Dynamical Systems and Control 动力系统与控制, 2013, 2, 40-43
http://dx.doi.org/10.12677/dsc.2013.22007 Published Online April 2013 (http://www.hanspub.org/journal/dsc.html)

Nonwandering Sequence of Convolution Operators*

Shaoguang Shi, Yao Xie

School of Science, Linyi University, Linyi
Email: ssgzl888@163.com

Received: Dec. 18th, 2012; revised: Jan. 17th, 2013; accepted: Feb. 1st, 2013

Copyright © 2013 Shaoguang Shi, Yao Xie. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: A nonwandering operator is a new kind of linear chaotic operators, which has a wide applications in dynamical system. In this paper, we establish nonwandering sequences of convolution operators and study some properties of these sequences, such as the convergence and the denseness of periodic point.

Keywords: Nonwandering Operators Sequence; Convolution Operators; Hypercyclic Sequence

卷积算子的非游荡序列*

石少广，谢　瑶

临沂大学理学院，临沂
Email: ssgzl888@163.com

收稿日期：2012 年 12 月 18 日；修回日期：2013 年 1 月 17 日；录用日期：2013 年 2 月 1 日

摘　要：非游荡算子是一类新型的混沌算子，在动力系统与控制等领域有广泛的应用。本文建立了卷积算子的非游荡序列，并得到该序列收敛、周期点稠密等相关分析性质。

关键词：非游荡算子序列；卷积算子；超循环序列

1. 引言

动力系统中，超循环算子和混沌算子的研究一直是数学家研究的热点。1991 年，Godefroy 和 Shapiro[1]首次将超循环算子和混沌算子的研究联系起来并得到超循环算子在 Devaney[2]的定义下是混沌的。从那开始，许多超循环算子被证明是混沌算子。公理 A 系统在微分动力系统的研究中起到非常重要的作用。这要求集合 $\Omega(f)$ 有超循环结构并且周期点在集合中稠密，其中超循环结构基于 Whitney 分解和在每点的切丛的超循环性质。由于算子的线性性质，它们在每一点的切丛本身也是线性算子。

然而，公理 A 系统局限于有限维紧 Riemann 流形。在以上工作的基础上，田立新等人引进了无穷维 Banach 空间上的非游荡算子的概念，这可以认为是对公理 A 系统的推广，但是又与之有区别(见文章后面的分析)。他们证明非游荡算子是一类新型的混沌算子且和超循环算子有关，但是又与超循环算子不同[3,4]。

下面我们介绍本文用到的主要记号和定义。X 为一任意可分的局部实或复凸空间。X 上的连续线性算子记为 $L(X)$。N 为非负整数。序列 $T_n \in L(X)$ 称为超循环的如果存在矢量 $x \in X$ 使得 $\{T_n x : n \in N\}$ 在 X 上稠密。$per(T)$ 记为 T 的周期点的集合。

定义 1.1[4] 算子 $T \in L(X)$ 称为非游荡算子如果：

1) 存在一闭子空间 $E \subset X$ 有超循环结构：$E = E^u \oplus E^s, TE^u = E^u, TE^s = E^s$，其中 E^u、E^s 为闭子空间。

*资助信息：山东省自然科学基金资助项目(ZR2012AQ026)。

 Copyright © 2013 Hanspub

2) 存在常数 $\tau(0<\tau<1)$ 和 $c>0$，使得对任意 $\xi\in E^u$，$k\in N$，$\|T^k\xi\|\geq c\tau^{-k}\|\xi\|$，任意 $\eta\in E^s,k\in N$，$\|T^k\eta\|\leq c\tau^k\|\eta\|$。

3) $Per(T)$ 在 E 中稠密。

设 $H(C^d)$ 为赋予紧开拓扑的整函数空间。本文我们主要研究作用在 $H(C^d)$ 上的卷积算子的非游荡序列。

定义 1.2[5] 一个序列 $\{T_n:n\in N\}$ 称为 X 上的非游荡算子序列，如果

1) 存在闭子空间 $E\subset X$ 有如下超循环结构：

$E=E^u\oplus E^s$，$T_nE^u=E^u$，$T_nE^s=E^s$

其中 E^u,E^s 为闭子空间。

2) 存在 $\tau(0<\tau<1)$ 和 $c>0$，使得对任意 $\xi\in E^u$，$\eta\in E^s$，$t\geq 0$ 有 $\|T_n\xi\|\geq c\tau^{-n}\|\xi\|$，$\|T_n\eta\|\leq c\tau^n\|\eta\|$。

3) $Per(T_n)$ 在 E 中稠密。

定义 1.3[6] 如果算子 $T\in L(X)$ 与平移 $\tau_a:f\to f(a+z)$ 可交换，则称 T 为卷积算子。H 中卷积算子的集合记为 C。

