

# Bifurcation Control of Finance System Based on Washout Filter

Xuedi Wang, Tianyu Yang, Wei Xu

Nonlinear Scientific Research Center, Jiangsu University, Zhenjiang  
Email: wxd959@ujs.edu.cn

Received: Dec. 18<sup>th</sup>, 2012; revised: Jan. 25<sup>th</sup>, 2013; accepted: Feb. 3<sup>rd</sup>, 2013

Copyright © 2013 Xuedi Wang et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Abstract:** In this paper, Washout filter is adopted to control Hopf bifurcation in a kind of finance system. The effect of its parameters on the position of bifurcation point is discussed in detail. First of all, the Washout filter is introduced in this paper. And then the distribution of the equilibrium point of the system is analyzed. After that, the influence of the filter's time constant and the linear gain on the location of bifurcation point is analyzed by adding the Washout filter controller, and changing the position of the Hopf bifurcation point by taking different values. Finally, numerical simulations are provided to verify the accuracy and effective of the theoretical analysis.

**Keywords:** Finance System; Washout Filter; Hopf Bifurcation; Linear Gain; Bifurcation Control

## 基于 Washout 滤波器的金融系统的分岔控制

王学弟, 杨天宇, 许伟

江苏大学非线性科学研究中心, 镇江  
Email: wxd959@ujs.edu.cn

收稿日期: 2012 年 12 月 18 日; 修回日期: 2013 年 1 月 25 日; 录用日期: 2013 年 2 月 3 日

**摘要:** 本文从独立设计的 Washout 滤波器控制器出发研究了一类金融系统的 Hopf 分岔的控制问题, 主要考察了控制器参数对分岔点位置的影响。文中首先介绍了 Washout 滤波器, 然后分析了这个系统的平衡点分布, 通过添加 Washout 滤波器控制器分析了滤波器时间常数与线性控制增益对其 Hopf 分岔点位置的影响, 并选取不同的参数值来改变 Hopf 分岔点的位置, 最后通过数值模拟验证理论结果的有效性和正确性。

**关键词:** 金融系统; Washout 滤波器; Hopf 分岔; 线性控制增益; 分岔控制

### 1. 引言

近些年, Hopf 分岔控制的研究成果已得到了广泛应用, 在机械工程、电子工程、航空航天工程、物理化学、生物医学、电力工程以及金融等领域, 都显示出非常大的潜力和可观前景。

经济学中的分岔和混沌现象自 1985 年被首次发现以来, 对当今西方主流经济学派产生了巨大的冲击, 因为经济系统中出现分岔和混沌现象意味着宏观

经济运动本身具有内在的不稳定性<sup>[1-4]</sup>。政府虽然可以采取诸如财经政策或金融政策等宏观调控手段来进行干预, 但是干预的有效性是十分有限的<sup>[5,6]</sup>, 不稳定性和复杂性使精确的经济预测受到很大限制, 合理的预期行为也变得复杂起来<sup>[7,8]</sup>。其中, Hopf 分岔现象的深入研究是当前国际上非线性动力系统的前沿研究课题, 在金融、股票和社会经济领域中由于非线性因素的相互作用, 各种经济问题日趋复杂化与由低维

向高维的演化过程, 系统的内在结构也呈现出多样性和复杂性, 但是, 这方面的研究还比较少。因此, 有必要系统地开展对这类复杂经济系统内在结构特征的研究。通过研究系统的周期解的失稳、Hopf 分岔、倍周期分岔、Hopf 分岔点的位置, 从而揭示复杂现象发生的原因就变得越来越大, 并可在此基础上, 为对复杂连续经济系统的分析预测与控制提供理论依据和实际操作的方法。

本文选取一类金融非线性金融系统作为研究对象, 以 Washout 滤波器为控制器进行系统的 Hopf 分岔控制。首先我们对 Washout 滤波器做了简单的介绍, 然后基于 Washout 滤波器技术, 对系统的 Hopf 分岔进行控制, 之后在控制后的系统中分析滤波器时间常数与线性控制增益对其 Hopf 分岔位置的影响, 分别选取不同值的来提前或者延迟系统的 Hopf 分岔, 甚至完全消除 Hopf 分岔, 最后通过数值模拟验证理论结果的有效性和准确性。

## 2. 滤波器简介

Washout 滤波器法作为一种扩充的线性或非线性状态反馈方法, 广泛应用于电力、航空航天等工程系统中。后来基于 Washout 滤波器技术的控制方法具有易于实现、控制代价小、不改变原系统平衡点位置的优点, 还具有一定的鲁棒性, 可用于高维系统和多种分岔现象的控制, 具有方便快速的优点, 因此 Washout 滤波器已用于许多的 Hopf 分岔控制中。虽然在施加滤波器时增加了系统的维数, 但现如今大量优秀的数学软件和计算方法的出现也在一定程度上解决了计算的困难。

