Geomatics Science and Technology 测绘科学技术, 2014, 2, 1-5
http://dx.doi.org/10.12677/gst.2014.21001 Published Online January 2014 (http://www.hanspub.org/journal/gst.html)

Refining the 3D Coordinate Transformation Parameters with Helmert Variance Estimation Method

Zhixiang Yin[1], Erhu Wei[1,2*]

[1]School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan,
[2]Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan
Email: *ehwei@sgg.whu.edu.cn

Received: Oct. 18th, 2013; revised: Oct. 29th, 2013; accepted: Nov. 4th, 2013

Abstract: According to the inaccuracy existed in weight-determination when original and object coordinates' acquisition methods are different with WTLS, Helmert Variance Estimation Method is employed to determine two kinds of coordinates' weight. And then, the specific formula of Helmert Variance Estimation Method which is suitable for 3D coordinate transformation is deduced. The numerical test proved that more reasonable and more precision results can be obtained with our method.

Keywords: WTLS; Different Acquisition Methods; Helmert Variance Estimation Method; Weight-Determination

利用赫尔默特方差估计法精化三维基准转换参数

殷志祥 [1]，魏二虎 [1,2*]

[1] 武汉大学测绘学院，武汉
[2] 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室，武汉
Email: *ehwei@sgg.whu.edu.cn

收稿日期：2013 年 10 月 18 日；修回日期：2013 年 10 月 29 日；录用日期：2013 年 11 月 4 日

摘　要：针对加权整体最小二乘(WTLS)在两套坐标获取方式不同时定权的不精确性，提出利用赫尔默特方差估计法确定两类坐标的权，并推导了用于坐标转换的赫尔默特方差估计法的具体公式。实验表明：利用赫尔默特方差估计方法能够得到更加精确、更为合理的参数解。

关键词：WTLS；不同获取方式；赫尔默特方差估计法；定权

1. 引言

测量工作中，经常会遇到三维坐标转换问题，如 WGS-84 坐标与地方坐标之间的转换等。三维坐标转换是将空间数据从一个坐标系统转换到另一个坐标系统的过程，其实质是利用公共点的两套坐标以及非公共点的一套坐标信息推估出非公共点在另一套坐标系中的坐标。实际坐标转换时，通常首先采用相关处理，然后采用布尔莎(Bursa)七参数模型[1]进行坐标转换。布尔莎(Bursa)模型参数包括：3 个平移参数，3 个旋转参数和 1 个尺度参数。求解时，当观测值个数大于必要观测数时，通常采用最小二乘(LS)的方法，建立高斯－马尔科夫(G-M)模型，求解参数估值。G-M 模型的前提是假设系数矩阵 B 完全正确，即坐标已知

*通讯作者。

值是不受偶然误差影响的。然而同一控制点在两套坐标系下均含误差，因此 G-M 模型并不合理。

自 Golub[2]和 Van Loan[2] 1980 年提出整体最小二乘(TLS)以来，许多学者对 TLS 用于三维基准转换进行了研究[3-8]。Felus[6]和 Schaffrin[7]分别讨论了基准转换中系数矩阵存在误差时，如何合理地确定基准转换参数。陆珏[3]和陈义[8]讨论了三维线性基准转换、空间后方交会的整体最小二乘方法。袁庆讨论了加权整体最小二乘在三维坐标转换中的应用。但是上述研究中，有的没有考虑观测值的权值；有些尽管考虑了观测值的权值，但是仅仅采用验前方差定权，但在实际解算时发现，由于两类坐标获取方式不同，验前方差决定两类坐标之间的权比不够精确。本文提出利用赫尔默特方差估计法确定两套坐标的权值，此方法通过判断解算后目标坐标与原始坐标单位权中误差是否相等来不断更新两套坐标的权值，这样就使观测值的权值更为合理。