易证 C 为 $L(H)$ 的一个交换子代数。事实上，C 有下面更详细的刻画[1]。设 $\mathrm{Exp}=\mathrm{Exp}(C^d)$ 为指数型函数，即 $\varphi\in H$ 满足 $|\varphi(z)|\leq Me^{r\|z\|}$，$M,r>0$，其中 $\|z\|\equiv\sqrt{\sum_i|z_i|^2}$，$z=(z_1,\cdots,z_d)\in C^d$。

性质 1.1[6] 映射 $\varphi=\sum_{\alpha\in N^d}\varphi_\alpha z^\alpha\to\varphi(D)\equiv\sum_\alpha\varphi_\alpha D^\alpha$ 为 Exp 和 C 之间的一个代数同构。其中 $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}$，$D_i\equiv\partial/\partial z_i$，$\sum_\alpha\varphi_\alpha D^\alpha f$ 收敛到 H，任意 $f\in H$。

特别地，如果 p 为多项式，$p(D)$ 为微分算子。在[7]中，Bernal-Gonzalez 将 Godefroy 和 Shapiro 的结果推广到卷积算子序列 $(\varphi_n(D))$。

性质 1.2 (Bernal-Gonzalez)设 $(\varphi_n(D))$ 为 C 中的序列。则 $(\varphi_n(D))$ 为超循环的如果下面的(P)或(Q)成立：

(P) 存在非空开集 $U,V\subseteq C^d$ 使得对任意有限子集 E,F，存在正整数的一个子序列 (n_k) 使得 $\varphi_{n_k}(x)\to 0$ 且 $\varphi_{n_k}(y)\to\infty$ 对任意 $x\in E$ 和 $y\in F$。

(Q) $\min\{|\alpha|:D^\alpha\varphi_n(0)\neq 0\}\to\infty(n\to\infty,|\alpha|\equiv\sum\alpha_i)$ 且存在一非空开子集 $U\subseteq C^d$ 使得对任意有限子集 $E\subseteq U$，存在正整数子序列 (n_k) 使得 $\varphi_{n_k}(x)\to\infty$，$x\in E$。

定义 1.4[7] 设 G 为 C^N $(N\in\mathbf{N})$ 中的一个非空开子集。如果 G 是连通的，则称 G 是区域。一区域 $G\subset C^N$ 为一 Runge 区域如果 G 上的任意解析函数都可用 G 的紧子集上的多项式一致逼近。

当 $N=1$，Runge 区域即为简单联通区域。文中用 $H(G)$ 记 G 中赋予紧开拓扑的解析函数空间。

本文组织结构为：第一部分介绍本文的预备知识，包括一些基本定义和记号。在第二部分我们将给出卷积算子的非游荡序列定义并加以证明。第三部分给出本文的小结。

2. 卷积算子非游荡序列

引理 2.1 如果 $G\subset C^N$ 为非空开子集且 $\varphi(Z)=\sum_{|p|\geq 0}a_pz^p$ 为整函数，则级数 $\varphi(D)=\sum_{|p|\geq 0}a_pD^p$ 定义了 $H(G)$ 上的算子。

证明：如果 $G=C^N$，引理是平凡的，下面仅考虑 $G\neq C^N$。固定 $f\in H(G)$，紧子集 $K\subset G$。设 $\varepsilon=\frac{1}{2}d(K,C^N/G)$。则存在 $A\in(0,+\infty)$ 使得

$$|a_p|\leq A\cdot\left((\varepsilon/2)^{|p|}\Big/p!\right)\quad(|p|\geq 0).$$

固定 $a\in K$。由导数的柯西公式[8]可得：

$$|D^pf(a)|\leq\frac{p!\|f\|_{D(a,\varepsilon)}}{\varepsilon^{|p|}}\leq\frac{p!\|f\|_{K_1}}{\varepsilon^{|P|}},$$

其中 K_1 为紧集 $\{z:d(z,K)\leq\varepsilon\}$。注意到 $K\subset K_1\subset G$。所以 $\|D^pf\|_K\leq p!\|f\|_{K_1}\Big/\varepsilon^{|P|}$，

$$\begin{aligned}&\sum_{|P|\geq 0}\|a_pD^pf\|_K\\&\leq\sum_{|p|\geq 0}A\cdot\left((\varepsilon/2)^{|p|}\Big/p!\right)\cdot\left(p!\|f\|_{K_1}\Big/\varepsilon^{|P|}\right)\\&=2^NA\cdot\|F\|_{K_1},\end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{|p|\geq 0}a_pD^pf$ 在 K 上一致收敛且 $\varphi(D)$ 定义了 $H(G)$ 到自身的一个映射。线性性是显然的。又因为对 $f\in H(G)$，$\|\varphi(D)f\|_K\leq 2^NA\cdot\|f\|_{K_1}$，所以 $\varphi(D)$ 在 $H(G)$ 上连续。