设一非线性系统

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

其中向量场  $f$  是依赖于一个甚至多个未知参数的不确定函数,  $u$  为输入量,  $x$  为可测变量。

经典的 Washout 滤波器是一个稳定的高通滤波器, 其传递函数<sup>[9]</sup>为

$$D(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{s}{(s+d)} = 1 - \frac{d}{(s+d)} \quad (2)$$

其中  $d$  为时间常数。当  $d > 0$  时 Washout 滤波器工作状态是稳定的, 当  $d < 0$  时工作状态是不稳定的, 两

者在控制系统中都有所应用。滤波器的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \dot{\omega} = x - d\omega \\ \nu = x - d\omega \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\omega$  为 Washout 滤波器状态变量,  $x$  为其输入变量,  $\nu$  为其输出变量。系统稳定时, 有  $\dot{\omega} = 0$  时,  $\nu = 0$ , 相当于输入信号  $x$  被冲洗掉, 因此叫 Washout 滤波器<sup>[10]</sup>。

如果选取 Washout 滤波器为控制器, 一般可将 Washout 滤波器设计为如下形式<sup>[11]</sup>

$$\begin{cases} \dot{z} = Cx - Gz \\ y = Cx - Gz \\ u = g(y) \end{cases} \quad (4)$$

其中  $C$  为输出测量矩阵,  $G$  决定控制器的动态特征, 控制函数  $g(y)$  可写为

$$g(y) = g_u(y, y) + g_v(y, y, y) \quad (5)$$

其中,  $g_u(y, y)$  表示一个二次多项式,  $g_v(y, y, y)$  表示一个三次多项式。

## 3. 系统的陈述和平衡点

一类金融系统<sup>[12]</sup>表示如下

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a) \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (6)$$

其中  $x$  表示利率,  $y$  表示投资需求,  $z$  表示价格指数,  $a \geq 0$  为储蓄量,  $b \geq 0$  为单位投资成本,  $c \geq 0$  为商品需求弹性。

通过选择适当的坐标系和变量替换, 系统(6)可以简化为<sup>[13]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x + y) \\ \dot{y} = -y - axz \\ \dot{z} = b + axy \end{cases} \quad (7)$$

其中  $a$ 、 $b$  是大于零的参数。

系统(7)有两个平衡点

$$E_+ = (x_0, y_0, z_0), E_- = (-x_0, -y_0, z_0) \quad (8)$$

其中

$$x_0 = \frac{\sqrt{ab}}{a}, \quad y_0 = -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \quad z_0 = \frac{1}{a}$$

#### 4. Hopf 分岔分析及其控制

系统(7)的特征多项式为

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (9)$$

其中  $A=1+a$ ,  $B=ab$ ,  $C=2a^2b$ , 根据 Routh-Hurwitz 准则, Hopf 分岔产生的条件是

$$A > 0, \quad C > 0, \quad AB - C = 0,$$

$$\left. \frac{d(AB-C)}{da} \right|_{a=a_0} \neq 0$$

即  $1+a > 0$ ,  $2a^2b > 0$

$$(1+a)ab - 2a^2b = 0, \quad -b \neq 0 \quad (10)$$

取  $a$  为分岔参数, 条件(10)中的前两个不等式条件都成立, 由条件(10)中的等式可得到: 当  $a = a_0 = 1$  时, Hopf 分岔出现。此时, (9)式的特征值为  $\lambda_1 = \sqrt{bi}$ ,  $\lambda_2 = -\sqrt{bi}$ ,  $\lambda_3 = -2$ 。

Washout 滤波器控制的受控系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x+y) \\ \dot{y} = -y - axz + \mu \\ \dot{z} = b + axy \\ \dot{\omega} = y - d\omega \end{cases} \quad (11)$$

状态变量  $y$  作为 Washout 滤波器的输入量,  $d$  为滤波器时间常数。现取控制器

$$\mu = k_1(y - d\omega) + k_n(y - d\omega)^3 \quad (12)$$

$k_1, k_n$  分别为线性和非线性控制增益。

由于 Washout 滤波器不改变原系统的平衡点, 此时系统(11)的平衡点为

$$\begin{aligned} E'_+(x_0, y_0, z_0, y_0/d) \\ E'_-(x_0, y_0, z_0, y_0/d) \end{aligned} \quad (13)$$