2. 赫尔默特方差估计法坐标转换定权公式推导

2.1. 布尔沙模型

当旋转角是小角度或者初始值已知时，三维坐标转换的布尔莎模型如式(1)所示。

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 0 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中，(X_2, Y_2, Z_2)、(X_1, Y_1, Z_1) 分别为目标坐标系和原始坐标系的坐标；(T_1, T_2, T_3) 为平移参数；$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ 为旋转参数；k 为缩放参数。当公共点的个数为 m(不小于 3)时，布尔莎模型可以写成如式(2)的形式。

$$\begin{bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \\ \vdots \\ X_{2m} \\ Y_{2m} \\ Z_{2m} \end{bmatrix}_{3m\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{11} & Y_{11} & X_{11} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{11} & 0 & -X_{11} & Y_{11} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{11} & X_{11} & 0 & Z_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{1m} & Y_{1m} & X_{1m} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{1m} & 0 & -X_{1m} & Y_{1m} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{1m} & X_{1m} & 0 & Z_{1m} \end{bmatrix}_{3m\times 7} \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ k \end{bmatrix}_{7\times 1} \tag{2}$$

式中，(X_{2i}, Y_{2i}, Z_{2i})、(X_{1i}, Y_{1i}, Z_{1i}) $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 分别为 i 公共点在目标坐标系下和原始坐标系下的坐标。

2.2. 加权整体最小二乘(WTLS)

在变量误差(EIV)模型中，由于两套坐标均是通过测量平差得到，不可避免的受观测误差的影响，现将原始坐标当成一类虚拟观测值，可得到如式(3)的观测方程。

$$\left.\begin{aligned} L &= BX - d \\ L_B &= X_B \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

L_B 为 B 中误差项组成的列向量，B 由 X_B 的初值和一些常数项组成，对上述模型进行计算，可得如式(4)的误差模型。

$$\begin{cases} V = \left(B^0 + \Delta B\right)\left(X^0 + x\right) - d - L \\ \quad = \Delta B X^0 + B^0 x + B^0 X^0 - d - L \\ \quad = A x_B + B^0 x + B^0 X^0 - d - L \\ V_B = x_B + X_B^0 - L_B \end{cases} \tag{4}$$

上式中 x_B 为新设参数的改正数，Ax_B 是 ΔBX^0 的改写形式，目的是将 x_B 作为向量分离出来，具体可以用矩阵矢量法[9]进行。B^0 是新设参数初值和一些常数组成的矩阵，上式忽略了二次小项。令：

$$V' = \begin{bmatrix} V \\ V_B \end{bmatrix},\ \mathrm{l} = \begin{bmatrix} L + d - B^0 X^0 \\ L_B - X_B \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B^0 & A \\ 0 & E \end{bmatrix},\ x' = \begin{bmatrix} x \\ x_B \end{bmatrix},$$

$$P(l) = \begin{bmatrix} P_{obj} & 0 \\ 0 & P_{ori} \end{bmatrix}$$

其中，P_{obj} 与 P_{ori} 分别表示目标坐标与原始坐标的权阵，可以得到如式(5)的误差模型：

$$V' = Bx' - l \tag{5}$$

其随机模型如式(6)所示：

$$D(l) = \sigma_0^2 P^{-1}(l) \tag{6}$$

上式中，σ_0^2 为先验单位权中误差，$D(l)$ 为目标坐标与原始坐标方差组成的方差阵。

2.3. 赫尔默特方差估计法及具体公式推导

利用预平差的改正数 V，按验后估计各类观测值

验前方差的方法，其思想最早是由赫尔默特(1924)提出的，Welsch (1978)推得的严密公式推导过程如下[10]：

间接平差的误差方程：

$$V = B\hat{X} - L \tag{10}$$

法方程及其解为

$$N\hat{X} = W,\ \hat{X} = N^{-1}W \tag{11}$$

式中 $N = B^{\mathrm{T}}PB, W = B^{\mathrm{T}}PL$ 。

现设在 L 中包含两类独立观测值 L_1 和 L_2，它们的权阵分别为 P_1 和 P_2，且有 $P_{12}=0$，它们的误差方程分别为式(12)：

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= B_1\hat{X} - L_1 \\ V_2 &= B_2\hat{X} - L_2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

且有下列关系式：

$$\begin{aligned} &L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \\ &B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \\ &N = B^{\mathrm{T}}PB = B_1^{\mathrm{T}}PB_1 + B_2^{\mathrm{T}}PB_2 = N_1 + N_2 \\ &W = B^{\mathrm{T}}PL = B_1^{\mathrm{T}}PL_1 + B_2^{\mathrm{T}}PL_2 = W_1 + W_2 \end{aligned} \tag{13}$$