定理 2.1 假设 G 为 C^N 中一 Runge 区域，φ，$\varphi_n(n\in N)$ 为 C^N 上的整函数。若 φ 不是常数并记 $L_n=\varphi_n(D)$ $(n\in N)$。如果 φ_n 为子指数(或指数)型并且序列 $\{\varphi_n,n\in N\}$ 满足条件(P)，则算子序列 $\{L_n,n\in N\}=\{\varphi_n(D),n\in N\}$ 为非游荡算子序列。

证明：由引理 2.1，L_n 为定义在 $H(G)$ 或 $H(C^N)$ 上的算子如果 φ_n 为指数型函数。不失一般性，设

Copyright © 2013 Hanspub

$G\in C^N$。注意到对任意 $j\in\{1,2,3,\cdots,N\}$，有

$$D_je_a=a_je_a,\ \left(\forall a\in C^N\right).$$

所以对任意多线性指标 p，$D^pe_a=a^pe_a$。又因为每一函数 e_a 为相应于 L_n 的特征值为 $\varphi_n(a)$ 的特征向量。进而对任意 $a\in C^N$，$n\in N$，$L_ne_a=\varphi_n(D)e_a=\varphi_n(a)e_a$。

为证明命题，首先构造一个闭不变子空间 $E\subset X$ 使得 E 有超循环结构。因为 φ_n 满足条件(P)，所以存在子集 $A\in C^N$，使得对任意有限子集 F_1，存在一正整数序列 $\{n_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(a)=0\quad(\forall a\in F_1).$$

取有限子集 $F_{11}\subset A$，则存在正整数子序列 $\{n_{k1}\}$，使对任意 $a\in F_{11}$，$\lim\limits_{k1\to\infty}\varphi_{n_{k1}}(a)=0$。

取有限子集 $F_{12}\subset A,(F_{11}\cap F_{12}\neq\Phi)$，则相应存在子序列 $\{n_{k2}\}$，使得

$$\forall a\in F_{12},\lim_{k2\to\infty}\varphi_{n_{k2}}(a)=0.$$

而且如果令 $\omega_1=F_{11}\cap F_{12}$，则对任意 $a\in\omega_1$，

$$\lim_{ki\to\infty}\varphi_{n_{ki}}(a)=0,\ i=1,2.$$

此过程无限进行下去直到找到有限子集 $F_{1P}\subset A$，存在子序列 $\{n_{kp}\}$，使对任意 $a\in F_{1p}$，$\lim\limits_{kp\to\infty}\varphi_{n_{kp}}(a)=0$。

取 $\omega_{p-1}=\omega_{p-2}\cap F_{1p}$，对任意 $a\in\omega_{p-1}$，$\lim\limits_{ki\to\infty}\varphi_{n_{ki}}(a)=0$，$i=1,2,3,\cdots,p$。

且有 $\{n_{ki},i=1,2,\cdots,p\}=\{n,n\in N\}$。

令 $E_1=\bigcap\limits_{i=1}^{p}F_{1i}=\omega_{p-1}$，所以对任意 $a\in E_1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(a)=0,\ \ n\in N$。

对任意 $\varphi_n(a)\in R(a\in E_1)$，由已知条件可得 $L_ne_a=\varphi_n(D)e_a=\varphi_n(a)e_a$。

取

$$E_1'=\left\{\eta\middle|\eta=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_ie_{a_i},\varphi_n(D)e_{a_i}=\varphi_n(a_i)e_{a_i},\exists 0<\tau_1<1,\right.$$
$$\left.\forall n\in N,\varphi(a_i)\le\tau_1^n\right\}\frac{\delta y}{\delta x}$$

$E^s=\overline{E_1'}$。则 $E^s\subset H(G)$ 为一闭子空间且对任意 $\eta=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\alpha_ie_{a_i}\in E^s,n\in N$，有

$$\|L_n\eta\|=\|\varphi_n(D)\eta\|=\left\|\varphi_n(D)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_ie_{a_i}\right\|=\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\varphi_n(a_i)e_{a_i}\right\|$$
$$\le\tau_1^n\max_{z\in G}\left|\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_ie_{a_i}z\right|=\tau_1^n\|\eta\|$$

同理对 C^N 中非空开子集 B，可得 $E_2=\bigcap\limits_{i=1}^{m}F_{2i}$，使对任意 $b\in E_2$，$n\in N$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(b)=\infty$。

取

$$E_2'=\left\{\xi\middle|\xi=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_ie_{b_i},\varphi_n(D)e_{b_i}=\varphi_n(b_i)e_{b_i}\right\}$$