下面我们只考虑平衡点  $E'_+(x_0, y_0, z_0, y_0/d)$ 。作变换

$$\begin{aligned} x_1 &= x - x_0, \quad y_1 = y - y_0 \\ z_1 &= z - z_0, \quad \omega_1 = \omega - y_0/d \end{aligned} \quad (14)$$

使得平衡点移到原点, 上式整理代入受控系统(11)中可得

$$\dot{\zeta}_1 = A\zeta_1 + f(\zeta_1) \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} -a & -a & 0 & 0 \\ -1 & k_1-1 & -\sqrt{ab} & -k_1d \\ -\sqrt{ab} & \sqrt{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d \end{pmatrix} \\ f(\zeta_1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ k_n(y_1 - d\omega_1)^3 - ax_1z_1 \\ ax_1y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

此时, 系统(15)的平衡点为原点, 设矩阵  $A$  的特征多项式为

$$L(\lambda) = \lambda^4 + \eta_1\lambda^3 + \eta_2\lambda^2 + \eta_3\lambda + \eta_4 \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a + d - k_1 + 1 \\ \eta_2 &= 2a + d + ab \\ \eta_3 &= abd + 2a^2b + 3ad - ak_1 \\ \eta_4 &= 2a^2bd \end{aligned} \quad (18)$$

由 Routh-Hurwitz 判据知, 当以下条件

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \eta_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \eta_1 & 1 \\ \eta_3 & \eta_2 \end{vmatrix} > 0 \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} \eta_1 & 1 & 0 \\ \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 \\ 0 & \eta_4 & \eta_3 \end{vmatrix} > 0, \Delta_4 = \eta_4\Delta_3 > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

当全部满足时, 平衡点  $E'_+$  是稳定的, 不满足时, 平衡点  $E'_+$  是不稳定的。参数空间中所有满足稳定条件的点就构成了稳定域。当参数在稳定域中选取时, 平衡点是稳定的。稳定域边界由两部分组成:

1) 静态分岔必要条件:

$$\Delta_4 = 0, \Delta_i > 0, i=1, 2, 3$$

2) 动态分岔必要条件:

$$\Delta_3 = 0, \Delta_i > 0, i=1, 2, 4$$

结合 Hopf 分岔定理可知, 在边界(2)上特征方程有一对纯虚根, 而其他特征根实部均小于零, 因此也可称其为 Hopf 分岔边界<sup>[14]</sup>。

下面讨论控制器线性增益  $k_1$  对 Hopf 分岔的影响。已知  $a_0$  是原系统(7)产生 Hopf 分岔所对应的参数值, 假设  $a_H$  为受控系统的分岔临界值, 将受控系统的分岔临界值  $a_H$  与原系统的分岔参数值  $a_0$  进行比较, 当  $k_1 > 0$  时, 有  $a_H < a_0$ , 可使 Hopf 分岔提前; 当  $k_1 < 0$  时, 有  $a_H > a_0$ , 则可使 Hopf 分岔延后。如果  $k_1$  的值可以取足够的小, 那么系统在此时将不会发生 Hopf 分岔<sup>[15]</sup>。

在实际的控制器设计中, 选择合适的  $k_1$  和  $d$  的值, 可以得到我们所期望的分岔临界值  $a_H$ 。下面我们取  $b=5$  时, 令  $d=0.5$ ,  $k_1=-0.5 < 0$ , 由  $\Delta_3=0$ , 我们可以得到受控系统产生分岔的临界值

$a_H = 2.349 > a_0$ , 这意味着控制器使系统的 Hopf 分岔延后。同样, 我们保持  $b$  不变, 令  $d=1$ ,  $k_1=1 > 0$ , 由  $\Delta_3=0$ , 我们可以得到受控系统产生分岔的临界值  $a_H = 0.455 < a_0$ , 这意味着控制器使系统的 Hopf 分岔提前。

### 5. 数值模拟

对于控制前的系统(7), 分岔参数  $a$  取不同的值时, 对应的相图相应的发生了改变。由图 1 和图 2 可以看出, 当  $a=0.38 < a_0$  时, 系统出现不动点, 即不发生 Hopf 分岔; 如图 3 和图 4 所示, 当  $a=1=a_0$  时, 产生 Hopf 分岔, 验证了本文第四部分关于原系统产生 Hopf 分岔的结论。其中, 由图 4 我们可以看出此时的极限环是一个稳定的极限环, 从经济学的角度可以看出此金融系统的宏观经济运动具有内在的不稳定性, 需要改变 Hopf 分岔位置来达到合理的预期。

