figure 6. The image of a point on a parabola with respect to the focus
图 6. 物线上点关于焦点的像所成图

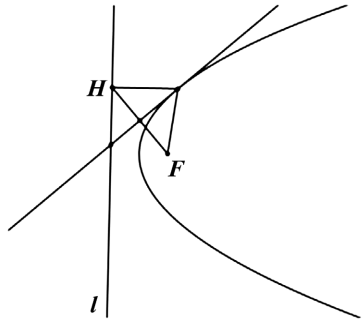


Figure 7. A geometric drawing board makes a parabola
图 7. 几何画板做抛物线图

设计意图：这一阶段教师通过不断地提出问题，引导学生思考，调动学生已有的物理知识，通过做焦点关于每条入射光线的像的过程感受到了抛物线上点满足的几何特征。培养学生问题解决所需要的感知情境、知识迁移与应用的能力。

3.3. 合作探究，建构概念

问题 1：如何求抛物线的方程？

追问 1：求曲线方程的步骤是？

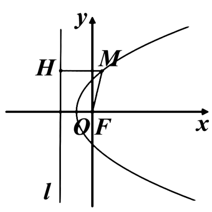
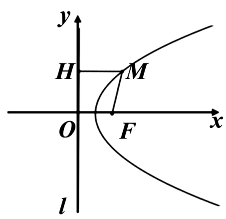
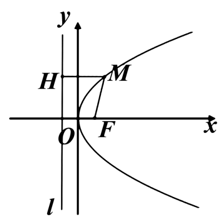
生：1) 建系；2) 设点坐标；3) 列等式；4) 化简。

追问 2：那么如何建立直角坐标系呢？

合作任务 1：设焦点到定直线 l 的距离为 p，每个小组自行商定选择自己的建系方式，写出点的坐标，列出等式，化简，求出点的轨迹方程。

教师观察各个小组合作学习情况，有问题时可单独指导，等各小组选定自己的建系方式后，鼓励学生到讲台上展示。讲台上的同学遇到问题时可求助同一小组学生给予帮助。整理后，见表 1。

Table 1. System resulting data of standard experiment
表 1. 3 种建系方式下的抛物线方程

		
焦点坐标 $F(0,0)$ 准线 l 方程 $x=-p$ 轨迹方程： $y^2=2px+p^2(p>0)$	焦点坐标 $F(p,0)$ 准线 l 方程 $x=0$ 轨迹方程： $y^2=2px-p^2(p>0)$	焦点坐标 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 准线 l 方程 $x=-\frac{p}{2}$ 轨迹方程： $y^2=2px(p>0)$

追问 3：你们会选择哪种建系方式所得的方程作为抛物线的标准方程呢？为什么呢？

生：第三种。因为方程的右边只有一项，形式最为简单。

师：我们把方程 $y^2=2px(p>0)$ 叫做抛物线的标准方程，它表示焦点在 x 轴的正半轴上，焦点是 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线是 $x=-\frac{p}{2}$ 的抛物线。

设计意图：选择不同的建系方式会得到不同的曲线方程表达式，教师通过询问的方式征集学生的建系方法并做补充后，请各小组自行选择建系方式，待小组成员经过商讨明确思路后，教师可点名也可鼓励学生到黑板上演示，一方面，若出现问题，教师能及时发现并讲解。另一方面，也方便教师后面做对比选择。小组合作能调动学生的积极性，若小组成员出现问题，其他成员也能帮助，黑板上演示的学生代表三个不同的小组进行演示，组间竞争，能从另一方面加深小组内部的合作，于平常中建立积极的互赖关系。小组合作能将课堂还给学生，使学生充分参与其中，学生自己选择建系方式，自己设点，列等式，化简得到抛物线的方程，最后选择抛物线的标准方程，教师只是起到了引导的作用，学生的自主性得到了充分的发挥。分组合作学习将学习任务交给学生，学生通过合作交流主动参与分析问题与解决问题的过程中。通过上台展示，组间交流，使学生体验到问题解决的乐趣所在。

问题 5：那么焦点 F 在 x 轴的负半轴、y 轴的正半轴以及 y 轴的负半轴上抛物线的标准方程又是怎样的呢？

合作任务 2：小组讨论，完成表 2。

师：观察对应抛物线的图象其找到焦点坐标与准线方程尝试写出抛物线的标准方程。

追问 1：抛物线的四个标准方程有什么相同点与不同点？

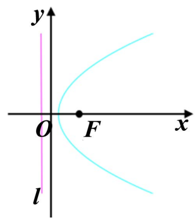
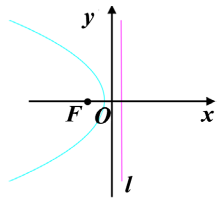
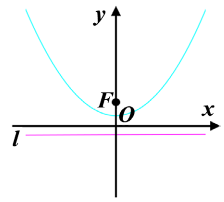
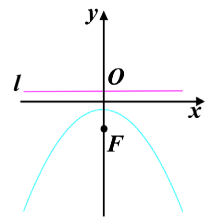
追问 2：四个标准方程的系数有什么特点？