一般地说，第一次平差时给定的两类观测值的权 P_1 和 P_2 是不恰当的，令其分别为 σ_{01}^2 和 σ_{02}^2，则有

$$\left.\begin{aligned} D(L_1) &= \sigma_{01}^2 P_1^{-1} \\ D(L_2) &= \sigma_{02}^2 P_2^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

方差分量估计的目的是利用各次平差后各类改正数的平方和 $V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1$ 及 $V_2^{\mathrm{T}}P_2V_2$ 来估计 σ_{01}^2 和 σ_{02}^2。由式(12)可知：

$$\begin{aligned} V_1 &= BX_1 - L_1 \\ &= \left(B_1N^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P_1 - E\right)L_1 + B_1N^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P_2L_2 \end{aligned} \tag{15}$$

故 V_1 的方差为

$$\begin{aligned} D(V_1) &= \left(B_1N^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P_1 - E\right)D(L_1)\left(B_1N^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P_1 - E\right)^{\mathrm{T}} \\ &\quad + B_1N^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P_2D(L_2)P_2B_2N^{-1}B_1^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{16}$$

将上式展开，并顾及 $D(L_1) = \sigma_{01}^2P_1^{-1}$，$D(L_2) = \sigma_{02}^2P_2^{-1}$，则上式可整理得：

$$\begin{aligned} D(V_1) &= \sigma_{01}^2\left(B_1N^{-1}N_1N^{-1}B_1^{\mathrm{T}} - 2B_1N^{-1}B_1^{\mathrm{T}} + P_1^{-1}\right) \\ &\quad + \sigma_{02}^2\left(B_1N^{-1}N_2N^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

又因为：

$$E\left(V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1\right) = tr\left(P_1D(V_1)\right)$$

因此：

$$\begin{aligned} E\left(V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1\right) &= \sigma_{01}^2 tr\left(P_1P_1^{-1} - 2P_1B_1N^{-1}B_1^{\mathrm{T}} + P_1B_1N^{-1}N_1N^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\right) + \sigma_{02}^2 tr\left(P_1B_1N^{-1}N_2N^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\right) \\ &= \left\{n_1 - 2tr\left(N^{-1}N_1\right) + tr\left(N^{-1}N_1N^{-1}N_1\right)\right\}\sigma_{01}^2 + tr\left(N^{-1}N_1N^{-1}N_2\right)\sigma_{02}^2 \end{aligned} \tag{18}$$

同理可得：

$$E\left(V_2^{\mathrm{T}}P_2V_2\right) = tr\left(N^{-1}N_1N^{-1}N_2\right)\sigma_{01}^2 + \left\{n_2 - 2tr\left(N^{-1}N_2\right) + tr\left(N^{-1}N_2N^{-1}N_2\right)\right\}\sigma_{02}^2 \tag{19}$$

在(18)和(19)式中，将数学期望的符号去掉，改成由平差得到的计算值 $V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1$ 和 $V_2^{\mathrm{T}}P_2V_2$，则求出的 σ_{01}^2 和 σ_{02}^2 也改为估值 $\hat{\sigma}_{01}^2$ 和 $\hat{\sigma}_{02}^2$，将上述(18)、(19)写成矩阵形式：

$$S\hat{\theta} = W_\theta \tag{20}$$

式中

$$\begin{aligned} &S = \begin{bmatrix} n_1 - 2tr\left(N^{-1}N_1\right) + tr\left(N^{-1}N_1\right)^2 & tr\left(N^{-1}N_1N^{-1}N_2\right) \\ tr\left(N^{-1}N_1N^{-1}N_2\right) & n_2 - 2tr\left(N^{-1}N_2\right) + tr\left(N^{-1}N_2\right)^2 \end{bmatrix} \\ &\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 & \hat{\sigma}_{02}^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ W_\theta = \begin{bmatrix} V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1 & V_2^{\mathrm{T}}P_2V_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