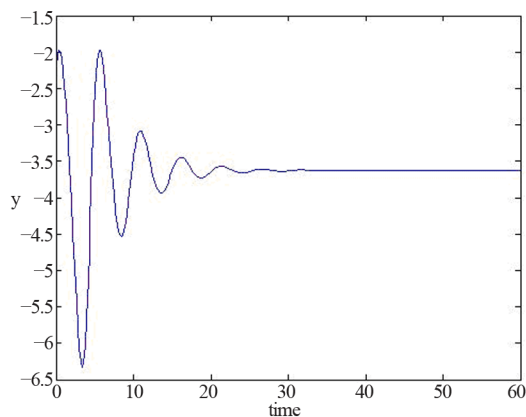


Figure 1.  $a = 0.38$ , the time series of  $y(t)$   
图 1.  $a = 0.38$  时,  $y(t)$  变化历程图

系统(7)控制后, 即在系统(11)中, 取  $b=5$ 。图 5~7 中紫色实线表示的是  $\Delta_1=0$ , 红色点线表示的是  $\Delta_2=0$ , 蓝色虚线表示的是  $\Delta_3=0$ , 从下面三图比较可以得出, 随着时间常数  $d$  值的增大稳定域在逐渐减小。

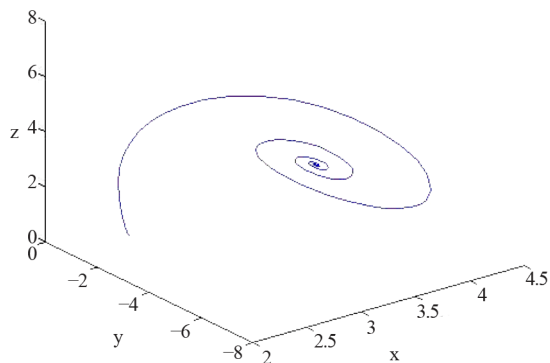


Figure 2.  $a = 0.38$ , stable fixed point  
图 2.  $a = 0.38$  时, 不动点稳定图

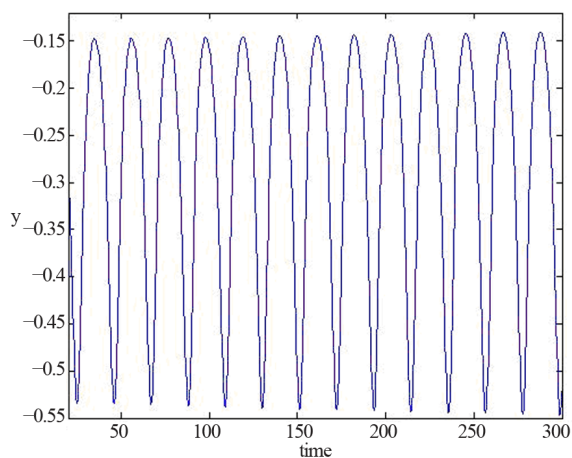


Figure 3.  $a = 1$ , the time series of  $y(t)$   
图 3.  $a = 1$  时,  $y(t)$  变化历程图

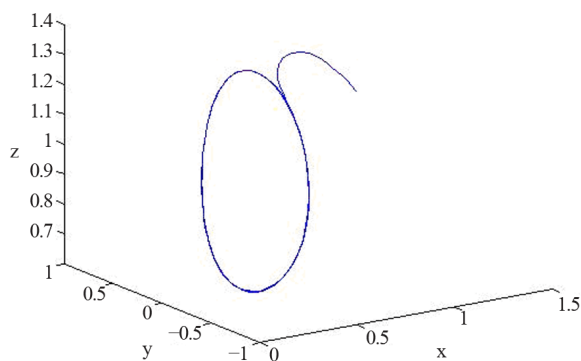


Figure 4.  $a = 1$ , limit cycle  
图 4.  $a = 1$  时, 极限环

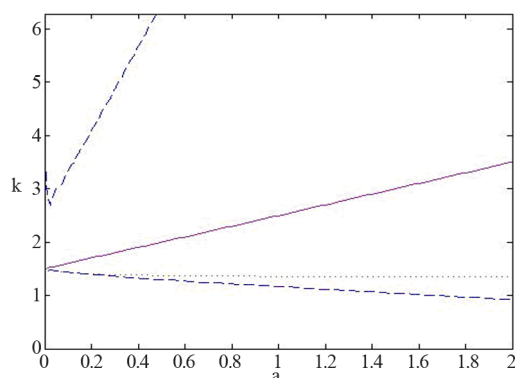


Figure 5.  $d = 0.5$ , the stability domain of parameter flat  $(a, k_1)$   
图 5.  $d = 0.5$  时参数平面  $(a, k_1)$  的稳定域