其中 $\beta_ie_{b_i},\varphi_n(D)e_{b_i}=\varphi_n(b_i)e_{b_i},\exists 0<\tau_2<1,\varphi_n(b_i)$，$E^u=\overline{E_2'}$。所以 $E^u\subset H(G)$ 为一闭子空间，且对任意 $\xi=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\beta_ie_{b_i}\in E^u$，$n\in N$，有

$$\|L_n\xi\|=\|\varphi_n(D)\xi\|=\left\|\varphi_n(D)\sum_{i=0}^{\infty}\beta_ie_{b_i}\right\|$$
$$\ge\tau_2^{-n}\max_{z\in G}\left|\sum_{i=0}^{\infty}\beta_ie_{b_i}z\right|=\tau_2^{-n}\|\xi\|$$
。

若取 $\tau=\max(\tau_1,\tau_2)$，则对任意 $\forall\eta\in E^s,n\in N,\|L_N\eta\|\le\tau^n\|\eta\|$，且对 $\xi\in E^u,n\in N$, 有 $\|L_n\xi\|\ge\tau^{-n}\|\xi\|$。

下证 E^u 和 E^s 在算子 L_n 作用下是不变的。对任意 $\xi\in E^u$,

$$\xi=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_ie_{b_i}=\Phi_n(D)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\beta_i}{\Phi_n(b_i)}\right)e_{b_i}\in\varphi_n(D)E^u=L_nE^u$$

所以 $E^u\subset L_nE^u$。

另一方面，对任意 $\Psi\in L_nE^u$，存在 $\xi=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\beta_ie_{b_i}\in E^u$，使得 $L_n\xi=\Psi$。所以

$$\Psi=L_n\left(\sum_{i=0}^{\infty}\beta_ie_{b_i}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\beta_i\varphi_n(b_i)e_{b_i}\right)\in E^u$$

所以 $L_nE^\mu\subset E^\mu$，$L_nE^\mu=E^\mu$。同理可证 $L_nE^s=E^s$。

取 $E=E^u\oplus E^s$，可得 E 为闭不变子空间且在 $H(G)$ 上有超循环结构。

其次，证明 $Per(L_n)$ 在 $H(G)$ 中稠密。

因为 G 为 Runge 区域，取紧子集 $K\subset G$。由[1]中定理 5.1，性质 5.2 和定理 6.2 可得 $Per(L=\varphi_n(D))$ 在 $H(G)$ 中稠密。即对 $\forall f\in H(G)$ 和 $\forall\varepsilon>0$，存在

Copyright © 2013 Hanspub

$g \in Per(\varphi(D))$，使得对任意 $z \in K$，有

$$\left| f(z) - g(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}。$$

另一方面，因为$\{\varphi_n(D)\}$在G中任一紧子集K上一致收敛[1]，所以存在算子序列$\{\varphi_n(D)\}$在$H(G)$上逐点收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(D)=\varphi(D)$。

因而，对任意 $g \in Per(\varphi(D))$, 存在 $g_n \in Per(\varphi_n(D))$ 使得对任意 $\varepsilon > 0$，$z \in K$，有 $\left| g(z) - g_n(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$，进而$\left| f(z) - g_n(z) \right| < \varepsilon$。所以 $Per(\varphi_n(D))$ 在 $H(G)$ 中稠密。

3. 总结

非游荡算子既和超循环算子有关，又与超循环算子不同，是一类新型的混沌算子，在动力系统中有广泛的应用。众所周知，卷积算子在动力系统与控制理论中也发挥着重要作用。我们结合卷积算子和非游荡算子的定义给出了卷积算子的非游荡序列定义并验证了其合理性。该结果及其后续研究必将极大地丰富动力系统相关理论。

参考文献 (References)

[1] G. Godefroy, J. H. Shapiro. Operators with dense, invariant cyclic vector manifolds. Journal of Functional Analysis, 1991, 98(2): 229-269.

[2] R. L. Devaney. An introduction to chaotic dynamical systems. 2nd Edition, Reading: Addison-Wesley, 1989.

[3] L. X. Tian, J. B. Zhou, X. Liu and G. S. Zhong. Nonwandering operators in Banach space. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005, 24: 3895-3908.

[4] L. X. Tian, D. C. Lu. The property of nonwandering operator. Mathematics and Mechanics, 1996, 17(2): 155-161.

[5] S. G. Shi, G. S. Zhong. Nonwandering operator sequences in Banach space. International Journal of Nonlinear Science, 2006, 1(3): 164-171.

[6] P. Henrik. Hypercyclic sequences of PDE perserving operators. Journal of Approximation Theory, 2006, 138(2): 168-183.

[7] B. G. Luis. Hypercyclic sequences of differential and antidifferential operators. Journal of Approximation Theory, 1997, 96(2): 323-337.

[8] J. B. Zhou, D. C. Lu and L. X. Tian. The hereditayily hypercyclic decomposition of nonwandering operators in Frechet space. Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition), 2001, 22(6): 88-91.

Copyright © 2013 Hanspub