式(20)与(21)即为两类观测值按照间接平差时的赫尔默特估算公式，可得式(20)的解为：

$$\hat{\theta} = S^{-1} W_{\theta} \tag{22}$$

由式(22)即可得到 $V_1^{\mathrm{T}} P_1 V_1$ 及 $V_2^{\mathrm{T}} P_2 V_2$ 与 σ_{01}^2 和 σ_{02}^2 的关系。在公式(20)中，考虑到求解方便，略去微小量求迹部分，可得到各类观测值的单位权方差估值为：

$$\sigma_{0i}^2 = \frac{V_i^{\mathrm{T}} P_i V_i}{n_i},\quad i = 1, 2 \tag{23}$$

赫尔默特方差估计法用于三维基准转换时权值更新步骤如下：

1) 进行验前权估计，确定原始坐标与目标坐标的权的初值 P_1，P_2；

2) 按式(5)进行第一次平差，求得原始坐标与目标坐标的 $V_1^{\mathrm{T}} P_1 V_1$ 及 $V_2^{\mathrm{T}} P_2 V_2$；

3) 按式(23)进行第一次方差分量估计，得到原始坐标与目标坐标的单位权方差的第一次估值 σ_{01}^2 与 σ_{02}^2，再按式(24)定权：

$$\hat{P}_i = \frac{c}{\sigma_{0i}^2 P_i^{-1}},\quad i = 1, 2 \tag{24}$$

式中，c 为任一常数，一般选 σ_{0i}^2 中的某一个值；

4) 反复进行(2)、(3)，即进行：平差—方差分量估计—定权后再平差，直至 $\sigma_{01}^2 = \sigma_{02}^2$ 为止，或者通过必要的检验认为目标坐标与原始目标的单位权方差之比约等于 1 为止。

3. 算例分析

表 1 列出了 WGS-84 和地方坐标系下 7 个公共点的坐标。为了验证赫尔默特方差估计法定权的合理性与精确性，分别采取其中 3 个点、5 个点、7 个点，采用常规定方法权(以下简称 WTLS)与本文采用的赫尔默特方法定权(以下简称 HWTLS)，并对结果进行了对比和分析。表 2~4 给出了利用 3 个点、5 个点、7 个点求解得到参数及精度对比。表 5 列出了采用 7 个点时，目标坐标与原始坐标方差估值三次迭代的比值。由表 2~4 可以看出：1) WTLS 与 HWTLS 方法求解得到的参数差别不大；2) 采用 HWTLS 方法得到的参数精度除个别与 WTLS 方法相当外，其它的均比采用 WTLS 高，最高可达 21.4%。从表 5 可以看出，随着不断迭代，WTLS 方法由于没有对权值进行更新，原始坐标与目标坐标单位权方差的比值保持不变，且比值不接近 1，这显然是不合理的；HWTLS 方法得到的原始坐标与目标坐标单位权方差的比值逐渐趋近于 1，可以得到更为合理的结果。

Table 1. Common coordinates of WGS84 system and local system (unit: m)
表 1. WGS84、地方坐标系下公共点的坐标(单位：m)

点号	X84	Y84	Z84	X 地方	Y 地方	Z 地方
1	4157870.237	664818.678	4775416.524	4157222.543	664789.307	4774952.099
2	4149691.049	688865.785	4779096.588	4149043.336	688836.443	4778632.188
3	4173451.354	690369.375	4758594.075	4172803.511	690340.078	4758129.701
4	4177796.064	643026.700	4761228.899	4177148.376	642997.635	4760764.800
5	4137659.549	671837.337	4791592.531	4137012.190	671808.029	4791128.215
6	4146940.228	666982.151	4784324.099	4146292.729	666952.887	4783859.856
7	4139407.506	702700.227	4786016.645	4138759.902	702670.738	4785552.196

Table 2. Comparison among the parameters calculated and accuracies with point 1, 5 and 7
表 2. 3 个点(1、5、7 号点)时两种方法求解参数及精度对比

		T_x/m	T_y/m	T_z/m	ε_X/″	ε_Y/″	ε_Z/″	u
WTLS	参数值	641.910	68.182	416.543	−1.000	0.889	0.982	1.000
	中误差	±0.022	±0.019	±0.014	±0.031	±0.024	±0.015	$\pm 5.8 \times 10^{-8}$
HWT-LS	参数值	642.011	68.265	416.521	−0.998	0.891	0.993	1.000
	中误差	±0.020	±0.019	±0.011	±0.030	±0.019	±0.012	$\pm 5.5 \times 10^{-8}$

Table 3. Comparison among the parameters calculated and accuracies with point 1, 3, 5, 6 and 7
表 3. 5 个点(1、3、5、6、7 号点)时两种方法求解参数及精度对比