追问 3：你能根据标准方程画出方程对应的抛物线的图像吗？

追问 4：你能根据方程写出抛物线的焦点坐标和准线方程吗？

追问 5：你能根据焦点坐标写出抛物线的标准方程吗？

Table 2. Four standard equations for a parabola
表 2. 抛物线的 4 种标准方程

图形				
标准方程	$y^2=2px\left(p>0\right)$	$y^2=-2px\left(p>0\right)$	$x^2=2py\left(p>0\right)$	$x^2=-2py\left(p>0\right)$
焦点坐标	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

设计意图：趁热打铁，学生已经熟悉了开口朝右的抛物线的标准方程，小组之间分工合作能很快求出焦点在 x 轴的负半轴、y 轴的正半轴与 y 轴负半轴上抛物线的标准方程。教师在学生完成表格后，不断抛出问题，引导小组思考与讨论四个标准方程的不同点与相同点，将抛物线的图像与方程对应起来观察有什么发现？能否根据标准方程找到抛物线的焦点坐标与准线方程，同样，给出焦点坐标能否写出抛物线的标准方程？一个问题结束后留几秒钟的思考时间，鼓励学生交流讨论，教师请个别学生回答他们的发现，对学生的回答进行指导与评价，紧接着再提出下一问题，通过问题继续引导学生思考引导学生讨论，学生在独立思考与小组讨论解决一个个问题的过程中掌握知识，发展技能。

3.3. 典例分析，巩固提高

例 1：(1) 已知抛物线的标准方程是 $y^2=12x$，求它的焦点坐标和标准方程；

已知一抛物线的焦点是 $F(0,4)$，求它的标准方程。

例 2：(1) 二次函数 $y=6x^2$ 的图象是抛物线吗？求它的焦点坐标和准线方程。

(2) 二次函数 $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$ 的图象是抛物线吗？求它的焦点坐标与准线方程。

设计意图：通过例 1 的两个小题进一步加深学生对抛物线的标准方程与图形之间建立的对应关系，体会数形结合的思想。例 2 的两个小题是用抛物线的概念求二次函数的焦点坐标与准线方程。从具体到抽象的过程学生更容易掌握方法，用新的数学眼光解释旧的数学知识，将新知与旧知建立联系纳入学生的认知结构，完成知识的内化。

4. 教学反思

4.1. 问题是数学的心脏，也是问题解决教学的切入点

培养学生的问题解决能力就是培养学生用数学的眼光提出问题、理解问题并能综合运用所学的知识

和方法解决问题[4]。这其中的关键在于“问题式”教学，一方面，如何创设问题情境，激发学生的探究欲望，促进学生对数学问题的全情投入是问题解决教学的开始。这就要求教师要联系实际生活，挖掘教材内容，创设符合学生认知特点的问题情境，激发学生的探究欲望。在本教学设计的问题情境就是利用了教材阅读与思考部分所提到的抛物面的聚光现象，以此作为学生探究抛物线上点的几何特征的入口，这样比直接用几何画板作图更能让学生理解抛物线的概念。另一方面，“问题式”教学还体现在教师通过“问题串”引导学生思考，进而深入探究，教师富有逻辑的“问题串”实际上就是将一个大问题或者复杂问题细分成若干个小问题，通过一个个思考解决这一个个小问题进而解决一个大问题，一节数学课就是由一层层的不断深入的问题组构成的。

4.2. 合作学习促进学生在问题解决过程中的主动参与

数学问题解决教学的根本目的在于教会学生主动学习，用数学的眼光观察世界，解决问题[5]。问题解决教学注重学生主体参与学习进程，主动内化知识，成为学习的主人。合作学习给学生提供了主动学习，主体参与的机会。在本案例中，第一次合作学习是分组自主选择不同的建系方式，通过建系、设点、列式、化简得到三种不同的抛物线的方程，通过比较选择形式最为简单的一种作为抛物线的标准方程。在这一过程中，学生对于数学简洁美的体验有了不可替代的直观感受；第二次合作学习是学生根据焦点在 x 轴的正半轴上抛物线的图像与标准方程探究其他三种情况下抛物线的标准方程、焦点坐标以及准线。这一过程的合作学习旨在通过数学交流发展学生类比推理、数形结合等思想方法。合作学习在促进学生主动参与的同时能促进学生数学交流激发学生数学思维的碰撞进而促进学生数学问题解决素养的生长。

基金项目

黄冈师范学院 2022 年校级研究生工作站项目“基于问题解决的高中数学合作学习的策略研究”(5032022037)。

参考文献

[1] 易颖，吴晓勤. 基于问题解决的初中数学教学设计——以“解直角三角形的应用”教学为例[J]. 亚太教育, 2019(11): 96-97.

[2] 王红革. 浅谈高中数学教学中学生问题解决能力的培养[J]. 天津市教科院学报, 2010(3): 94-95.

[3] 张晶，夏小刚. 数学问题情境化设计中的认知偏差及任务靶向[J]. 数学教育学报, 2022, 31(6): 75-79.

[4] 姬梁飞. 数学问题解决素养的生成与培育[J]. 教学与管理, 2021, 830(1): 40-42.

[5] 戚洪祥. 数学问题解决：演变、内涵及实践路径[J]. 上海教育科研, 2020, 402(11): 88-92.