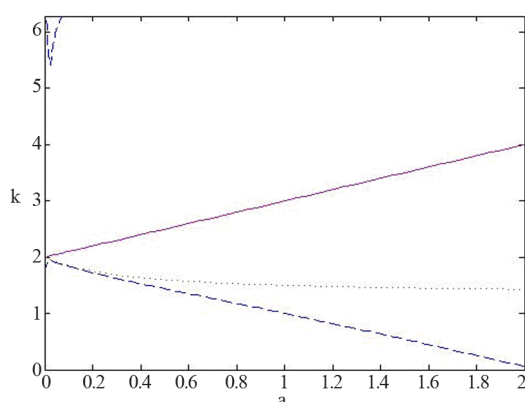


Figure 6.  $d = 1$ , the stability domain of parameter flat  $(a, k_1)$   
图 6.  $d = 1$  时, 参数平面  $(a, k_1)$  的稳定域

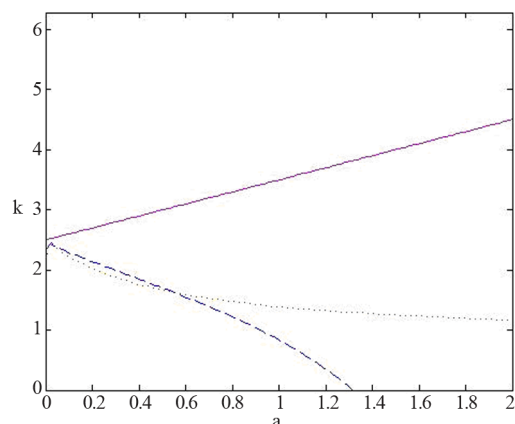


Figure 7.  $d = 1.5$ , the stability domain of parameter flat  $(a, k_1)$   
图 7.  $d = 1.5$  时, 参数平面  $(a, k_1)$  的稳定域

## 6. 结论

本文基于 Washout 滤波器, 对一类金融系统进行了 Hopf 分岔分析。文中提出系统中各参数不合适的组合是引起经济系统出现失控的根源, 它有可能使系统陷于停滞僵化的状态。因此, 本文通过添加 Washout 滤波器控制器, 分析滤波器时间常数  $d$  与线性控制增益  $k_1$  对分岔点位置的影响, 并选取不同的参数值来改变 Hopf 分岔点的位置, 可以得到合理的预期, 推迟像通货膨胀、经济萧条等类似的经济现象, 从而有利于金融系统的正常运转。

## 参考文献 (References)

- [1] 成思危. 复杂科学与管理[A]. 北京香山会议论文集[C]. 北京: 科学出版社, 1998: 1-9.
- [2] 黄登仕, 李后强. 非线性经济学的理论和方法[M]. 成都: 四川大学出版社, 1993.
- [3] 陆启韶. 分岔与奇异性[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995.
- [4] 李京文. 混沌理论与经济学[J]. 数量经济技术经济研究, 1991, 24: 19-26.
- [5] B. M. Miarim. Topological equivalence of a place vector field with its principal past defined through Newton polyhedra. Journal of Differential Equations, 1990, 85(6): 338-366.
- [6] C. A. Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1990, 47(4): 420-448.
- [7] O. Morgul. Necessary condition for observer-based chaos synchronization. Physical Review Letters, 1999, 82(9): 77-80.
- [8] 杨小京. 一类平面齐次多项式系统的局部相图[J]. 系统科学与数学, 1999, 19(4): 150-156.
- [9] 赵益波, 罗晓曙. 基于 Washout 滤波器技术的 Colpitts 振荡器混沌控制研究[J]. 物理学报, 2007, 56: 6258-6262.
- [10] 马骏, 杨功流. 导轨爬行分岔的 Washout 滤波器控制[J]. 农业机械学报, 2008, 39(11): 156-159.
- [11] 孙立明. 非线性系统 Hopf 分岔控制及应用[D]. 天津大学, 2011.
- [12] 黄登仕, 李后强. 非线性经济学的理论和方法[M]. 成都: 四川大学出版社, 1993.
- [13] J. Ding, W. G. Yang and H. X. Yao. A new modied hyperchaotic finance system and its control. International Journal of Nonlinear Science, 2009, 8(1): 59-66.
- [14] Z. Wu, P. Yu. A method for stability and bifurcation control. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(6): 1019-1023.
- [15] 吴志强, 孙立明. 基于 Washout 滤波器的 Rossler 系统 Hopf 分岔控制[J]. 物理学报, 2011, 60(5): Article ID: 050504.