		T_x/m	T_y/m	T_z/m	ε_X/″	ε_Y/″	ε_Z/″	u
WTLS	参数值	641.931	68.382	416.233	−1.011	0.897	0.978	1.000
	中误差	±0.021	±0.017	±0.013	±0.028	±0.023	±0.013	$\pm 5.2 \times 10^{-8}$
HWT-LS	参数值	642.008	68.272	416.321	−1.003	0.891	0.988	1.000
	中误差	±0.018	±0.016	±0.011	±0.028	±0.020	±0.012	$\pm 4.9 \times 10^{-8}$

Table 4. Comparison among the parameters calculated and accuracies with all the points
表 4. 7 个点时两种方法求解参数及精度对比

		T_x/m	T_y/m	T_z/m	ε_X/″	ε_Y/″	ε_Z/″	u
WTLS	参数值	641.933	68.382	416.231	−1.011	0.897	0.977	1.000
	中误差	±0.021	±0.016	±0.013	±0.027	±0.023	±0.011	$\pm 5.0 \times 10^{-8}$
HWT-LS	参数值	642.001	68.275	416.311	−1.007	0.894	0.981	1.000
	中误差	±0.017	±0.014	±0.010	±0.026	±0.019	±0.010	$\pm 4.9 \times 10^{-8}$

Table 5. Ratio of variance of unit weight between original coordinates and object coordinates after three times iterations
表 5. 原始坐标与目标坐标单位权方差估值三次迭代的比值

	WTLS			HWTLS		
迭代次数	σ_{01}^2 (mm)	σ_{02}^2 (mm)	$\sigma_{02}^2:\sigma_{02}^2$	σ_{01}^2 (mm)	σ_{02}^2 (mm)	$\sigma_{01}^2:\sigma_{02}^2$
1	2.13	2.00	1:0.94	2.13	2.00	1:0.94
2	2.13	2.00	1:0.94	2.14	2.08	1:0.97
3	2.13	2.00	1:0.94	2.16	2.13	1:0.99

4. 结语

1) 原始坐标与目标坐标获取方式不同时，WTLS 仅采用验前方差定权，由表 5 的结果可知，此种方法得到的原始坐标与目标坐标的单位权方差不相等，这是不合理的，采用 HWTLS 时，对权值进行了迭代更新，得到的单位权方差更为合理。

2) 采用 HWTLS 方法求解时，尽管所求参数的差异不大，但是其得到参数的精度相对于 WTLS 更高。

项目基金

国家自然科学基金资助项目(41374012)；国家 863 计划资助项目(2008AA12Z308)。

参考文献 (References)

[1] 陈义，沈云中，等 (2004) 适用于大旋转角的三维基准转换的一种简便模型. *武汉大学学报(信息科学版)*, **29**, 1101-1105.

[2] Golub, H.G. and Van Loan, F.C. (1980) An analysis of the total least squares problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **17**, 883-893.

[3] 陆珏，陈义，等 (2011) 加权总体最小二乘方法在 ITRF 转换中的应用. *大地测量与地球动力学*, **31**, 84-86.

[4] 袁庆，楼立志，等 (2011) 加权总体最小二乘在三维基准转换中的应用. *测绘学报*, **40**, 115-118.

[5] 周拥军，邓才华 (2012) 加权和不加权 TLS 方法及其在不等精度坐标转换中的应用. *武汉大学学报(信息科学版)*, **8**, 977-979.

[6] Yaron, A. and Schaffrin, F.B. (2005) Performing similarity transformations using the error-in-variables model. *ASPRS* 2005 *Annual Conference Baltinore*, Maryland, 7-11 March 2005.

[7] Schaffrin, B., Lee, I., Felus, Y. and Choi, Y. (2006) Total least-squares for geodetic straight-line and plane adjustment, *Boll. Geod. Sci. Aff.*, **65**, 141-168.

[8] 陈义，陆珏，等 (2008) 总体最小二乘方法在空间后方交会中的应用. *武汉大学学报(信息科学版)*, **12**, 1271-1274.

[9] 魏木生 (2006) 广义最小二乘问题的理论与计算. 科学出版社，北京.

[10] 崔希璋，等 (2009) 广义测量平差(第二版). 武汉大学出版社，武汉.